Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Андреева, Метод граничных функционалов для нерегулярных структур, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 1, 121–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:18:23

Метод граничных функционалов для нерегулярных структур

© 2004 г. Т. В. Андреева

Метод граничных функционалов, предложенный и использованный А. А. Сапоженко для решения ряда перечислительных задач, успешно работает в случае частично упорядоченных множеств с регулярной структурой слоев, например, на единичном n -мерном кубе B^n . В некоторых задачах частично упорядоченное множество, например, трехзначная n -мерная решетка E_3^n , не обладает регулярной структурой. В данной статье метод граничных функционалов обобщен на случай таких множеств, и с помощью этого метода получена асимптотика числа антицепей в трех центральных слоях E_3^n .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00266.

1. Введение

В [2, 3] предложен метод граничных функционалов для решения перечислительных задач. Метод граничных функционалов используется, если исходную перечислительную задачу удастся свести к вычислению сумм вида

$$T(X, f) = \sum_{A \subseteq X} f(A), \quad (1)$$

где f — граничный функционал, определенный на семействе всех подмножеств конечного множества X . При этом суммы вида (1) сводятся к более просто вычисляемым суммам. В ряде задач метод приводит к получению асимптотики числа перечисляемых объектов. С помощью этого метода получена, например, асимптотика числа монотонных булевых функций.

Метод граничных функционалов успешно работает в случае частично упорядоченных множеств с регулярной структурой слоев, например, на единичном n -мерном кубе B^n . В некоторых задачах частично упорядоченное множество, например, трехзначная n -мерная решетка E_3^n , не обладает регулярной структурой. Цель данной статьи — обобщение метода граничных функционалов на случай таких множеств (теоремы 4 и 5). В результате применения метода получена асимптотика числа антицепей в трех центральных слоях E_3^n (следствие 7).

2. Определения и известные результаты

Для полноты изложения нам необходимы определения и результаты из статьи [4], которые мы приводим в этом разделе.

Если X — множество, то через 2^X обозначается семейство всех его подмножеств. Произвольное отображение $f: 2^X \rightarrow (0, 1]$ называется граничным функционалом на семействе подмножеств множества X , если оно удовлетворяет следующим условиям (а)–(с):

- (а) $f(A) = 1$ тогда и только тогда, когда $A = \emptyset$;
- (б) $f(A \cup B) \geq f(A)f(B)$;
- (с) $f(A \cup B) > f(A)f(B)$ тогда и только тогда, когда существуют $u \in A$ и $v \in B$ такие, что $f(\{u, v\}) > f(\{u\})f(\{v\})$.

Пара $I = (X, f)$, где X — конечное множество, а f — граничный функционал, называется функциональной парой. Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара. Вершины u и v из X такие, что $f(\{u, v\}) > f(\{u\})f(\{v\})$, называются смежными (относительно f), в этом случае используется обозначение $u \# v$. Вершины u и v , для которых выполнено равенство $f(\{u, v\}) = f(\{u\})f(\{v\})$, называются несмежными или разделенными, в этом случае используется обозначение $u \parallel v$. Множества $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$ называются смежными (используется обозначение $A \# B$), если $f(A \cup B) > f(A)f(B)$. Множества A и B называются несмежными или разделенными (используется обозначение $A \parallel B$), если $f(A \cup B) = f(A)f(B)$.

Граф $G_I = (X; E)$ с множеством ребер

$$E = \{\{u, v\} : u \# v\}$$

называется графом функциональной пары $I = (X, f)$. Граф $H_{G_I}(A) = (A; E')$, где

$$E' = \{\{u, v\} \in E : \{u, v\} \subseteq A\}$$

называется подграфом графа G_I , порожденным множеством A . Множество $A \subseteq X$ (относительно I), если граф $H_{G_I}(A)$ связан.

Семейство всех связанных подмножеств множества X обозначим через $\mathcal{A} = \mathcal{A}(I)$. Подмножество $B \subseteq A$ называется компонентой множества A (используется обозначение $B \vdash A$), если $B \in \mathcal{A}(I)$, но ни для какого $D \in \mathcal{A}(I)$ неверно, что $B \subset D \subseteq A$. Иначе говоря, множество $B \subseteq A$ есть компонента множества A , если граф $H_{G_I}(B)$ является компонентой связности для графа $H_{G_I}(A)$.

Пусть m — целое неотрицательное число, тогда

$$\mathcal{A}_m(I) = \{A \in \mathcal{A}(I) : |A| = m\},$$

$$\mathcal{A}_{\widehat{m}}(I) = \bigcup_{0 \leq j \leq m} \mathcal{A}_j(I),$$

$$\mathcal{A}_{\bar{m}}(I) = \mathcal{A}(I) \setminus \mathcal{A}_{\widehat{m}}(I).$$

Если ν — натуральное число, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$, то

$$\alpha^\nu(\mathcal{B}) = \sum_{A \in \mathcal{B}} f^\nu(A),$$

здесь и далее $f^\nu(A) = (f(A))^\nu$.

Последовательность $\{I_n = (X_n, f_n)\}_{n=1}^\infty$ функциональных пар называется Δ -сходящейся, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^1(\mathcal{A}_{\Delta}(I_n)) = 0.$$

Если $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$, то

$$C(\mathcal{B}) = \{A \subseteq X: B \vdash A \Rightarrow B \in \mathcal{B}\}.$$

Таким образом, $C(\mathcal{B})$ состоит из всех множеств, у которых все компоненты принадлежат семейству $\mathcal{B}$. Рассмотрим еще один тип сумм

$$S(\mathcal{B}) = \sum_{A \in C(\mathcal{B})} f(A).$$

Приведем некоторые соотношения между суммами $T(X, f)$, $\alpha^\nu(\mathcal{B})$ и $S(\mathcal{B})$, доказанные в [4].

Лемма 1 ([4]). Для любой функциональной пары $I = (X, f)$ и любого $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$ справедливы неравенства

$$S(\mathcal{B}) \leq T(X, f) = S(\mathcal{A}(I)) \leq S(\mathcal{B}) \exp\{\alpha^1(\mathcal{A}(I) \setminus \mathcal{B})\}. \quad (2)$$

При $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_{\Delta}(I_n)$ из леммы 1 следует, что для Δ -сходящихся последовательностей функциональных пар при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$T(X_n, f_n) \sim S(\mathcal{B}_n).$$

Таким образом, задача о вычислении сумм $T(X, f)$ сводится к выражению сумм $S(\mathcal{B})$ через суммы типа $\alpha^\nu(\mathcal{B})$ по связным множествам малой мощности.

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, $A \subseteq X$. Через $\eta(A)$ обозначается число компонент множества A . Если k — целое неотрицательное число, то

$$C_k(\mathcal{B}) = \{A \in C(\mathcal{B}): \eta(A) \leq k\}.$$

Лемма 2 ([4]). Пусть функциональная пара $I = (X, f)$ и семейство $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$ таковы, что $\alpha = \alpha^1(\mathcal{B})$ достаточно велико, и пусть $\theta = \alpha + \alpha^{9/14}$. Тогда

$$\sum_{B \in C_\theta(\mathcal{B})} f(B) \leq S(\mathcal{B}) \leq (1 + 2\alpha e^{-\alpha^{2/7}/2}) \sum_{B \in C_\theta(\mathcal{B})} f(B). \quad (3)$$

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара. В [4] определено понятие множества (семейства) ранга r над X . Произвольное подмножество $A \subseteq X$ называется семейством ранга 1. Если $A_1, \dots, A_s$ — различные семейства ранга r , то $F = \{A_1, \dots, A_s\}$ называется семейством ранга $r + 1$. Семейства $A_1, \dots, A_s$ называются элементами семейства F . Множество всех семейств ранга r над X обозначается через $X^{(r)}$. Для произвольного семейства F ранга r по индукции определяются величины $|F|$, $\|F\|$, $f(F)$, и множество $\langle F \rangle$. Если F — семейство ранга 1, то есть $F \subseteq X$, то $\|F\| = |F|$, где $|F|$ — число элементов множества F , $f(F)$ определяется функциональной парой $I = (X, f)$, а $\langle F \rangle = F$. Пусть для некоторого $r \geq 1$ эти величины и множество определены, и пусть $F = \{A_1, \dots, A_s\}$ — семейство ранга $r + 1$. Тогда

$$|F| = s, \quad \|F\| = \sum_{1 \leq i \leq s} \|A_i\|, \quad f(F) = \prod_{1 \leq i \leq s} f(A_i), \quad \langle F \rangle = \bigcup_{1 \leq i \leq s} \langle A_i \rangle.$$

В ([4]) определено также понятие связного семейства ранга r . Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара. Для семейств ранга 1 связность определяется с помощью графа G_I функциональной пары I .

