Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, Разложимые ветвящиеся процессы с двумя типами частиц, *Дискрет. матем.*, 2018, том 30, выпуск 1, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:01:42

Разложимые ветвящиеся процессы с двумя типами частиц

© 2018 г. В. А. Ватутин*, Е. Е. Дьяконова**

Рассматривается критический разложимый ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с двумя типами частиц, в котором частицы первого типа производят в конце жизни как потомков первого типа, так и потомков второго типа, а частицы второго типа порождают в момент гибели лишь потомков своего типа.

В предположении, что распределение числа потомков у частицы каждого типа может иметь бесконечную дисперсию, найдена асимптотика хвоста распределения случайной величины Ξ_2 – совокупного числа частиц второго типа, появившихся в процессе до момента его вырождения. Доказаны предельные теоремы, описывающие (при $N \rightarrow \infty$) условное распределение числа частиц первого типа в различных поколениях, как при условии $\Xi_2 = N$, так и при условии $\Xi_2 > N$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Ключевые слова: разложимый ветвящийся процесс, совокупный размер популяции, предельная теорема

1. Введение

Рассмотрим ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с двумя типами частиц, в котором частицы первого типа производят в конце жизни как потомков первого типа, так и потомков второго типа, а частицы второго типа порождают в момент гибели лишь потомков своего типа.

Обозначим $Z_1(n)$ и $Z_2(n)$ числа частиц, соответственно, первого и второго типов в n -м поколении рассматриваемого ветвящегося процесса, и введем вектор $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), Z_2(n))$, $n \geq 0$. В дальнейшем (если не оговорено иное) мы будем предполагать, что $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_1 := (1, 0)$.

Процесс $\mathbf{Z}(n)$ принадлежит классу так называемых разложимых ветвящихся процессов, исследованием которых занимались многие авторы. Причину интереса к

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: vatutin@mi.ras.ru

**Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: elena@mi.ras.ru

изучению таких процессов легко объяснить: при анализе их свойств удалось обнаружить ряд новых интересных явлений, не имеющих аналогов для неразложимых ветвящихся процессов. Это касается как разнообразия в асимптотическом поведении вероятностей невырождения критических и докритических процессов ([13], [14]), так и появления новых классов условных предельных теорем для критических процессов ([9], [11], [12], [15], [23]).

В последнее время был обнаружен целый ряд принципиально новых свойств, присущих только разложимым критическим процессам. Например, в [4], [5] был описан эффект фазового перехода для редуцированных разложимых критических процессов Гальтона–Ватсона с конечными дисперсиями чисел потомков всех типов при условии невырождения этих процессов к далекому моменту N . Эти результаты были дополнены в статье [21], где при условии невырождения разложимых процессов с двумя типами частиц к далекому моменту N было изучено асимптотическое поведение распределения числа частиц редуцированных процессов в ситуации, когда дисперсии чисел потомков частиц могут быть бесконечными.

В работах [7], [8] наличие фазовых переходов было обнаружено для разложимых критических процессов Гальтона–Ватсона с конечными дисперсиями чисел потомков всех типов в схеме серий когда моменты вырождения таких процессов фиксированы, но стремятся к бесконечности.

Вместо условия невырождения процесса к данному моменту N или условия вырождения процесса точно в момент N в ряде статей рассматривались распределения разложимых процессов при условии, что фиксированы значения случайных величин

$$\Xi_i(n) := \sum_{j=0}^n Z_i(j), \quad \Xi_i := \sum_{j=0}^{\infty} Z_i(j)$$

– общего числа частиц типа i , появившихся в процессе за n поколений, и совокупного числа частиц типа i , появившихся в процессе до момента вырождения, соответственно.

Так, в [1, 2] изучались разложимые ветвящиеся процессы с двумя типами частиц в ситуации, когда дисперсии чисел потомков частиц конечны. В указанных статьях были исследованы распределения процессов $\{Z_1(t\sqrt{N}), 0 \leq t < \infty\}$ и $\{\Xi_2(tN), 0 \leq t < \infty\}$ при условии $\Xi_1 = N \rightarrow \infty$, а также найдено предельное распределение случайной величины Ξ_1 при условии $\Xi_2 > N \rightarrow \infty$. В статье [3] (снова в случае конечности дисперсий чисел потомков частиц каждого типа) была установлена функциональная предельная теорема для процесса $\{Z_1(t\sqrt[4]{N}), 0 \leq t < \infty\}$ при условии $\Xi_2 > N \rightarrow \infty$.

В [6] от предположения о конечности дисперсий чисел потомков частиц удалось отказаться, и была доказана функциональная предельная теорема для процесса $\{\Xi_2(tN), 0 \leq t < \infty\}$ при условии $\Xi_1 = N \rightarrow \infty$.

В данной работе, дополняющей [1], [2] и [6], мы исследуем распределение числа частиц первого типа в разложимом ветвящемся процессе с двумя типами частиц и с (возможно) бесконечными дисперсиями чисел потомков при различных условиях, накладываемых на величину Ξ_2 .

Для формулировки основных результатов работы нам понадобится ряд обозначений.

Введем производящие функции чисел непосредственных потомков одной частицы первого и второго типов соответственно: для $s_1, s_2 \in [0, 1]$ положим

$$f_1(s_1, s_2) := \mathbf{E} \left[s_1^{\xi_{11}} s_2^{\xi_{12}} \right], \quad f_2(s_1, s_2) = f_2(s_2) := \mathbf{E} \left[s_2^{\xi_{22}} \right],$$

где ξ_{ij} – число непосредственных потомков типа j у частицы типа i .

