Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Козлов, О вероятностях больших уклонений статистики Шеппа, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 1, 140–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:40:50

О вероятностях больших уклонений статистики Шеппа

© 2004 г. А. М. Козлов

Для статистики Шеппа, равной максимуму колебаний случайного блуждания $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ в окне ширины L , когда это окно перемещается в пределах отрезка $[1, 2L]$, получена асимптотика при $L \rightarrow \infty$ вероятности больших уклонений $\mathbf{P}(W_{L,L} \geq \theta L)$, где θ — постоянная. Предполагается, что $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нерешетчатым распределением, удовлетворяющим правостороннему условию Крамера. Показано, что асимптотика имеет вид $H_\theta L \mathbf{P}(S_L \geq \theta L)$, где H_θ — зависящая от θ постоянная, $0 < H_\theta < 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-0100-649.

Классическая теория больших уклонений для сумм

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

независимых одинаково распределенных случайных величин при выполнении (правостороннего) условия Крамера [1, 2]

$$R(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} dF(x) < \infty, \quad 0 \leq h < b \leq \infty, \quad F(x) = \mathbf{P}(\xi_1 \leq x), \quad (1)$$

была распространена в работах [3–5] на статистику Эрдеша–Реньи

$$T_{n,m} = \max_{1 \leq k \leq n} \eta_{k,m}, \quad \eta_{k,l} = \sum_{i=k}^{k+l-1} \xi_i.$$

Исследовался также вопрос о больших уклонениях для статистики Шеппа

$$W_{n,m} = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq l \leq m} \eta_{k,l}$$

в случае стандартного гауссовского распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$. В [3–5] так же, как и в настоящей статье, используется так называемый метод двойных сумм, в

котором известные результаты о больших уклонениях сумм S_n совмещены с методологией, развитой в теории экстремумов гауссовских процессов и полей [6]. В настоящей работе при $L \rightarrow \infty$ получена асимптотика

$$\mathbf{P}(W_{L,L} \geq \theta L) \sim \sqrt{L/2\pi} (H_\theta / (h_\theta \sigma(h_\theta))) e^{-\Lambda(\theta)L}, \quad (2)$$

где распределение вероятностей случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ предполагается нерешетчатым и использованы обозначения теории больших уклонений сумм S_n при выполнении условия Крамера (1). Здесь и далее

$$m(h) = R'(h)/R(h), \quad \sigma^2(h) = m'(h) > 0, \quad a = \lim_{h \rightarrow b-} m(h),$$

h_θ — единственный корень уравнения $m(h) = \theta$, $0 < \theta < a$, H_θ — зависящая от θ постоянная, $0 < H_\theta < 1$,

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta) &= h_\theta \theta - \ln R(h_\theta), \quad 0 < \theta < a, \\ \pi(L; \theta) &= (\sqrt{2\pi L} h_\theta \sigma(h_\theta))^{-1} e^{-\Lambda(\theta)L}. \end{aligned}$$

Асимптотика вероятностей больших уклонений при $L \rightarrow \infty$ имеет в случае нерешетчатого распределения F вид [1]

$$\mathbf{P}(S_L \geq \theta L) = \pi(L; \theta)(1 + o(1)).$$

В [8] получено неравенство (см. также (41) в [5])

$$\mathbf{P}(S_L \geq \theta L, S_{L+r} - S_r \geq \theta L) \geq 2q_\theta^r P(S_L \geq \theta L), \quad 1 \leq r \leq L,$$

при некотором $0 < q_\theta < 1$. Нам потребуется следующее его обобщение.

Лемма 1. Пусть α, β, γ — некоторые натуральные числа, $\alpha + \beta \leq L$, $\beta + \gamma \leq L$. Тогда для некоторого $0 < p_\theta < 1$

$$\mathbf{P}(S_{\alpha+\beta} \geq \theta L, S_{\alpha+\beta+\gamma} - S_\alpha \geq \theta L) \leq c p_\theta^{L-\beta} \mathbf{P}(S_L \geq \theta L), \quad (3)$$

где c — постоянная.