Семейство $F = \{A_1, \dots, A_s\}$ ранга $r > 1$ называется связным, если каждое из A_i , $i = 1, \dots, s$, является связным семейством ранга $r - 1$ и $\langle F \rangle \in \mathcal{A}(I)$. Множество всех связных семейств ранга r обозначается через $\mathcal{A}^{(r)}(I)$. По определению $\mathcal{A}^{(1)}(I) = \mathcal{A}(I)$.

Для произвольного подсемейства $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$ определено семейство $\mathfrak{B}^{(r)}$ связных подмножеств ранга r , порожденное множеством $\mathfrak{B}$. По определению $\mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B}^{(r-1)}$ определено, то

$$\mathfrak{B}^{(r)} = 2^{\mathfrak{B}^{(r-1)}} \cap \mathcal{A}^{(r)}(I).$$

Подсемейство B семейства F ранга r называется компонентой связности семейства F (в этом случае используется обозначение $B \vdash F$), если $B \in \mathcal{A}^{(r)}(I)$ и $\langle B \rangle$ — компонента связности множества $\langle F \rangle$. Через $\eta(F)$ обозначается, как и раньше, число компонент связности семейства F .

Если $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$, $B \in X^{(s)}$, $r > s \geq 1$, то

$$\mathfrak{B}_B^{(r)} = \{A \in \mathfrak{B}^{(r)} : \langle A \rangle \# \langle B \rangle\}, \quad \mathfrak{B}_{\bar{B}}^{(r)} = \{A \in \mathfrak{B}^{(r)} : \langle A \rangle \parallel \langle B \rangle\}.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения, доказанные в [4].

Теорема 1 ([4]). Пусть даны функциональная пара $I = (X, f)$ и подсемейство $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$, и пусть для положительных чисел ε и δ выполняются неравенства

$$\alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}) \leq \tau, \quad (4)$$

$$\alpha^2(\mathfrak{B}) \leq \delta. \quad (5)$$

Тогда

$$\exp\{\alpha^1(\mathfrak{B}) - \tau - \delta/2\} \leq S(\mathfrak{B}) \leq \exp\{\alpha^1(\mathfrak{B})\}. \quad (6)$$

Теорема 2 ([4]). Пусть даны функциональная пара $I = (X, f)$ и подсемейство $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$. Пусть $\alpha = \alpha^1(\mathfrak{B})$ достаточно велико, $\theta = \alpha + \alpha^{9/14}$, и пусть для положительных чисел β , γ , ξ и ζ выполняются неравенства

$$\alpha^1(\mathfrak{B}^{(3)}) \leq \beta, \quad (7)$$

$$\max_{A \in C_{\theta}(\mathfrak{B})} \alpha^1(\mathfrak{B}_A^{(2)}) \leq \gamma, \quad (8)$$

$$\alpha^3(\mathfrak{B}) \leq \xi, \quad (9)$$

$$\alpha^2(\mathfrak{B}^{(2)}) \leq \zeta. \quad (10)$$

Тогда

$$\exp\{\mu(\mathfrak{B})\} \leq S(\mathfrak{B}) \leq (1 + 2\alpha \exp\{-\alpha^{2/7}/2\}) \exp\{\mu(\mathfrak{B}) + \beta + \gamma + \xi/3 + \zeta/2\}. \quad (11)$$

где

$$\mu(\mathfrak{B}) = \alpha^1(\mathfrak{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathfrak{B}) - \alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}).$$

3. Асимптотика сумм граничных функционалов для $(\Delta, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарных функциональных пар

В [4] показано, что условия теорем 1 и 2 автоматически выполняются для так называемых (Δ, κ, q, c) -ординарных функциональных пар. В данном разделе эти утверждения обобщаются на случай $(\Delta, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарных функциональных пар. Везде в дальнейшем $\Delta, \kappa_1, \kappa_2, q, \lambda$ — натуральные числа, $c \geq 1$ и κ_2 достаточно велико.

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, $B \subseteq X$, m — целое неотрицательное число, тогда

$$\mathcal{A}_{B, \widehat{m}}(I) = \{A \in \mathcal{A}_{\widehat{m}}(I) : A \# B\}.$$

Функциональная пара $I = (X, f)$ называется (Δ, κ, q, c) -ординарной, если выполняется неравенство

$$|X| \leq 2^{(\Delta+1)\kappa - 2\log_2^2 \kappa}, \quad (12)$$

для всякого $v \in X$

$$f(\{v\}) \leq 2^{-\kappa}, \quad (13)$$

для любых $A \subseteq X$ и $v \in A$

$$f(A) \leq f(A \setminus \{v\})f(\{v\})2^{(|A|-1)q}, \quad (14)$$

для всякого $v \in X$ и любого натурального числа m

$$|\mathcal{A}_{\{v\}, \widehat{m}}(I)| \leq \kappa^{cm}. \quad (15)$$

Если функциональная пара I порождается некоторым графом Γ с множеством вершин X , то условие (12) означает, что число вершин в графе ограничено, из (13) следует, что минимальная степень вершины равна κ , условие (14) означает, что окрестности любых двух вершин имеют не более q общих точек, а условие (15) — что мощность окрестности любой точки не слишком велика.

В случае, когда (12) выполняется при заданном Δ и некотором κ , большем κ_2 , а доля вершин, степень которых меньше κ (то есть, для которых $2^{-\kappa} < f(\{v\}) \leq 2^{-\kappa_2}$), мала, оказывается полезным обобщение понятия (Δ, κ, q, c) -ординарности.

Пусть $\kappa_2 < \kappa_1$, $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Функциональную пару $I = (X, f)$ назовем $(\Delta, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной, если выполняется неравенство

$$|X| \leq 2^{(\Delta+1)\kappa_1 - 2\log_2^2 \kappa_1}, \quad (16)$$

для всякого $v \in X_1$

$$f(\{v\}) \leq 2^{-\kappa_1}, \quad (17)$$

для всякого $u \in X_2$

$$2^{-\kappa_1} < f(\{u\}) \leq 2^{-\kappa_2}, \quad (18)$$

$\varepsilon = \log_2(|X|/|X_2|)$ и

$$(\Delta + 1)(\kappa_1 - \kappa_2) \leq \varepsilon < \kappa_2, \quad (19)$$

для любых $A \subseteq X$ и $v \in A$

$$f(A) \leq f(A \setminus \{v\})f(\{v\})2^{(|A|-1)q}, \quad (20)$$

для любых $u, v \in X$ таких, что $f(\{u, v\}) > f(\{u\})f(\{v\})$

$$|\log_2 f(\{u\}) - \log_2 f(\{v\})| \leq \lambda. \quad (21)$$

для всякого $v \in X$ и любого натурального числа m

$$|\mathcal{A}_{\{v\}, \widehat{m}}(I)| \leq \kappa^{cm}. \quad (22)$$

Если какие-либо из свойств (16)–(22) не выполняются для функциональной пары $I = (X, f)$, то будем ставить прочерки в соответствующих координатах. Например, если функциональная пара $I = (X, f)$ удовлетворяет свойствам (17), (18), (20), но, быть может, не удовлетворяет свойствам (16), (19), (21), (22), то такая пара называется $(-, \kappa_1, \kappa_2, -, q, -, -)$ -ординарной.