В дальнейшем предполагается, что выполнены следующие условия:

1) $\xi_{11} = \xi_{12}$ и, таким образом, $f_1(s_1, s_2) := \mathbf{E} \left[(s_1 s_2)^{\xi_{11}} \right] = f(s_1 s_2)$ для некоторой производящей функции $f(s)$,

2) распределение целочисленной неотрицательной случайной величины ξ_{11} имеет единичный шаг, причем

$$\mathbf{E} \xi_{11} = 1, \quad f_1(s_1, 1) = f(s_1) = s_1 + (1 - s_1)^{1+\alpha_1} L_1(1 - s_1), \quad (1)$$

3) распределение целочисленной неотрицательной случайной величины ξ_{22} имеет единичный шаг, причем

$$\mathbf{E} \xi_{22} = 1, \quad f_2(s) = s + (1 - s)^{1+\alpha_2} L_2(1 - s). \quad (2)$$

При этом в условиях (1) и (2) параметры $\alpha_1 \in (0, 1], \alpha_2 \in (0, 1)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} < \alpha_2, \quad (3)$$

а функции $L_i(x), i = 1, 2$, медленно меняются при $x \downarrow 0$.

Пусть $\{\xi_{11}^{(i)}, i \geq 1\}, \{\xi_{22}^{(i)}, i \geq 1\}$ – последовательности независимых вероятностных копий случайных величин ξ_{11} и ξ_{22} соответственно. Для $i = 1, 2$ положим

$$S_0^{(i)} = 0, \quad S_n^{(i)} := \sum_{k=1}^n \xi_{ii}^{(k)} - n = \sum_{k=1}^n (\xi_{ii}^{(k)} - 1).$$

Известно (см., например, [24]), что при выполнении условий (1) и (2) найдутся такие монотонно возрастающие последовательности положительных чисел

$$a_n = n^{\frac{1}{1+\alpha_1}} l_1(n), \quad b_n = n^{\frac{1}{1+\alpha_2}} l_2(n), \quad n \geq 1, \quad (4)$$

где функции $l_i(n), i = 1, 2$, медленно меняются при $n \rightarrow \infty$, что распределения случайных величин $S_n^{(1)}/a_n$ и $S_n^{(2)}/b_n$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к устойчивым распределениям с параметрами $1 + \alpha_1$ и $1 + \alpha_2$ и плотностями $g_1(x)$ и $g_2(x)$ соответственно.

Положим

$$R := \int_0^\infty \frac{1}{y^{1/(1+\alpha_1)}} g_2(-y) dy, \quad (5)$$

$$C_1 := \frac{1}{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) R}, \quad C_2 = C_2(\alpha_2) := \frac{1}{(1 + \alpha_2) \Gamma(1 - \alpha_2)}, \quad (6)$$

где $\Gamma(n)$ – стандартная гамма-функция, и $C_3 := R^{-1}$.

Пусть

$$\{Y_2(w), w \in [0, +\infty)\} \quad (7)$$

– ветвящийся процесс с непрерывным множеством состояний и п.н. непрерывными траекториями, преобразование Лапласа которого в момент $w \in [0, \infty)$ имеет вид

$$\mathbf{E} \left[e^{-\lambda Y_2(w)} \right] = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{(1 + w\lambda^{\alpha_2})^{1/\alpha_2}} \right\}, \quad \lambda \geq 0. \quad (8)$$

Введем случайную величину $\mathcal{Y}_\infty$, распределение которой описывается соотношением

$$\mathbf{P}(\mathcal{Y}_\infty \leq x) = \mathbf{P} \left(\int_0^\infty Y_2(v) dv \leq x \right).$$

Напомним, что нормированной экскурсией Леви

$$\mathcal{V} = \{V(s), 0 \leq s \leq 1\}$$

с начальным условием $V(0) = 0$ называется предел по распределению при $\epsilon \rightarrow 0$ устойчивого процесса Леви, рассматриваемого при условии, что его инфимум на $[0, 1]$ больше $-\epsilon$, а значение при $s = 1$ меньше ϵ (см. также [18] или гл. VIII.4 в монографии [20]).

С нормированной экскурсией Леви можно связать так называемый процесс кумулятивного профиля высоты $\mathcal{S} := \{S(y), y \geq 0\}$, задаваемый соотношением

$$S(y) := \sup \left\{ z \leq 1 : \int_0^z \frac{dt}{V(t)} \leq y \right\}.$$

Известно [18], что процессу $\mathcal{S}$ соответствует процесс $\mathcal{U} := \{U(t), t \geq 0\}$ с почти наверное непрерывными справа траекториями, который определяется равенством

$$S(y) = \int_0^y U(t) dt, \quad y \geq 0. \quad (9)$$

Основными результатами данной работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены условия 1)–3), то для любых $t > 0$ и $x > 0$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x \mid \Xi_2 > N \right) = C_1 \int_0^\infty \frac{B(t; x, y)}{y^{1+1/(1+\alpha_1)}} dy, \quad (10)$$

где

$$B(t; x, y) := \mathbf{P} \left(U \left(\frac{t}{y^{\alpha_1/(1+\alpha_1)}} \right) \leq \frac{x}{y^{1/(1+\alpha_1)}} \right) \mathbf{P} \left(\mathcal{Y}_\infty > \frac{\alpha_2}{C_2 y^{1+\alpha_2}} \right). \quad (11)$$

Замечание 1. Полагая чисто формально в (11) $C_2 = C_2(1) = 1$ и требуя конечность дисперсий случайных величин ξ_{11} и ξ_{22} , мы получим в правой части (10) предельное распределение, совпадающее с пределом $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([t\sqrt{N}])}{\sqrt[4]{N}} \leq x \mid \Xi_2 > N \right)$, найденным в работе [3].