Теорема 1. Пусть ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых выполнено условие Крамера (1) и $\mathbf{M}\xi_1 = 0$. Тогда в случае нерешетчатого распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ при $L \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(W_{L,L} \geq \theta L) \sim H_\theta L \pi(L; \theta) \quad (4)$$

равномерно по θ , $0 < \varepsilon \leq \theta \leq a - \varepsilon$.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 при $L \rightarrow \infty$ равномерно по θ в указанных там пределах

$$\mathbf{P}(W_{N,L} \geq \theta L) \sim H_\theta N \pi(L; \theta) \quad (5)$$

при N , стремящихся к бесконечности таким образом, что правая часть в (5) стремится к нулю, то есть при $N = o(\sqrt{L} e^{\Lambda(\theta)L})$ при $L \rightarrow \infty$.

Замечание 1. В решетчатом случае в (4), (5) добавляется множитель d_θ .

Доказательство теоремы 1. Разобьем целочисленный квадрат $[1, L] \times [1, L]$ на квадраты размера $n \times n$ и положим

$$\Delta_{ij}^{(n)} = ((i-1)n, in] \times (L-jn, L-(j-1)n], \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

где нумерация по переменному j выбрана с той целью, чтобы значению $j = 1$ отвечали наибольшие дисперсии поля (η_{kl}) . Будем полагать при доказательстве число L/n целым, поскольку областями разбиения, соответствующими крайнему значению $j = [L/n] + 1$ можно пренебречь. Положим

$$A_{ij}^{(n)} = \{ \max_{k,l \in \Delta_{ij}^{(n)}} \eta_{kl} \geq \theta L \}, \quad C'_{Ln} = \bigcup_{i=1}^{L/n} A_{i1}^{(n)}, \quad C''_{Ln} = \bigcup_{i=1}^{L/n} \bigcup_{j=2}^{L/n} A_{ij}^{(n)},$$

так что $\{W_{L,L} \geq \theta L\} = C'_{Ln} \cup C''_{Ln}$. В основе доказательства теоремы лежат неравенства

$$\sum_i \mathbf{P}(A_{i1}^{(n)}) + \mathbf{P}(C''_{Ln}) \geq \mathbf{P}(W_{L,L} \geq \theta L) \geq \sum_i \mathbf{P}(A_{i1}^{(n)}) - \sum_{i < j} \mathbf{P}(A_{i1}^{(n)} A_{j1}^{(n)}). \quad (6)$$

Представим случайные величины $\eta_{k,l}$ при $(k, l) \in \Delta_{11}^{(n)}$ (то есть при $1 \leq k \leq n$, $L-n+1 \leq l \leq L$) в виде

$$\begin{aligned} \eta_{k,l} &= \eta_{k,n-k+1} + \eta_{n+1,L-2n} + \eta_{L-n+1,k+l-L+n-1} \\ &\stackrel{d}{=} \eta_{k,n+r} + \eta_{k+n+r,L-2n}, \quad r = l - L + n, \quad 1 \leq r \leq n. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим

$$G_n(y) = \mathbf{P}(\max_{1 \leq k, r \leq n} \eta_{k,n+r} \leq y), \quad \bar{G}_n(y) = 1 - G_n(y)$$

и представим вероятность $\mathbf{P}(A_{11}^{(n)})$ в виде

$$\mathbf{P}(A_{11}^{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(S_{L-2n} \geq \theta L - y) dG_n(y). \quad (8)$$

Предполагая, что n фиксировано, а L стремится к бесконечности, найдем асимптотику вероятности (8). Разобьем действительную прямую на промежутки $(-\infty, -L^{1/3})$, $[-L^{1/3}, L^{1/3}]$ и $(L^{1/3}, \infty)$ и обозначим $I_1^{(n)}$, $I_2^{(n)}$, $I_3^{(n)}$ интегралы (8) по соответствующим промежуткам. Применением техники работы [5] показывается, что при $L \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} I_2^{(n)} &\sim H_\theta^{(n)} R(h_\theta)^{-2n} \mathbf{P}(S_L \geq \theta L), \\ I_1^{(n)} + I_3^{(n)} &= o(I_2^{(n)}), \\ H_\theta^{(n)} &= \mathbf{M} \exp\{h_\theta \max_{1 \leq r, k \leq n} \eta_{k,n+r}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{h_\theta y} dG_n(y). \end{aligned}$$