Следующее утверждение устанавливает связь между понятиями (Δ, κ, q, c) -ординарности и $(\Delta, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарности.

Теорема 3. Пусть $I = (X, f)$ является $(\Delta, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, $X = X_1 \cup X_2$. Тогда функциональная пара $I_1 = (X_1, f)$ является (Δ, κ_1, q, c) -ординарной, а функциональная пара $I_2 = (X_2, f)$ является (Δ, κ_2, q, c) -ординарной.

Доказательство. Из (16), (19) и того, что $\kappa_2 < \kappa_1$ следует, что

$$\begin{aligned} |X_1| &\leq |X| \leq 2^{(\Delta+1)\kappa_1-2\log_2^2 \kappa_1}, \\ |X_2| &= 2^{-\varepsilon}|X| \leq 2^{-(\Delta+1)(\kappa_1-\kappa_2)}2^{(\Delta+1)\kappa_1-2\log_2^2 \kappa_1} \leq 2^{(\Delta+1)\kappa_2-2\log_2^2 \kappa_2}. \end{aligned}$$

Из (17) следует, что для всякого $v \in X_1$

$$f(\{v\}) \leq 2^{-\kappa_1},$$

а из (18) следует, что для всякого $v \in X_2$

$$f(\{v\}) \leq 2^{-\kappa_2}.$$

Из (22) следует, что для любого натурального m и всякого $v \in X_2$

$$|\mathcal{A}_{\{v\}, \widehat{m}}(I)| \leq \kappa_2^{cm},$$

а для всякого $v \in X_1$

$$|\mathcal{A}_{\{v\}, \widehat{m}}(I)| \leq \kappa_2^{cm} \leq \kappa_1^{cm}.$$

Из (20) непосредственно следует (14). Выполнение условий (12)–(15) для функциональных пар $I_1(X_1, f)$ и $I_2(X_2, f)$ доказано.

Для доказательства основного результата нам понадобятся обобщения утверждений, приведенных в разделе 2.

Пусть $I = (X, f)$, $A \subseteq X$, $\mathcal{N} \subseteq 2^X$. Через $\eta_{\mathcal{N}}(A)$ обозначим число компонент множества A , принадлежащих семейству $\mathcal{N}$. Если k — целое неотрицательное число, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$, $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{B}$, то

$$C_k(\mathfrak{B} | \mathcal{N}) = \{A \in C(\mathfrak{B}) : \eta_{\mathcal{N}}(A) \leq k\}.$$

Доказательства следующих утверждений аналогичны доказательствам утверждений, сформулированных в разделе 2.

Следствие 1. Пусть даны функциональная пара $I = (X, f)$ и семейство $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$, пусть семейства $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}_1$ таковы, что $\alpha_1 = \alpha^1(\mathfrak{B}_1)$ и $\alpha_2 = \alpha^1(\mathfrak{B}_2)$ достаточно велики. Пусть также $\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_1^{9/14}$ и $\theta_2 = \alpha_2 + \alpha_2^{9/14}$ и для некоторого $\psi \geq 0$

$$\min_{A \in C_{\hat{\theta}_1}(\mathfrak{B}_1)} \alpha^1(\mathfrak{B}_{2,\bar{A}}) \geq \alpha_2(1 - \psi).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{B \in C_{\hat{\theta}_1}(\mathfrak{B}|\mathfrak{B}_1) \cap C_{\hat{\theta}_2}(\mathfrak{B}|\mathfrak{B}_2)} f(B) &\leq S(\mathfrak{B}) \\ &\leq (1 + 2\alpha_1 e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + 2\alpha_2 e^{-(\alpha_2 - \psi)^{2/7}/2}) \sum_{B \in C_{\hat{\theta}_1}(\mathfrak{B}|\mathfrak{B}_1) \cap C_{\hat{\theta}_2}(\mathfrak{B}|\mathfrak{B}_2)} f(B). \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство. Нижняя оценка очевидна. Докажем верхнюю оценку. В силу (3)

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{B}) &= \sum_{B \in C(\mathfrak{B})} f(B) \leq (1 + 2\alpha_1 e^{-\alpha_1^{2/7}/2}) \sum_{B \in C_{\hat{\theta}_1}(\mathfrak{B}|\mathfrak{B}_1)} f(B) \\ &= (1 + 2\alpha_1 e^{-\alpha_1^{2/7}/2}) \sum_{A \in C_{\hat{\theta}_1}(\mathfrak{B}_1)} f(A) \sum_{B \in C(\mathfrak{B}_{2,\bar{A}})} f(B) \\ &\leq (1 + 2\alpha_1 e^{-\alpha_1^{2/7}/2}) \sum_{A \in C_{\hat{\theta}_1}(\mathfrak{B}_1)} f(A) (1 + 2\alpha_2 e^{-(\alpha_2 - \psi)^{2/7}/2}) \sum_{B \in C_{\hat{\theta}_2}(\mathfrak{B}_{2,\bar{A}})} f(B), \end{aligned}$$

отсюда следует утверждение.

Из теоремы 2 и следствия 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть дана функциональная пара $I = (X, f)$ и семейство $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$, пусть семейства $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}_1$ таковы, что $\alpha_1 = \alpha^1(\mathfrak{B}_1)$ и $\alpha_2 = \alpha^1(\mathfrak{B}_2)$ достаточно велики. Пусть $\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_1^{9/14}$, $\theta_2 = \alpha_2 + \alpha_2^{9/14}$, и пусть выполнены условия теоремы 2, а также для положительного числа ψ выполнено неравенство

$$\max_{A \in C_{\hat{\theta}_1}(\mathfrak{B}_1)} \alpha^1(\mathfrak{B}_{2,A}) \leq \psi \alpha_2. \quad (24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \exp\{\mu(\mathfrak{B})\} &\leq S(\mathfrak{B}) \\ &\leq (1 + 2\alpha_1 e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + 2\alpha_2 e^{-(\alpha_2 - \psi)^{2/7}/2}) \exp\{\mu(\mathfrak{B}) + \beta + \gamma + \xi/3 + \zeta/2\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\mu(\mathfrak{B}) = \alpha^1(\mathfrak{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathfrak{B}) - \alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}).$$

Следующие утверждения аналогичны утверждениям, сформулированным в [4] для (Δ, κ, q, p) -ординарных функциональных пар.

Замечание 1. Для любой $(-, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, -, -)$ -ординарной функциональной пары $I = (X, f)$ и всякого $A \subseteq X_2$ такого, что $|A| = m$,

$$f(A) \leq 2^{-m(\kappa_2 - q(m-1)/2)}. \quad (26)$$

Это утверждение выводится индукцией из (18) и (14).

Замечание 2. Для любой $(-, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, -, \lambda)$ -ординарной функциональной пары $I = (X, f)$ и всякого $A \subseteq X$ такого, что $A \cap X_1 \neq \emptyset$ и $|A| = m$,

$$f(A) \leq 2^{-m(\kappa_1 - \lambda - q(m-1)/2)}. \quad (27)$$

Это утверждение выводится индукцией из (17), (14) и (21).