Теорема 2. Если выполнены условия 1)–3), то для любых $t > 0$ и $x > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x \mid \Xi_2 = N \right) = C_3 \int_0^\infty \frac{H(t; x, y)}{y^{1/(1+\alpha_1)}} dy, \quad (12)$$

где

$$H(t; x, y) := \mathbf{P} \left(U \left(\frac{t}{y^{\alpha_1/(1+\alpha_1)}} \right) \leq \frac{x}{y^{1/(1+\alpha_1)}} \right) g_2(-y).$$

2. Вспомогательные результаты

Известно (см., например, [16]), что если выполнено условие (2), то

$$Q_2(n) := \mathbf{P}(Z_2(n) > 0 | \mathbf{Z}(0) = (0, 1)) = \frac{1}{n^{1/\alpha_2} L_3(n)}, \quad (13)$$

где функция $L_3(n)$ медленно меняется при $n \rightarrow \infty$.

Для $x \geq 1$ введем функцию

$$G(x) = \frac{1}{Q_2(n)} + (x - n) \left(\frac{1}{Q_2(n+1)} - \frac{1}{Q_2(n)} \right), n \leq x < n+1, \quad (14)$$

и $h(y) = G^{-1}(y)$ – функция, обратная к $G(x)$. Нам понадобится следующее утверждение, явно связывающее $h(n)$ с асимптотическими свойствами производящей функции $f_2(s)$ при $s \uparrow 1$.

Лемма 1. Если выполнено условие (2), то при $n \rightarrow \infty$

$$h(n) \sim \frac{n^{\alpha_2}}{\alpha_2 L_2(1/n)}.$$

Доказательство. Известно (см. [16]), что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{Q_2^{\alpha_2}(n) L_2(Q_2(n))} \sim \alpha_2 n. \quad (15)$$

Положим

$$N = G(n) = \left\lfloor \frac{1}{Q_2(n)} \right\rfloor.$$

Тогда

$$n = G^{-1}(G(n)) = G^{-1}(N) = h(N).$$

Из (15) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{N^{\alpha_2}}{L_2(1/N)} \sim \alpha_2 h(N).$$

Лемма доказана.

Нетрудно проверить, что если выполнено условие (2) и $\alpha_2 < 1$, то при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\xi_{22} > x) \sim C_2 \frac{1}{x^{1+\alpha_2}} L_2(1/x) \sim \frac{C_2}{\alpha_2 x h(x)}, \quad (16)$$

где C_2 – константа из (6), а $L_2(x)$ – та же медленно меняющаяся при $x \downarrow 0$ функция, что и в (2). Более того, в качестве нормирующей последовательности $\{b_n, n \geq 1\}$, обеспечивающей сходимость последовательности $\{S_n^{(2)}/b_n, n \geq 1\}$ к устойчивому закону, можно выбрать последовательность, задаваемую равенствами

$$b_n := \min \left\{ k : \mathbf{P}(\xi_{22} > k) \leq \frac{1}{n} \right\}, \quad n \geq 1. \quad (17)$$

Из (17), учитывая соотношение (16), получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{b_N^{1+\alpha_2}}{L_2(1/b_N) C_2} \sim \frac{\alpha_2 b_N h(b_N)}{C_2} \sim N. \quad (18)$$

Лемма 2. *Случайная величина Ξ_2 и процесс $\{Z_1(k), k \geq 0\}$, рассматриваемые при условии $\Xi_1 = N$, независимы.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых значений $s_1, s_2, \dots, s_N$ и s , принадлежащих интервалу $[0, 1]$, справедливо равенство

$$\mathbf{E} \left[s^{\Xi_2} \prod_{k=1}^N s_k^{Z_1(k)} | \Xi_1 = N \right] = \mathbf{E} [s^{\Xi_2} | \Xi_1 = N] \mathbf{E} \left[\prod_{k=1}^N s_k^{Z_1(k)} | \Xi_1 = N \right]. \quad (19)$$

Обозначим $F(s) = \mathbf{E}[s^\eta]$, $s \in [0, 1]$, производящую функцию совокупного числа $\eta = Z_2(0) + Z_2(1) + \dots$ частиц второго типа, существовавших в ветвящемся процессе за время его эволюции, в предположении, что процесс стартовал в нулевой момент времени с одной частицы второго типа. Пусть $\theta(k)$, $k \geq 1$, – число частиц второго типа в исходном ветвящемся процессе, которые являются непосредственными потомками частиц первого типа $(k-1)$ -го поколения. В силу наших допущений $\theta(k) = Z_1(k)$ при всех $k \geq 1$. Для i -й частицы второго типа, принадлежащей k -му поколению ($i = 1, \dots, \theta(k)$), обозначим через $\eta_i(k)$ совокупное число частиц второго типа, существовавших в ветвящемся подпроцессе, порожденном именно этой частицей, до момента его вырождения. Заметим, что случайные величины $\eta_i(k)$, рассматриваемые при всевозможных i, k , независимы в совокупности и распределены так же, как и случайная величина η . Предполагая, что $z_1 + z_2 + \dots + z_N = N - 1$, введем событие

$$A_{z_1, \dots, z_N} := \{Z_1(1) = z_1, \dots, Z_1(N) = z_N\} = \{\theta(1) = z_1, \dots, \theta(N) = z_N\}.$$

Учитывая, что при $\Xi_1 = N$ справедливо равенство

$$\Xi_2 = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{\theta(k)} \eta_i(k),$$