Пусть $B \subseteq X$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$, тогда

$$\mathfrak{B}_{[j]}^{(r)} = \{F \in \mathfrak{B}^{(r)} : \|F\| = j\}, \quad \mathfrak{B}_{B, [j]}^{(r)} = \mathfrak{B}_{[j]}^{(r)} \cap \mathfrak{B}_B^{(r)}.$$

Лемма 3. Пусть $I = (X, f)$ является $(-, \kappa_1, \kappa_2, -, -, c, -)$ -ординарной функциональной парой. Тогда для любых натуральных чисел r и j и любой вершины $v \in X$

$$|\mathfrak{B}_{\{v\}, [j]}^{(r)}| \leq 8^{(r-1)j} \kappa_2^{crj}. \quad (28)$$

Лемма 4. Пусть $I = (X, f)$ является $(-, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}_{\widehat{m}}(I)$. Тогда

$$\alpha^v(\mathfrak{B}_{\{v\}, [j]}^{(r)}) \leq 8^{(r-1)j} \kappa_2^{crj} 2^{-j(\kappa_1 - \lambda - q(m-1)/2)v}, \quad (29)$$

если $v \in X_1$, и

$$\alpha^v(\mathfrak{B}_{\{v\}, [j]}^{(r)}) \leq 8^{(r-1)j} \kappa_2^{crj} 2^{-j(\kappa_2 - q(m-1)/2)v}, \quad (30)$$

если $v \in X_2$.

Следствие 3. Пусть $I = (X, f)$ является $(-, \kappa_1, \kappa_2, -, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, v, r, j — произвольные фиксированные натуральные числа и $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}_{\widehat{m}}(I)$. Тогда

$$\alpha^v(\mathfrak{B}_{[j]}^{(r)}) \leq 8^{(r-1)j} \kappa_2^{crj} (|X_1| 2^{-j(\kappa_1 - \lambda - q(m-1)/2)v} + |X_2| 2^{-j(\kappa_2 - q(m-1)/2)v}). \quad (31)$$

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что

$$\alpha^v(\mathfrak{B}_{[j]}^{(r)}) \leq \sum_{v \in X} \alpha^v(\mathfrak{B}_{\{v\}, [j]}^{(r)}),$$

а также из (21) и (29).

Следствие 4. Пусть $I = (X, f)$ является $(\Delta, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, v, r, j — произвольные фиксированные натуральные числа, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\tilde{m}}(I)$, $m \leq \lceil \kappa_2/(2q) \rceil$, а κ_2 достаточно велико. Тогда

$$\alpha^v(\mathcal{B}_{[j]}^{(r)}) \leq 2^{-(vj - (\Delta+1)\kappa_1 - (3/2)\log_2^2 \kappa_1)} + 2^{-(vj - (\Delta+1)\kappa_2 - (3/2)\log_2^2 \kappa_1)} \quad (32)$$

при $j \leq (1/(3cr)) \log_2 \kappa_2$ и

$$\alpha^v(\mathcal{B}_{[j]}^{(r)}) \leq 2^{-v\kappa_1 j/2} + 2^{-v\kappa_2 j/2} \quad (33)$$

при $j > (1/(3cr)) \log_2 \kappa_2$.

Лемма 5. Пусть $I = (X, f)$ является $(\Delta, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, $r_0 = \lceil \kappa/(2q) \rceil$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\tilde{r}_0}(I)$ и κ_2 достаточно велико. Тогда

$$S(\mathcal{B}) = (1 + O(2^{-2\log_2^2 \kappa_1})) S(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{\tilde{\Delta}}(I)). \quad (34)$$

Докажем теперь основные утверждения.

Теорема 4. Пусть $I = (X, f)$ является $(1, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_1(I)$ и κ_2 достаточно велико. Тогда

$$S(\mathcal{B}) = (1 + O(2^{-(3/2)\log_2^2 \kappa_1})) \exp\{\alpha^1(\mathcal{B})\}. \quad (35)$$

Доказательство. Верхняя оценка вытекает из (6) и леммы 5. Для доказательства нижней оценки воспользуемся теоремой 1. Покажем, что условия (4) и (5) выполнены при $\tau = 2^{-\log_2^2 \kappa_1}$ и $\delta = 2^{-2\log_2^2 \kappa_1}$. Тогда утверждение будет следовать из (6).

Пусть $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{A}_1(I)$ и $j_0 = (1/(3cr)) \log_2 \kappa_2$. В силу (32) и (33) при достаточно больших κ_2

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}^{(2)}) &\leq \alpha^1(\tilde{\mathcal{B}}^{(2)}) = \sum_{j \geq 2} \alpha^1(\tilde{\mathcal{B}}_{[j]}^{(2)}) \\ &\leq 2 \cdot 2^{-(3/2)\log_2^2 \kappa_1} + \sum_{3 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-2)\kappa_1 - (3/2)\log_2^2 \kappa_1} \\ &\quad + \sum_{3 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-2)\kappa_2 - (3/2)\log_2^2 \kappa_1} + \sum_{j > j_0} 2^{-j\kappa_1/2} + \sum_{j > j_0} 2^{-j\kappa_2/2} \leq 2^{-\log_2^2 \kappa_1}. \end{aligned}$$

Тем самым условие (4) выполнено при $\tau = 2^{-\log_2^2 \kappa_1}$.

Далее, в силу (12) и (17)–(19)

$$\begin{aligned} \alpha^2(\mathcal{B}) &\leq \alpha^2(\tilde{\mathcal{B}}) = \sum_{A \in \mathcal{A}_1(I)} f^2(A) = \sum_{v \in X_1} f^2(\{v\}) + \sum_{v \in X_2} f^2(\{v\}) \\ &\leq |X_1|2^{-2\kappa_1} + |X_2|2^{-2\kappa_2} = (1 - 2^{-\varepsilon})|X|2^{-2\kappa_1} + 2^{-\varepsilon}|X|2^{-2\kappa_2} \\ &\leq (1 - 2^{-\varepsilon})2^{-2\log_2^2 \kappa_1} + 2^{-\varepsilon}2^{2(\kappa_1 - \kappa_2) - 2\log_2^2 \kappa_1} \leq 2 \cdot 2^{-2\log_2^2 \kappa_1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что условие (5) выполнено при $\delta = 2 \cdot 2^{-2\log_2^2 \kappa_1}$. Теперь нижняя оценка вытекает из (6).

Теорема 5. Пусть $I = (X, f)$ является $(2, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_2(I)$. Тогда при достаточно больших κ_2

$$S(\mathcal{B}) = (1 + O(2^{-(3/2)\log_2^2 \kappa_1})) \exp\{\mu(\mathcal{B})\}, \quad (36)$$

где

$$\mu(\mathcal{B}) = \alpha^1(\mathcal{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathcal{B}) - \alpha^1(\mathcal{B}^{(2)}).$$

Доказательство. Положим $I_1 = (X_1, f)$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}(I_1)$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$.

Предположим сначала, что

$$\alpha^1(\mathcal{B}_1) \geq \kappa_2, \quad \alpha^1(\mathcal{B}_2) \geq \kappa_2, \quad (37)$$

то есть $\alpha^1(\mathcal{B}_1)$ и $\alpha^1(\mathcal{B}_2)$ достаточно велики. Воспользуемся следствием 2. Для этого докажем, что условия (7)–(10) и (24) выполнены соответственно при $\beta = \zeta = 2 \cdot 2^{-\kappa_2}$, $\gamma = \xi = 2^{-(3/2)\log_2^2 \kappa_1}$ и $\psi = 2\kappa_2^c 2^{\varepsilon - \kappa_2}$. Тогда (36) будет следовать из (25).

Проверим выполнение условия (7). Положим $j_0 = (1/(3cr)) \log_2 \kappa_2$. В силу (32) и (33) с $r = 3$ при достаточно больших κ_2

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}^{(3)}) &= \sum_{j \geq 4} \alpha^1(\mathcal{B}_{[j]}^{(3)}) \leq \sum_{4 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-3)\kappa_1 - (3/2)\log_2^2 \kappa_1} + \sum_{4 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-3)\kappa_2 - (3/2)\log_2^2 \kappa_1} \\ &\quad + \sum_{j > j_0} 2^{-j\kappa_1/2} + \sum_{j > j_0} 2^{-j\kappa_2/2} \leq 2 \cdot 2^{\kappa_2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Отсюда вытекает (7) с $\beta = 2 \cdot 2^{\kappa_2}$.

Покажем, что условие (8) выполнено для $\gamma = 2^{-(3/2)\log_2^2 \kappa_1}$. Воспользуемся неравенствами (29) и (30). Пусть $\alpha_1 = \alpha^1(\mathcal{B}_1)$, $\alpha_2 = \alpha^1(\mathcal{B}_2)$ и $\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_1^{9/14}$, $\theta_2 = \alpha_2 + \alpha_2^{9/14}$. Оценим α_1 сверху. Заметим, что в силу (16), (17) и (22) при $m = 1$ и $\Delta = 2$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha^1(\mathcal{B}_1) = \sum_{A \in \mathcal{B}_1} f(A) \leq \sum_{A \in \mathcal{A}_2(I_1)} f(A) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}_1(I_1)} f(A) + \sum_{A \in \mathcal{A}_2(I_1)} f(A) \\ &= \sum_{v \in X_1} f(\{v\}) + \sum_{v \in X_1} \sum_{u \in X_1: u \# v} f(\{u, v\}) \\ &\leq |X_1| 2^{-\kappa_1} + |X_1| \kappa_2^c 2^{-2\kappa_1 + q + \lambda} \leq 2^{2\kappa_1 - 2\log_2^2 \kappa_1} + \kappa_2^c 2^{\kappa_1 + q + \lambda}. \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь оценим α_2 сверху. В силу (16), (18), (19) и (22) при $m = 1$ и $\Delta = 2$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha^1(\mathcal{B}_2) = \sum_{A \in \mathcal{B}_2} f(A) \leq \sum_{A \in \mathcal{A}_2(I) \setminus \mathcal{A}(I_1)} f(A) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{A}_1(I) \setminus \mathcal{A}(I_1)} f(A) + \sum_{A \in \mathcal{A}_2(I) \setminus \mathcal{A}(I_1)} f(A) \\ &= \sum_{v \in X_2} f(\{v\}) + \sum_{v \in X_2} \sum_{u \in X: u \# v} f(\{u, v\}) \\ &\leq |X_2| 2^{-\kappa_2} + |X_2| \kappa_2^c 2^{-2\kappa_2 + q} \leq 2^{2\kappa_2 - 2\log_2^2 \kappa_1} + \kappa_2^c 2^{\kappa_2 + q}, \end{aligned} \quad (40)$$

Поскольку $\alpha_i \geq 1$, $i \in \{1, 2\}$, справедливы неравенства

$$\theta_i \leq 2\alpha_i, \quad i = 1, 2. \quad (41)$$

Положим $B = B_1 \cup B_2$, где $B_1 \in C(\mathcal{B}_1)$, а $B_2 \in C(\mathcal{B}_2)$. Из включения $B \in C_{\hat{\theta}_1}(\mathcal{B} | \mathcal{B}_1) \cap C_{\hat{\theta}_2}(\mathcal{B} | \mathcal{B}_2)$ следует, что B_1 состоит не более, чем из θ_1 компонент, а B_2 состоит не более, чем из θ_2 компонент. Поскольку каждая компонента принадлежит семейству $\mathcal{A}_2(I)$, она содержит не более двух элементов. Отсюда с учетом (41) вытекает, что $|B_i| \leq 2\theta_i \leq 4\alpha_i$ для $i \in \{1, 2\}$. Теперь из (31), (32) с $r = 2$ и $\nu = 1$ при достаточно больших x_2 получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}_B^{(2)}) &\leq \sum_{v \in B} \alpha^1(\mathcal{B}_{\{v\}}^{(2)}) = \sum_{v \in B} \sum_{j \geq 2} \alpha^1(\mathcal{B}_{\{v\}, [j]}^{(2)}) \\ &\leq \sum_{v \in B_1} \sum_{j \geq 2} \alpha^1(\mathcal{B}_{\{v\}, [j]}^{(2)}) + \sum_{v \in B_2} \sum_{j \geq 2} \alpha^1(\mathcal{B}_{\{v\}, [j]}^{(2)}) \\ &\leq |B_1| \sum_{j \geq 2} 8^j x_2^{2cj} 2^{-j(x_1 - \lambda - q/2)} + |B_2| \sum_{j \geq 2} 8^j x_2^{2cj} 2^{-j(x_2 - q/2)} \\ &\leq 4\alpha_1 2^{-2x_1 + 4c \log_2 x_2 + O(1)} + 4\alpha_2 2^{-2x_2 + 4c \log_2 x_2 + O(1)}. \end{aligned} \quad (42)$$

При достаточно больших x_2 из (42) и (39) вытекает (8) с $\gamma = 2^{-(3/2) \log_2^2 x_1}$.

Докажем выполнение условия (10) при $\zeta = 2 \cdot 2^{-x_2}$. Возьмем $j_0 = (1/(3cr)) \log_2 x_2$. В силу (32) и (33) при $\nu = 2$, $r = 2$, $\Delta = 2$

$$\begin{aligned} \alpha^2(\mathcal{B}^{(2)}) &= \sum_{j \geq 2} \alpha^2(\mathcal{B}_{[j]}^{(2)}) \leq \sum_{2 \leq j \leq j_0} 2^{-(2j-3)x_1 - (3/2) \log_2^2 x_1} \\ &\quad + \sum_{2 \leq j \leq j_0} 2^{-(2j-3)x_2 - (3/2) \log_2^2 x_1} + \sum_{j > j_0} 2^{-jx_1} + \sum_{j > j_0} 2^{-jx_2} \leq 2 \cdot 2^{x_2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Отсюда вытекает (10) с $\zeta = 2 \cdot 2^{-x_2}$.

Докажем выполнение условия (9) при $\xi = 2^{-(3/2) \log_2^2 x_1}$. С использованием (17) и (19) при $\Delta = 2$ получаем аналогично (39), (40), что

$$\begin{aligned} \alpha^3(\mathcal{B}) &= \sum_{B \in \mathcal{B}} f^3(B) = \sum_{B \in \mathcal{A}_2(I)} f^3(B) \\ &\leq |X_1| 2^{-3x_1} + |X_2| 2^{-3x_2} + |X| x_2^c 2^{-6x_2 + 3q} \\ &\leq 2^{-2 \log_2^2 x_1} + 2^{-\varepsilon} 2^{3(x_1 - x_2) - 2 \log_2^2 x_1} + x_2^c 2^{3x_1 - 6x_2 + 3q - 2 \log_2^2 x_1} \\ &\leq 2^{-(3/2) \log_2^2 x_1}. \end{aligned} \quad (44)$$

Отсюда следует (9) с $\xi = 2^{-(3/2) \log_2^2 x_1}$.

Докажем выполнение условия (24) с $\psi = 2x_2^c 2^{\varepsilon - x_2}$. В силу (19), если $x_2 \rightarrow \infty$, то $\psi = o(1)$. Оценим $\alpha^1(\mathcal{B}_2)$ снизу:

$$\alpha^1(\mathcal{B}_2) \geq \alpha^1(\mathcal{B}_{2, \{1\}}) = \sum_{v \in X_2} f(\{v\}) \geq |X_2| 2^{-\varepsilon} = |X| 2^{-x_1 - \varepsilon}. \quad (45)$$

При $A \in C_{\hat{\theta}_1}(\mathcal{B}|\mathcal{B}_1)$ при достаточно больших x_2 в силу (39), (43) и (45)

$$\begin{aligned}
 \alpha^1(\mathcal{B}_{2,A}) &\leq \sum_{v \in A} \alpha^1(\mathcal{B}_{2,\{v\}}) = \sum_{v \in A} \sum_{j \geq 1} \alpha^1(\mathcal{B}_{2,\{v\},[j]}) \\
 &\leq |A|(\kappa_2^c 2^{-x_2} + \kappa_2^{2c} 2^{-2x_2+q}) \\
 &\leq \alpha^1(\mathcal{B}_1)(\kappa_2^c 2^{-x_2} + \kappa_2^{2c} 2^{-2x_2+q}) \\
 &\leq |X_1|(2^{-x_1} + \kappa_2^c 2^{-2x_1+q+\lambda})(\kappa_2^c 2^{-x_2} + \kappa_2^{2c} 2^{-2x_2+q}) \\
 &\leq 2|X|\kappa_2^c 2^{-x_1-x_2} \leq 2\alpha^1(\mathcal{B}_2)\kappa_2^c 2^{\varepsilon-x_2}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Таким образом, условия теоремы 2 выполнены при указанных значениях параметров β , γ , ξ , ζ и ψ . Теперь из (25), (38), (42)–(44) и (46) вытекает (36), а значит, утверждение доказано при условии (37).