несложно понять, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[s^{\Xi_2} | A_{z_1, \dots, z_N}, \Xi_1 = N \right] &= \mathbf{E} \left[\prod_{k=1}^N s^{\sum_{i=1}^{\theta(k)} \eta_i(k)} | A_{z_1, \dots, z_N}, \Xi_1 = N \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\prod_{k=1}^N F^{\theta(k)}(s) | A_{z_1, \dots, z_N}, \Xi_1 = N \right] = F^{N-1}(s). \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[s^{\Xi_2} \prod_{k=1}^N s_k^{Z_1(k)} | \Xi_1 = N \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left[s^{\Xi_2} \prod_{k=1}^N s_k^{Z_1(k)} | Z_1(1) = z_1, \dots, Z_1(N) = z_N; \Xi_1 = N \right] \right] \\ &= F^{N-1}(s) \mathbf{E} \left[\prod_{k=1}^N s_k^{Z_1(k)} | \Xi_1 = N \right]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Напомним, что согласно локальной теореме Гнеденко (см. §50 гл. IX в [10], стр. 252)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_k \left| a_n \mathbf{P} \left(S_n^{(1)} = k \right) - g_1 \left(\frac{k}{a_n} \right) \right| = 0, \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_k \left| b_n \mathbf{P} \left(S_n^{(2)} = k \right) - g_2 \left(\frac{k}{b_n} \right) \right| = 0. \quad (22)$$

Нам понадобится следующий результат, являющийся переформулировкой теоремы 1 работы [6] применительно к нашим условиям.

Лемма 3 ([6]). *Если выполнены условия 1)–3), то при $N \rightarrow \infty$*

$$\mathcal{L} \left(\frac{\Xi_2([wh(N)])}{Nh(N)}, 0 \leq w < \infty \mid \Xi_1 = N \right) \Longrightarrow \mathcal{L} \left(\int_0^w Y_2(v) dv, 0 \leq w < \infty \right),$$

где символ $\Longrightarrow$ означает слабую сходимость в функциональном пространстве $D[0, +\infty)$, оснащенном топологией Скорохода.

Для $t \geq 0$ положим

$$U^{(n)}(t) := \frac{Z_1([nt/a_n])}{a_n}.$$

Мы дополним лемму 3 важным утверждением, заимствованным из [18].

Лемма 4 ([18], теорема 1). *Если распределение случайной величины ξ_{11} является арифметическим с единичным шагом и выполнено условие (1), то при $N \rightarrow \infty$*

$$\mathcal{L} \left(U^{(n)}(t), t \geq 0 \mid \Xi_1 = N \right) \Longrightarrow \mathcal{L} (U(t), t \geq 0),$$

где процесс $\{U(t), t \geq 0\}$ задан соотношением (9).

Следующая лемма является ключевой для дальнейших выкладок. При ее доказательстве мы будем обозначать через $K_1, K_2, \dots$ положительные константы, не обязательно совпадающие в разных формулах.

Лемма 5. *Если выполнены условия 1)–3), то при $N \rightarrow \infty$*

$$\mathbf{P}(\Xi_2 = N) \sim g_1(0) \frac{R}{Na_{b_N}}, \quad (23)$$

$$\mathbf{P}(\Xi_2 > N) \sim g_1(0) \frac{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)R}{a_{b_N}}, \quad (24)$$

где величина R та же, что и в (5).

Доказательство. Для $j = 1, 2$ положим

$$\zeta_{ij} = \xi_{jj}^{(i)} - 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Заметим, что $\mathbf{E}\zeta_{ij} = 0$. Из теоремы Гнеденко (21) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta_{11} + \dots + \zeta_{N1} = -T) = \frac{1}{a_N} g_1\left(\frac{-T}{a_N}\right) + o\left(\frac{1}{a_N}\right).$$

Согласно лемме 3 §1 гл. II в [19]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Xi_1 = N) &= \frac{1}{N} \mathbf{P}(\xi_{11}^{(1)} + \dots + \xi_{11}^{(N)} = N - 1) \\ &= \frac{1}{N} \mathbf{P}(\zeta_{11} + \dots + \zeta_{N1} = -1). \end{aligned}$$

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\Xi_1 = N) \sim \frac{1}{N} g_1\left(\frac{-1}{a_N}\right) \frac{1}{a_N} \sim \frac{1}{Na_N} g_1(0). \quad (25)$$

Исследуем теперь асимптотическое поведение вероятности события $\{\Xi_2 = N\}$ при $N \rightarrow \infty$. Зафиксируем числа $C > \varepsilon > 0$ и запишем представление

$$\mathbf{P}(\Xi_2 = N) = P_1(N; \varepsilon) + P_2(N; \varepsilon, C) + P_3(N; C), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(N; \varepsilon) &:= \mathbf{P}(\Xi_2 = N, \Xi_1 < \varepsilon b_N), \\ P_2(N; \varepsilon, C) &:= \sum_{M=\varepsilon b_N}^{Cb_N} \mathbf{P}(\Xi_2 = N, \Xi_1 = M), \\ P_3(N; C) &:= \mathbf{P}(\Xi_2 = N, \Xi_1 > Cb_N). \end{aligned}$$

(Здесь и далее величины типа εb_N и Cb_N интерпретируются как $[\varepsilon b_N]$ и $[Cb_N]$.)

Оценим сначала первое слагаемое

$$P_1(N; \varepsilon) = \sum_{M < \varepsilon b_N} \mathbf{P}(\Xi_2 = N | \Xi_1 = M) \mathbf{P}(\Xi_1 = M).$$

Обозначим Ξ_{12} число частиц второго типа, появившихся в процессе до момента его вырождения и являющихся потомками первого типа. В силу наших условий $\Xi_{12} = \Xi_1$. Ясно, что Ξ_2 является совокупным числом частиц второго типа, существовавших в ветвящемся процессе, порожденным Ξ_{12} первоначальными частицами второго типа. Согласно упоминавшейся лемме 3 §1 гл. II в [19]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Xi_2 = N | \Xi_{12} = M) &= \frac{M}{N} \mathbf{P}(\xi_{22}^{(1)} + \dots + \xi_{22}^{(N)} = N - M) \\ &= \frac{M}{N} \mathbf{P}(\zeta_{12} + \dots + \zeta_{N2} = -M). \end{aligned}$$

Из теоремы Гнеденко (22) следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta_{12} + \dots + \zeta_{N2} = -M) = \frac{1}{b_N} g_2 \left(\frac{-M}{b_N} \right) + o \left(\frac{1}{b_N} \right). \quad (27)$$

Это, в частности, означает, что существует такая константа K_1 , что при всех M и N

$$\mathbf{P}(\Xi_2 = N | \Xi_1 = M) \leq M \frac{K_1}{N b_N}. \quad (28)$$

Соотношения (25) и (28) и свойства правильно меняющихся функций приводят к оценке

$$\begin{aligned} P_1(N; \varepsilon) &\leq K_2 \frac{1}{N b_N} \sum_{M \leq \varepsilon b_N} \frac{1}{a_M} \sim K_3 \frac{1}{N b_N} \frac{\varepsilon b_N}{a_{\varepsilon b_N}} \\ &\sim K_3 \frac{\varepsilon}{N a_{b_N} \varepsilon^{1/(1+\alpha_1)}} = K_3 \frac{\varepsilon^{\alpha_1/(1+\alpha_1)}}{N a_{b_N}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} N a_{b_N} P_1(N; \varepsilon) \leq K_3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha_1/(1+\alpha_1)} = 0. \quad (30)$$

Оценим теперь величину $P_3(N; C)$. В силу (25) и монотонного возрастания элементов последовательности $\{a_n, n \geq 1\}$ имеем

$$\begin{aligned} P_3(N; C) &= \frac{1}{N} \sum_{M > C b_N} \mathbf{P}(\zeta_{12} + \dots + \zeta_{N2} = -M) \mathbf{P}(\zeta_{11} + \dots + \zeta_{M1} = -1) \\ &\leq \frac{K_1}{N} \sum_{M > C b_N} \frac{\mathbf{P}(\zeta_{12} + \dots + \zeta_{N2} = -M)}{a_M} \\ &\leq \frac{K_1}{N a_{C b_N}} \mathbf{P}(\zeta_{12} + \dots + \zeta_{N2} \geq C b_N) \leq \frac{K_1}{N a_{C b_N}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда, из (4) и свойств правильно меняющихся функций следует, что

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} N a_{b_N} P_3(N; C) \leq K_1 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_{b_N}}{a_{C b_N}} = K_1 C^{-1/(1+\alpha_1)}$$

и, таким образом,

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} N a_{b_N} P_3(N; C) = 0. \quad (32)$$

Для завершения доказательства леммы осталось найти асимптотическое представление для величины

$$P_2(N; \varepsilon, C) = \sum_{M=\varepsilon b_N}^{Cb_N} \mathbf{P}(\Xi_2 = N \mid \Xi_1 = M) \mathbf{P}(\Xi_1 = M). \quad (33)$$

Обращаясь к соотношению (22), заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Xi_2 = N \mid \Xi_1 = M) &= \mathbf{P}(\Xi_2 = N \mid \Xi_{12} = M) \\ &= \frac{M}{N} \mathbf{P}(S_N^{(2)} = -M) = \frac{M}{Nb_N} \left(g_2 \left(-\frac{M}{b_N} \right) + \delta(M, N) \right), \end{aligned}$$

где $\delta(M, N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно по $M \in [\varepsilon b_N, Cb_N]$.

Из равенства (33), учитывая соотношение (25), получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P_2(N; \varepsilon, C) &\sim \sum_{M=\varepsilon b_N}^{Cb_N} \frac{1}{M} g_1(0) \frac{1}{a_M} \frac{M}{N} g_2 \left(-\frac{M}{b_N} \right) \frac{1}{b_N} \\ &= g_1(0) \frac{1}{N} \sum_{M=\varepsilon b_N}^{Cb_N} \frac{1}{a_M} g_2 \left(-\frac{M}{b_N} \right) \frac{1}{b_N}. \end{aligned}$$

В силу (4) и свойств правильно меняющихся функций

$$a_{b_N}/a_{yb_N} \rightarrow y^{-1/(1+\alpha_1)}$$

при $N \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in [\varepsilon, C]$. Отсюда, сделав замену $M = [yb_N]$ и воспользовавшись непрерывностью функции $g_2(y)$, $y \in (-\infty, \infty)$, нетрудно вывести, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_{b_N} \sum_{M=\varepsilon b_N}^{Cb_N} \frac{1}{a_M} g_2 \left(-\frac{M}{b_N} \right) \frac{1}{b_N} = \int_{\varepsilon}^C \frac{1}{y^{1/(1+\alpha_1)}} g_2(-y) dy.$$

Следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N a_{b_N} P_2(N; \varepsilon, C) = \int_{\varepsilon}^C \frac{1}{y^{1/(1+\alpha_1)}} g_2(-y) dy. \quad (34)$$

Так как $g_2(y)$ является плотностью распределения устойчивого закона, то (см., например, [22]) существует такая константа K_2 , что

$$\sup_{y \in (-\infty, \infty)} g_2(y) \leq K_2.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{y^{1/(1+\alpha_1)}} g_2(-y) dy \leq K_2 \int_0^1 \frac{1}{y^{1/(1+\alpha_1)}} dy + \int_1^{\infty} g_2(-y) dy < \infty.$$

Объединяя (26), (30), (32) и (34) и переходя к пределу сначала при $C \rightarrow \infty$, а затем при $\varepsilon \rightarrow 0$, заключаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\Xi_2 = N) \sim \frac{g_1(0)}{N} \frac{1}{a_{b_N}} \int_0^\infty \frac{1}{y^{1/(1+\alpha_1)}} g_2(-y) dy.$$

Справедливость (23) доказана. В силу соотношений (4) и свойств медленно меняющихся функций из (23) следует (24). Лемма доказана.