Пусть теперь

$$\alpha^1(\mathcal{B}_1) < x_2, \quad \alpha^1(\mathcal{B}_2) < x_2. \tag{47}$$

Покажем, что тогда выполнены условия теоремы 1 при соответствующих τ и δ , и (36) будет следовать из (6). Проверим сначала условие (4). Заметим, что в силу (18) и (47) при достаточно больших x_2

$$\begin{aligned}
 \alpha^1(\mathcal{B}_{[2]}^{(2)}) &= \sum_{\{u\} \in \mathcal{B}} f(\{u\}) \sum_{\{v\} \in \mathcal{B}: u \# v} f(\{v\}) \\
 &\leq \alpha^1(\mathcal{B})\kappa_2^c 2^{-x_2} \leq \kappa_2^{c+1} 2^{-x_2}.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Аналогично (48) с использованием (18), (20) получаем, что

$$\alpha^1(\mathcal{B}_{[3]}^{(2)}) \leq (2^q + 1)\kappa_2^{2c+1} 2^{-2x_2}. \tag{49}$$

Положим $j_0 = (1/(3cr)) \log_2 x_2$. Оценивая $\alpha^1(\mathcal{B}_{[j]}^{(2)})$ при $j > 3$ с помощью (32) и (33), с учетом (48) и (49) получаем, что

$$\begin{aligned}
 \alpha^1(\mathcal{B}^{(2)}) &= \sum_{j \geq 2} \alpha^1(\mathcal{B}_{[j]}^{(2)}) \leq \kappa_2^{c+1} 2^{-x_2} + (2^q + 1)\kappa_2^{2c+1} 2^{-2x_2} \\
 &\quad + \sum_{4 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-3)x_1 - (3/2) \log_2^2 x_1} + \sum_{4 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-3)x_2 - (3/2) \log_2^2 x_1} \\
 &\quad + \sum_{j > j_0} 2^{-jx_1/2} + \sum_{j > j_0} 2^{-jx_2/2} \leq \kappa_2^{c+1} 2^{1-x_2}.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Отсюда вытекает (4) с $\tau = \kappa_2^{c+1} 2^{1-x_2}$.

Проверим условие (5). Для любого $A \in \mathcal{A}_2(I)$ либо $A = \{u\}$ для некоторого u , и тогда в силу (18)

$$f(A) = f(\{u\}) \leq 2^{-x_2},$$

либо $A = \{u, v\}$, и тогда в силу (18) и (20) при достаточно больших x_2

$$f(A) \leq f(\{u\})f(\{v\})2^q \leq 2^{-2x_2+q} \leq 2^{-x_2}.$$

Поэтому

$$f^2(A) \leq f(A)2^{-\kappa_2}.$$

С учетом (47) получаем, что

$$\alpha^2(\mathcal{R}) = \sum_{A \in \mathcal{R}} f^2(A) \leq \alpha^1(\mathcal{R})2^{-\kappa_2} \leq \kappa_2 2^{-\kappa_2}.$$

Отсюда вытекает справедливость условия (5) с $\delta = \kappa_2 2^{-\kappa_2}$. В силу (6) с учетом (4) и (5) получаем, что

$$\begin{aligned} S(\mathcal{R}) &= (1 + O(\kappa_2^{c+1} 2^{-\kappa_2})) \exp\{\alpha^1(\mathcal{R})\} \\ &= (1 + O(\kappa_2^{c+1} 2^{-\kappa_2})) \exp\{\alpha^1(\mathcal{R}) - (1/2)\alpha^2(\mathcal{R}) - \alpha^1(\mathcal{R}^{(2)})\}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано при условии (47).

В случаях, когда

$$\alpha^1(\mathcal{R}_2) < \kappa_2 \leq \alpha^1(\mathcal{R}_1),$$

или

$$\alpha^1(\mathcal{R}_1) < \kappa_2 \leq \alpha^1(\mathcal{R}_2),$$

доказательство аналогично случаям (37) и (47).

Теорема доказана.

Для $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}(I)$ положим

$$\mu_2(\mathcal{R}) = \alpha^1(\mathcal{R}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathcal{R}) - \alpha^1(\mathcal{R}_{[2]}^{(2)}).$$

Следствие 5. Пусть $I = (X, f)$ является $(2, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_2(I)$. Тогда при достаточно больших κ_2

$$S(\mathcal{R}) = (1 + O(2^{-(3/2)\log_2^2 \kappa_1})) \exp\{\mu_2(\mathcal{R})\}. \quad (51)$$

Доказательство. В силу (32) и (33) с $r = 2$ и $\Delta = 2$ при достаточно больших κ_2

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{R}^{(2)}) - \alpha^1(\mathcal{R}_{[2]}^{(2)}) &= \sum_{j \geq 3} \alpha^1(\mathcal{R}_{[j]}^{(2)}) \leq \sum_{3 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-3)\kappa_1 - (3/2)\log_2^2 \kappa_1} \\ &+ \sum_{3 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-3)\kappa_2 - (3/2)\log_2^2 \kappa_1} + \sum_{j > j_0} 2^{-j\kappa_1/2} + \sum_{j > j_0} 2^{-j\kappa_2/2} \leq 2^{2-(3/2)\log_2^2 \kappa_1}. \end{aligned} \quad (52)$$

Теперь (51) следует из (34) и (52).

Следствие 6. Пусть $I = (X, f)$ является $(2, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, $r_0 = \lceil \kappa/(2q) \rceil$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_{\hat{r}_0}(I)$, $\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{A}_2(I)$.

Тогда при достаточно больших κ_2

$$S(\mathcal{R}) = (1 + O(2^{-(3/2)\log_2^2 \kappa_1})) \exp\{\mu_2(\widehat{\mathcal{R}})\}. \quad (53)$$

Утверждение вытекает из леммы 5 при $\Delta = 2$ и из (51).

4. Асимптотика числа антицепей в средних слоях трехзначной n -мерной решетки

В этом разделе рассматривается пример $(\Delta, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной пары.

Трехзначной n -мерной решеткой называется множество

$$E_3^n = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \{0, 1, 2\}, i = 1, \dots, n\}.$$

Будем говорить, что набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ не превосходит набор $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ (в этом случае пишем $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$), если $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называются сравнимыми, если либо $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, либо $\tilde{\beta} \leq \tilde{\alpha}$. Нормой набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из E_3^n называется величина

$$\|\tilde{\alpha}\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Подмножество множества E_3^n , состоящее из всех наборов с нормой i , называется i -м слоем и обозначается через $F(i, n, 3)$.

Обозначим $\Gamma^n = (X_n, Z_n; E_n)$ двудольный граф порожденный подмножествами X_n и Z_n , где

$$X_n = F(n-1, n, 3) \cup F(n+1, n, 3), \quad Z_n = F(n, n, 3), \\ E_n = \{\{u, v\} : u \in X_n, v \in Z_n, u, v \text{ сравнимы}\}.$$

Обозначим I_n функциональную пару (X_n, f_n) , порожденную графом $\Gamma^n = (X_n, Z_n; E_n)$, в которой для всякого $A \subseteq X_n$ полагаем $f_n(A) = 2^{-|\partial(A)|}$, где

$$\partial(A) = \{v \in Z_n : \exists u \in A, \{u, v\} \in E_n\}.$$

Расстоянием между вершинами u и v графа $\Gamma = (V; E)$ называется наименьшее число $\rho(u, v)$ ребер в цепи, соединяющей u и v . Множество A вершин графа Γ называется d -связным, если для любых двух $u, v \in A$ существует последовательность вершин $w_0, \dots, w_k$ из A такая, что $u = w_0, v = w_k$ и $\rho(w_{i-1}, w_i) \leq d$ для каждого $i = 1, \dots, k$.