Замечание 2. Из (29), (31) и свойств правильно меняющихся функций нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Xi_2 > N, \Xi_1 < \varepsilon b_N) &\leq K_1 \frac{\varepsilon^{\alpha_1/(1+\alpha_1)}}{a_{b_N}}, \\ \mathbf{P}(\Xi_2 > N, \Xi_1 > C b_N) &\leq \frac{K_2}{a_{C b_N}}, \end{aligned}$$

что в сочетании с (24) позволяет утверждать, что

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\Xi_2 > N, \Xi_1 \notin [\varepsilon b_N, C b_N])}{\mathbf{P}(\Xi_2 > N)} = 0. \quad (35)$$

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем числа $x > 0$ и $C > \varepsilon > 0$ и воспользуемся представлением

$$\mathbf{P}\left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 > N\right) = P_1(N; \varepsilon, C) + P_2(N; \varepsilon, C), \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(N; \varepsilon, C) &:= \mathbf{P}\left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 > N, \Xi_1 \notin [\varepsilon b_N, C b_N]\right), \\ P_2(N; \varepsilon, C) &:= \mathbf{P}\left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 > N, \Xi_1 \in [\varepsilon b_N, C b_N]\right). \end{aligned}$$

В силу (35)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{C \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{P_1(N; \varepsilon, C)}{\mathbf{P}(\Xi_2 > N)} = 0, \quad (37)$$

в связи с чем интерес представляет лишь второе слагаемое в правой части (36), которое, ввиду леммы 2, можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{M=\varepsilon b_N}^{C b_N} \mathbf{P}\left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 > N \mid \Xi_1 = M\right) \mathbf{P}(\Xi_1 = M) \\ &= \sum_{M=\varepsilon b_N}^{C b_N} \mathbf{P}\left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x \mid \Xi_1 = M\right) \\ &\quad \times \mathbf{P}(\Xi_2 > N \mid \Xi_1 = M) \mathbf{P}(\Xi_1 = M). \end{aligned}$$

Зафиксируем число $y \in [\varepsilon, C]$ и положим $M = [yb_N]$. Из леммы 4 и соотношений в (4) после несложных преобразований следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x \mid \Xi_1 = [yb_N] \right) \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{Z_1 \left(\left[t \frac{M}{y} \frac{y^{1/(1+\alpha_1)}}{a_M} \right] \right)}{a_M y^{-1/(1+\alpha_1)}} \leq x \mid \Xi_1 = M \right) \\ = \mathbf{P} \left(U \left(\frac{t}{y^{\alpha_1/(1+\alpha_1)}} \right) \leq \frac{x}{y^{1/(1+\alpha_1)}} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

для всех x и y , для которых правая часть в (38) непрерывна.

Найдем теперь для $M = [yb_N]$ асимптотику условной вероятности

$$\mathbf{P}(\Xi_2 > N \mid \Xi_1 = M)$$

при $N \rightarrow \infty$.

Из леммы 3 вытекает, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\Xi_2}{Mh(M)} \geq x \mid \Xi_1 = M \right) = \mathbf{P}(\mathcal{Y}_\infty \geq x).$$

Отсюда и из (18) следует, что для $y \in [\varepsilon, C]$ и $M = [yb_N]$

$$\mathbf{P}(\Xi_2 > N \mid \Xi_1 = M) = \mathbf{P} \left(\Xi_2 > \frac{\alpha_2 b_N h(b_N)(1+o(1))}{C_2} \mid \Xi_1 = M \right). \quad (39)$$

Из соотношения (39) и лемм 1 и 3 нетрудно вывести, что если $M = [yb_N]$ и $y \in [\varepsilon, C]$, то при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(\frac{\Xi_2}{Mh(M)} > \frac{\alpha_2}{y_2^{1+\alpha_2} C_2} \mid \Xi_1 = M \right) \sim \mathbf{P} \left(\mathcal{Y}_\infty > \frac{\alpha_2}{C_2 y^{1+\alpha_2}} \right) \quad (40)$$

для всех y , для которых правая часть в (40) непрерывна. Следовательно, для почти всех $y \in [\varepsilon, C]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Xi_2 > N \mid \Xi_1 = M) = \mathbf{P} \left(\mathcal{Y}_\infty > \frac{\alpha_2}{C_2 y^{1+\alpha_2}} \right). \quad (41)$$

Положим

$$\Phi(M, N) := \frac{\mathbf{P}(\Xi_1 = M)}{\mathbf{P}(\Xi_2 > N)}.$$

Заметим теперь, что из соотношений (24), (25) и свойств правильно меняющихся функций следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\Phi(M, N) \sim \frac{C_1}{b_N y^{1+1/(1+\alpha_1)}} =: \frac{\phi(y)}{b_N} \quad (42)$$

равномерно по $M = [yb_N]$, $y \in [\varepsilon, C]$, где C_1 – та же константа, что и в (6). Объединяя (38), (41) и (42) и используя теорему о мажорируемой сходимости, заключаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \sum_{M=\varepsilon b_N}^{Cb_N} \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 > N, \Xi_1 = M \right) \frac{1}{\mathbf{P}(\Xi_2 > N)} \\ & \sim \int_{\varepsilon}^C \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x \mid \Xi_1 = [yb_N] \right) \mathbf{P}(\Xi_2 > N \mid \Xi_1 = [yb_N]) \Phi([yb_N], N) dy \\ & \sim \int_{\varepsilon}^C \mathbf{P} \left(U \left(\frac{t}{y^{\alpha_1/(1+\alpha_1)}} \right) \leq \frac{x}{y^{1/(1+\alpha_1)}} \right) \mathbf{P} \left(\mathcal{Y}_{\infty} > \frac{\alpha_2}{C_2 y^{1+\alpha_2}} \right) \phi(y) dy. \end{aligned} \quad (43)$$

Из соотношений (36), (37) и (43), переходя в последнем из них к пределу сначала при $C \rightarrow \infty$, а потом при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 > N \right) \frac{1}{\mathbf{P}(\Xi_2 > N)} = C_1 \int_0^{\infty} \frac{B(t; x, y)}{y^{1+1/(1+\alpha_1)}} dy.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, для фиксированных чисел $x > 0$ и $C > \varepsilon > 0$ имеем

$$\mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 = N \right) = \mathcal{P}_1(N; \varepsilon, C) + \mathcal{P}_2(N; \varepsilon, C), \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(N; \varepsilon, C) &:= \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 = N, \Xi_1 \notin [\varepsilon b_N, Cb_N] \right), \\ \mathcal{P}_2(N; \varepsilon, C) &:= \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 = N, \Xi_1 \in [\varepsilon b_N, Cb_N] \right). \end{aligned}$$

В силу (30) и (32)

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{P}_1(N; \varepsilon, C)}{\mathbf{P}(\Xi_2 = N)} = 0. \quad (45)$$

Рассмотрим теперь величину

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_2(N; \varepsilon, C) \\ &= \sum_{M=\varepsilon b_N}^{Cb_N} \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 = N \mid \Xi_1 = M \right) \mathbf{P}(\Xi_1 = M) \\ &= \sum_{M=\varepsilon b_N}^{Cb_N} \mathbf{P} \left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x \mid \Xi_1 = M \right) \times \mathbf{P}(\Xi_2 = N \mid \Xi_1 = M) \mathbf{P}(\Xi_1 = M), \end{aligned}$$

где для оправдания знака равенства мы воспользовались леммой 2.

Из теоремы Гнеденко (22), учитывая свойства правильно меняющихся функций, получаем, что при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\Xi_2 = N | \Xi_1 = [yb_N]) \sim \frac{yb_N}{Nb_N} g_2\left(\frac{-yb_N}{b_N}\right) \sim \frac{y}{N} g_2(-y). \quad (46)$$

равномерно по $y \in [\varepsilon, C]$. Кроме того, в силу асимптотического представления (25) при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\Xi_1 = M) \sim \frac{1}{yb_N} g_1(0) \frac{1}{y^{1/(1+\alpha_1)} a_{b_N}} \sim \frac{g_1(0)}{y^{1+1/(1+\alpha_1)}} \frac{1}{b_N a_{b_N}}$$

равномерно по $M = [yb_N]$, $y \in [\varepsilon, C]$.

Отсюда и из леммы 5 следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}(\Xi_1 = M)}{\mathbf{P}(\Xi_2 = N)} &\sim \frac{g_1(0)}{y^{1+1/(1+\alpha_1)}} \frac{1}{b_N a_{b_N}} \frac{N a_{b_N}}{g_1(0) R} \\ &\sim \frac{1}{y^{1+1/(1+\alpha_1)}} \frac{N}{b_N} \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (47)$$

равномерно по $M = [yb_N]$, $y \in [\varepsilon, C]$. Объединяя соотношения (38), (46) и (47) и обращаясь к теореме о мажорируемой сходимости, выводим, что при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\sum_{M=\varepsilon b_N}^{Cb_N} \mathbf{P}\left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 = N, \Xi_1 = M\right) \frac{1}{\mathbf{P}(\Xi_2 = N)} \\ &\sim \int_{\varepsilon b_N}^{Cb_N} \mathbf{P}\left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 = N, \Xi_1 = [yb_N]\right) \frac{dy}{\mathbf{P}(\Xi_2 = N)} \\ &\sim C_3 \int_{\varepsilon}^C \mathbf{P}\left(U\left(\frac{t}{y^{\alpha_1/(1+\alpha_1)}}\right) \leq \frac{x}{y^{1/(1+\alpha_1)}}\right) \frac{g_2(-y)}{y^{1/(1+\alpha_1)}} dy. \end{aligned} \quad (48)$$

Из соотношений (44), (45) и (48), переходя в последнем к пределу сначала при $C \rightarrow \infty$, а потом при $\varepsilon \rightarrow 0$, нетрудно заключить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z_1([tb_N/a_{b_N}])}{a_{b_N}} \leq x, \Xi_2 = N\right) \frac{1}{\mathbf{P}(\Xi_2 = N)} = C_3 \int_0^{\infty} \frac{H(t; x, y)}{y^{1/(1+\alpha_1)}} dy.$$

Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению изложения полученных результатов.