Пусть $\Gamma = (V; E)$ — граф, $M \subseteq V$, d, a — натуральные числа. Обозначим $n_d(M, a)$ число всех d -связных множеств $A \subseteq V$ таких, что $|A| = a$ и $A \cap M \neq \emptyset$.

Лемма 6 ([5]). Пусть $\Gamma = (V; E)$ — граф, максимальная степень вершины в котором равна k , $M \subseteq V$. Тогда

$$n_d(M, a) \leq |M|(4k^d)^{a-1}. \quad (54)$$

Лемма 7. При достаточно больших n функциональная пара $I_n = (X_n, f_n)$ является $(2, \kappa_1^n, \kappa_2^n, \varepsilon^n, 2, 3, 1)$ -ординарной при $\kappa_1^n = 0,54n$, $\kappa_2^n = 0,5n$, $\varepsilon^n = 0,174n$.

Доказательство. Покажем, что условия (16)–(22) выполняются при указанных параметрах.

Степень вершины $v \in X_n$ равна $n - j$, где $j, 0 \leq j \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, — число двоек в наборе, если $v \in F(n-1, n, 3)$, и число нулей в наборе, если $v \in F(n+1, n, 3)$. Следовательно, минимальная степень вершины v в множестве X_n равна $0,5n$. Пусть $X_{n,1}$ — множество вершин, степень которых больше $0,54n$, а $X_{n,2}$ — множество вершин, степень

которых больше $0,5n$, но меньше $0,54n$, тогда $X_n = X_{n,1} \cup X_{n,2}$. Следовательно, условие (17) выполняется при $\kappa_1^n = 0,54n$, а условие (18) – при $\kappa_2^n = 0,5n$.

Проверим выполнение условия (16) при $\kappa_1^n = 0,54n$ и $\Delta = 2$. Из [1] следует, что при достаточно больших n

$$|X_n| = \frac{3^{n+1/2}}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{15}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \leq 3^n = 2^{n \log_2 3} \leq 2^{1,62n-2 \log_2^2(0,54n)}. \quad (55)$$

Отсюда вытекает справедливость (16).

Справедливость (21) при $\lambda = 1$ следует из того, что если $\{u, v\} \in E$, то, как нетрудно проверить,

$$||\partial(\{v\})| - |\partial(\{u\})|| \leq 1.$$

Убедимся в выполнении условия (20) при $q = 2$. Заметим, что в графе $\Gamma^n = (X_n, Z_n; E_n)$ для любых двух вершин $u \in X_n$ и $v \in X_n$ выполнено неравенство

$$|\partial(\{u\}) \cap \partial(\{v\})| \leq 2.$$

Отсюда вытекает, что для любого $A \subseteq X$ и $v \in A$ справедливо неравенство

$$|\partial(A \setminus \{v\}) \cap \partial(\{v\})| \leq \sum_{u \in A \setminus \{v\}} |\partial(\{u\}) \cap \partial(\{v\})| \leq 2(|A| - 1).$$

По формуле включения-исключения

$$|\partial(A)| \geq |\partial(A \setminus \{v\})| + |\partial(\{v\})| - 2(|A| - 1).$$

Из определения функционала f_n следует, что

$$f_n(A) \leq f_n(A \setminus \{v\}) f_n(\{v\}) 2^{2(|A|-1)}.$$

Таким образом неравенство (20) справедливо при $q = 2$.

Теперь убедимся, что при достаточно больших n свойство (22) выполнено при $\kappa_2^n = 0,5n$ и $c = 3$, то есть что для любого натурального m

$$|\mathcal{A}_{\{v\}, \widehat{m}}(I_n)| \leq (0,5n)^{3m}. \quad (56)$$

Заметим, что $B \in \mathcal{A}_{\{v\}}(I_n)$ означает, что существует элемент $u \in B$ такой, что $u \# v$ и что множество B является 2-связным. В свою очередь, $u \# v$ означает, что $\rho(u, v) \leq 2$. Для выбора множества $B \in \mathcal{A}_{\{v\}}(I_n)$ достаточно указать вершину $u \in X_n$ такую, что $\rho(u, v) \leq 2$, и 2-связное множество $B \subseteq F(n-1, n, 3) \cup F(n+1, n, 3)$ такое, что $u \in B$. Граф $\Gamma^n = (X_n, Z_n; E_n)$ удовлетворяет условиям леммы 6 с $k = n$. Пусть $M = \{u\}$. Поскольку $n \geq 32$, в силу (54)

$$n_d(M, a) \leq (4n^2)^{a-1} \leq (0,5n)^{3(a-1)}. \quad (57)$$

Для заданной вершины $v \in X_n$ вершину $u \in X_n$ можно выбрать не больше, чем $(n-j)n$ способами, где j – количество двоек, если $v \in F(n-1, n, 3)$, и j – количество нулей, если $v \in F(n+1, n, 3)$, $0 \leq j \leq (n-1)/2$. Следовательно, вершину u можно выбрать не больше, чем n^2 способами. Из сказанного с учетом (57) при достаточно больших n следует, что

$$|\mathcal{A}_{\{v\}, \widehat{m}}(I_n)| \leq n^2 \sum_{1 \leq a \leq m} (0,5n)^{3(a-1)} \leq (0,5n)^{3m}.$$

Неравенство (56), а тем самым и выполнение условия (22), доказано.

Наконец, убедимся в выполнении условия (19) при $\varepsilon^n = 0,174n$. Оценим мощность множества $X_{n,2}$. Заметим, что множество $X_{n,2}$ состоит из вершин множества $F(n-1, n, 3)$, количество двоек j в которых не меньше $n - \kappa_2^n = 0,46n$, и вершин множества $F(n+1, n, 3)$, количество нулей j в которых не меньше $0,46n$. Из [1] следует, что при $j \geq n/3$ количество a_j^n вершин с j двойками и количество вершин с j нулями равно

$$\frac{3^{n+3/2}}{2\pi n} \exp \left\{ -\frac{2}{3n} - \frac{15}{2n} \left(j - \frac{n}{3} \right)^2 \right\} \left(1 + o \left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

Таким образом,

$$|X_{n,2}| = \sum_{0,46n \leq j \leq 0,5n} a_j^n. \quad (58)$$

Известно (см. [6]), что при $x \rightarrow \infty$

$$1 - \Phi(x) = \int_x^\infty e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} \left(1 + O \left(\frac{1}{x^2} \right) \right). \quad (59)$$

Положим $x = j - n/3$, тогда из (58) и (59) следует, что

$$\begin{aligned} |X_{n,2}| &= 2 \frac{3^{n+3/2}}{2\pi n} \left(1 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right) \int_{0,46n}^{0,5n} e^{-15(j-n/3)^2/(2n)} dx \\ &= \frac{3^{n+3/2}}{\pi n} \left(1 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right) \int_{0,126n}^\infty e^{-15x^2/(2n)} dx \\ &= \frac{3^{n+3/2}}{\pi n} \frac{e^{-0,12n}}{\sqrt{2\pi}15 \cdot 0,126} \left(1 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

С использованием (55) получаем, что

$$\kappa_2^n > \log_2 \frac{|X_n|}{|X_{n,2}|} = 0,12n \log_2 e = 0,174n = \varepsilon^n \geq 3(0,54 - 0,5)n.$$

Неравенство (19) выполнено. Лемма доказана.