Список литературы

1. Афанасьев В. И., “Функциональные предельные теоремы для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц”, *Дискретная математика*, **27**:2 (2015), 22–44; англ. пер.: Afanasyev V. I., “Functional limit theorems for the decomposable branching process with two types of particles”, *Discrete Math. Appl.*, **26**:2 (2016), 71–88.
2. Афанасьев В. И., “О разложимом ветвящемся процессе с двумя типами частиц”, *Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, МАИК Москва*, **294** (2016), 7–19; англ. пер.: Afanasyev V. I., “On a decomposable branching process with two types of particles”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **294** (2016), 1–12.
3. Афанасьев В. И., “Функциональная предельная теорема для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц”, *Матем. заметки*, **103**:3 (2018), 323–335; англ. пер.: Afanasyev V. I., “Functional limit theorem for a decomposable branching process with two types of particles”, in print, *Math. Notes*, **103**:3 (2018).
4. Ватутин В. А., “Структура разложимых редуцированных ветвящихся процессов. I. Конечномерные распределения”, *Теория вероятн. и ее применен.*, **59**:4 (2014), 667–692; англ. пер.: Vatutin V. A., “The structure of decomposable reduced branching processes. I. Finite-dimensional distributions”, *Theory Probab. Appl.*, **59**:4 (2015), 641–662.
5. Ватутин В. А., “Структура разложимых редуцированных ветвящихся процессов. II. Функциональные предельные теоремы”, *Теория вероятн. и ее применен.*, **60**:1 (2015), 25–44; англ. пер.: Vatutin V. A., “The structure of decomposable reduced branching processes. II. Functional limit theorems”, *Theory Probab. Appl.*, **60**:1 (2016), 103–119.
6. Ватутин В. А., “Условная функциональная предельная теорема для разложимых ветвящихся процессов с двумя типами частиц”, *Матем. заметки*, **101**:5 (2017), 669–683; англ. пер.: Vatutin V. A., “A conditional functional limit theorem for decomposable branching processes with two types of particles”, *Math. Notes*, **101**:5 (2017), 778–789.
7. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., “Разложимые ветвящиеся процессы с фиксированным моментом вырождения”, *Современные проблемы математики, механики и математической физики, Сборник статей, Тр. МИАН, МАИК, Москва*, **290** (2015), 114–135; англ. пер.: Vatutin V. A., D'yakonova E. E., “Decomposable branching processes with a fixed extinction moment”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **290** (2015), 103–124.
8. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., “О вырождении разложимых ветвящихся процессов”, *Дискретная математика*, **28**:4 (2015), 26–37; англ. пер.: Vatutin V. A., Dyakonova E. E., “Extinction of decomposable branching processes”, *Discrete Math. Appl.*, **26**:3 (2016), 183–192.
9. Ватутин В. А., Сагитов С. М., “Разложимый критический ветвящийся процесс с двумя типами частиц”, *Вероятностные задачи дискретной математики, Тр. МИАН СССР*, **177** (1986), 3–20; англ. пер.: Vatutin V. A., Sagitov S. M., “A decomposable critical branching process with two types of particles”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **177** (1988), 1–19.
10. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Гос. из-во технико-теоретической литературы, Москва, Ленинград, 1949; англ. пер.: Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N., *Limit distributions for sums of independent random variables*, Addison-Wesley, Reading, London, 1954.
11. Foster J., Ney P., “Decomposable critical multi-type branching processes”, Invited paper for Mahalanobis Memorial symposium (Calcutta), *Sanhya: the Indian J. Stat., Series A*, **38** (1976), 28–37.
12. Foster J., Ney P., “Limit laws for decomposable critical branching processes”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **46** (1978), 13–43.
13. Ogura Y., “Asymptotic behavior of multitype Galton-Watson processes”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **15** (1975), 251–302.

14. Савин А. А., Чистяков В. П., “Некоторые теоремы для ветвящихся процессов с несколькими типами частиц”, *Теория вероятн. и ее применен.*, **7**:1 (1962), 95–104; англ. пер.: Savin A.A., Chistyakov V.P., “Some limit theorems for branching processes with several types of particles”, *Theory Probab. Appl.*, **7**:1 (1962), 93–100.
15. Сагитов С. М., “Многомерные предельные теоремы для ветвящегося процесса с одним типом частиц”, *Матем. заметки*, **42**:1 (1987), 157–165; англ. пер.: Sagitov S. M., “Multidimensional limit theorems for a branching process with a single type of particles”, *Math. Notes*, **42**:1 (1987), 597–602.
16. Slack R. S., “A branching process with mean one and possibly infinite variance”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **9**:2 (1968), 139–145.
17. Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*, Наука, Москва, 1985; пер. с англ.: Seneta E., *Regularly Varying Functions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
18. Kersting G., “On the height profile of a conditioned Galton-Watson tree”, arXiv:1101.3656 [math.PR], 2011, 24 pages.
19. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*, Наука, Москва, 1984; англ. пер.: Kolchin V. F., *Random Mappings*, Optimization Software, Inc., Publication Division, 1986.
20. Bertoin J., *Levy Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
21. Smadi C., Vatutin V. A., “Reduced two-type decomposable critical branching processes with possibly infinite variance”, *Markov Process. Related Fields*, **22**:2 (2016), 311–358.
22. Золотарев В. М., *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва, 1983; англ. пер.: Zolotarev V. M., *One-dimensional Stable Distributions*, Transl. of Math. Monographs, vol. 65, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.
23. Зубков А. М., “Предельное поведение разложимых критических ветвящихся процессов с двумя типами частиц”, *Теория вероятн. и ее применен.*, **27**:2 (1982), 228–238; англ. пер.: Zubkov A. M., “The limit behaviour of decomposable critical branching processes with two types of particles”, *Theory Probab. Appl.*, **27**:2 (1983), 235–237.
24. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, Москва, 1984; англ. пер.: Feller W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol II*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1971.

Статья поступила 20.10.2017.