Из следствия 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $I = (X, f)$ является $(2, \kappa_1, \kappa_2, \varepsilon, q, c, \lambda)$ -ординарной функциональной парой, κ_2 достаточно велико, и пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\subseteq \mathcal{A}_2(I), \quad \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_2(I), \quad \mathcal{R} \cap \mathcal{D} = \emptyset, \\ \mathcal{E}_{[2]}^{(2)} &= \{F \in \mathcal{A}_{[2]}^{(2)}(I) : F = \{A, B\}, A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{D}\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S(\mathcal{R} \cup \mathcal{D}) &= (1 + O(2^{-(3/2) \log^2 \kappa_1})) \\ &\times \exp \left\{ \alpha^1(\mathcal{R}) + \alpha^1(\mathcal{D}) - \frac{1}{2} \alpha^2(\mathcal{R}) - \frac{1}{2} \alpha^2(\mathcal{D}) - \alpha^1(\mathcal{R}_{[2]}^{(2)}) - \alpha^1(\mathcal{D}_{[2]}^{(2)}) - \alpha^1(\mathcal{E}_{[2]}^{(2)}) \right\}. \quad (60) \end{aligned}$$

Теорема 7. Пусть $\{I_n = (X_n, f_n)\}$ – последовательность функциональных пар, порожденных графами $\Gamma^n = (X_n, Z_n; E_n)$, где

$$X_n = F(n-1, n, 3) \cup F(n+1, n, 3), \quad Z_n = F(n, n, 3),$$

и $f_n(A) = 2^{-|A|}$ для всякого $A \subseteq X_n$, и пусть

$$U_n = F(n-1, n, 3), \quad V_n = F(n+1, n, 3), \quad \mathcal{C}_n = \mathcal{A}_2(U_n) \cup \mathcal{A}_2(V_n),$$

где

$$\mathcal{A}_2(U_n) = \{B \subseteq U_n : B \in \mathcal{A}_2(I_n)\}, \quad \mathcal{A}_2(V_n) = \{B \subseteq V_n : B \in \mathcal{A}_2(I_n)\}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$S(\mathcal{C}_n) \sim \exp\{2\alpha^1(\mathcal{B}_{[1]}) + 2\alpha^1(\mathcal{B}_{[2]}) - \alpha^2(\mathcal{B}_{[1]}) - 2\alpha^1(\mathcal{B}_{[2]}^{(2)}) - \alpha^1(\mathcal{C}_{[2]}^{(2)})\}, \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}_{[1]}) &= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} 2^{-n+j}, \\ \alpha^2(\mathcal{B}_{[1]}) &= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} 2^{-2n+2j}, \\ \alpha^1(\mathcal{B}_{[2]}) &= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} \\ &\quad \times \left(\left(\frac{j(n-2j-1)}{2} + \frac{(j+1)(n-2j-1)}{2} \right) 2^{-2n+2j+2} \right. \\ &\quad \left. + (n-2j-1)(n-2j-2) 2^{-2n+2j+3} \right), \\ \alpha^1(\mathcal{B}_{[2]}^{(2)}) &= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} \\ &\quad \times \left(\left(\frac{j(n-2j-1)}{2} + \frac{(j+1)(n-2j-1)}{2} \right) 2^{-2n+2j} \right. \\ &\quad \left. + (n-2j-1)(n-2j-2) 2^{-2n+2j+1} \right), \\ \alpha^1(\mathcal{C}_{[2]}^{(2)}) &= \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j-1} \\ &\quad \times \left(\binom{n-2j-1}{2} 2^{-2n+2j+1} + \binom{n}{2} + \binom{j+1}{2} 2^{-2n+2j-1} \right. \\ &\quad \left. + (j+1)(n-2j-1) 2^{-2n+2j+1} + (j+1) 2^{-2n+2j} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 6 с $\mathcal{B} = \mathcal{A}_2(U_n)$ и $\mathcal{D} = \mathcal{A}_2(V_n)$. Известно (см. [1]), что при $0 \leq i \leq n$

$$|F(i, n, 3)| = \sum_{j=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-2j},$$

а при $n \leq i \leq 2n$

$$|F(i, n, 3)| = \sum_{j=i-n}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-2j},$$

где параметр j — число двоек в наборе с нормой i . Кроме того, если $v \in F(n-1, n, 3)$, то $f(\{v\}) = 2^{-(n-j)}$, а если $v \in F(n+1, n, 3)$, то $f(\{v\}) = 2^{-(n-j+1)}$.

Теперь нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{D}_{[1]}) &= \sum_{j=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j+1} 2^{-(n-j+1)}, \\ \alpha^2(\mathcal{D}_{[1]}) &= \sum_{j=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j+1} 2^{-2(n-j+1)}, \\ \alpha^1(\mathcal{D}_{[2]}) &= \sum_{j=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j+1} \\ &\quad \times \left(\left(\frac{(j-1)(n-2j+1)}{2} + \frac{j(n-2j+1)}{2} \right) 2^{-2(n-j+1)+2} \right. \\ &\quad \left. + (n-2j+1)(n-2j) 2^{-2n+2j+1} \right), \\ \alpha^1(\mathcal{D}_{[2]}^{(2)}) &= \sum_{j=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j+1} \\ &\quad \times \left(\left(\frac{(j-1)(n-2j+1)}{2} + \frac{j(n-2j+1)}{2} \right) 2^{-2(n-j+1)} \right. \\ &\quad \left. + (n-2j+1)(n-2j) 2^{-2n+2j-1} \right). \end{aligned}$$

Аналогичные формулы имеют место для $\mathfrak{B}$ и $\mathcal{E}_{[2]}^{(2)}$.

Теперь с использованием равенства

$$\binom{n}{j+1} \binom{n-j-1}{n-2(j+1)+1} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j+1}$$

получаем, что для $v, r, j \in \{1, 2\}$

$$\alpha^v(\mathfrak{B}_{[j]}^{(r)}) = \alpha^v(\mathcal{D}_{[j]}^{(r)}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим трехслойное частично упорядоченное множество

$$E_{3,n}^n = (F(n-1, n, 3), F(n, n, 3), F(n+1, n, 3)).$$

Положим, как и прежде,

$$X_n = F(n-1, n, 3) \cup F(n+1, n, 3), \quad Z_n = F(n, n, 3).$$

Пусть $f_n(A) = 2^{-|\partial(A)|}$ для всякого $A \subseteq X_n$ и $I_n = (X_n, f_n)$ — функциональная пара. Обозначим $\Psi(E_{3,n}^n)$ число антицепей в множестве $E_{3,n}^n$. Согласно [4]

$$\Psi(E_{3,n}^n) = 2^{|Z_n|} \sum_{B \in C(\mathcal{A}(I_n))} 2^{-|\partial(B)|} = 2^{|Z_n|} S(\mathcal{A}(I_n)). \quad (62)$$

Следствие 7. *Справедливо равенство*

$$\Psi(E_{3,n}^n) = 2^{|Z_n|} S(\mathcal{C}_n),$$

где

$$|Z_n| = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-2j}$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$S(\mathcal{C}_n) \sim \exp\{2\alpha^1(\mathcal{B}_{[1]}) + 2\alpha^1(\mathcal{B}_{[2]}) - \alpha^2(\mathcal{B}_{[1]}) - 2\alpha^1(\mathcal{B}_{[2]}^{(2)}) - \alpha^1(\mathcal{C}_{[2]}^{(2)})\}.$$

Утверждение вытекает из (62) и теоремы 7.

Список литературы

1. Андреева Т. В., О мощности слоев трехзначной n -мерной решетки. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* (2003) **43**, №10, 1560–1568.
2. Сапоженко А. А., О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах. *Дискретная математика* (1989) **1**, №1, 74–93.
3. Сапоженко А. А., О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах. *Дискретная математика* (1989) **1**, №2, 110–128.
4. Сапоженко А. А., Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. *Матем. вопросы киберн.* (2000) **9**, 161–220.
5. Сапоженко А. А., О числе связных подмножеств с заданной мощностью границы в двудольных графах. *Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач* (1987) **45**, 42–70.
6. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1. Наука, Москва, 1967.

Статья поступила 22.04.2003.