Таким образом, при $L \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(A_{11}^{(n)}) \sim \mathbf{P}(S_L \geq \theta L) H_\theta^{(n)} R(h_\theta)^{-2n}. \quad (9)$$

Для оценивания вероятностей $\mathbf{P}(A_{1j}^{(n)})$, $j \geq 2$, используется тот же подход, что и выше в случае $j = 1$. При $(k, l) \in \Delta_{1j}^{(n)}$, $j \geq 2$, представление (7) заменяется следующим:

$$\eta_{k,l} \stackrel{d}{=} \eta_{k,n+r} + \eta_{k+n+r, L-(j+1)n}, \quad r = l - L + jn, \quad (10)$$

где ввиду того, что $L - jn < l \leq L - (j-1)n$, справедливы неравенства $1 \leq r \leq n$. В результате вместо (8) получаем равенство

$$\mathbf{P}(A_{1j}^{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(S_{L-(j+1)n} \geq \theta L - y) dG_n(y). \quad (11)$$

Окончательная оценка приобретает вид

$$\mathbf{P}(C_{L,n}'') \leq \sum_{j=2}^{L/n} \mathbf{P}(A_{1j}^{(n)}) \leq c_{\theta} (L/n) \mathbf{P}(S_L \geq \theta L) H_{\theta}^{(n)} R(h_{\theta})^{-3n}. \quad (12)$$

Займемся оценкой вероятности

$$\mathbf{P}(A_{11}^{(n)} A_{21}^{(n)}) \leq \sum_{(k,l) \in \Delta_1^{(n)}, (r,s) \in \Delta_2^{(n)}} \mathbf{P}(\eta_{k,l} \geq \theta L, \eta_{r,s} \geq \theta L). \quad (13)$$

Очевидно, что общий член суммы (13) есть функция переменных $\alpha = r - k$, $\beta = \min(k+l, r+s) - r$, $\gamma = r + s - k - l$. Мы обозначим ее $\rho(\alpha, \beta, \gamma)$. Таким образом, правую часть неравенства (13) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=n+1}^{2n} \sum_{l=L-n+1}^L \sum_{s=L-n+1}^L \rho(\alpha, \beta, \gamma). \quad (14)$$

В (14) просуммируем отдельно слагаемые, для которых имеет место неравенство $r + s \leq k + l$, и обозначим эту сумму для краткости Σ_1 ; сумму (14), взятую по дополнительной области $r + s > k + l$, обозначим через Σ_2 . Члены суммы Σ_1 оценим следующим образом:

$$\mathbf{P}(\eta_{k,l} \geq \theta L, \eta_{r,s} \geq \theta L) \leq \mathbf{P}(\eta_{r,s} \geq \theta L) \leq c'_{\theta} \mathbf{P}(S_L \geq \theta L) R(h_{\theta})^{s-L}, \quad (15)$$

где c'_{θ} — зависящая от θ постоянная. Воспользуемся представлением

$$L - s = (n - k) + (r - n) + (L - l) + (k + l - r - s)$$

и заметим, что все четыре слагаемых в круглых скобках в рассматриваемом случае неотрицательны. Поэтому

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=n+1}^{2n} \sum_{l=L-n+1}^L \sum_{s=L-n+1}^L R(h_{\theta})^{-(L-s)} \mathbf{I}\{r + s \leq k + l\} \leq (1 - R(h_{\theta})^{-1})^{-4}, \quad (16)$$

здесь $\mathbf{I}\{\cdot\}$ обозначает индикатор множества в фигурных скобках. Из (15), (16) заключаем, что

$$\Sigma_1 \leq c'_{\theta} \mathbf{P}(S_L \geq \theta L) (1 - R(h_{\theta})^{-1})^{-4}.$$

Члены суммы Σ_2 оценим с помощью неравенства (3)

$$\rho(\alpha, \beta, \gamma) \leq c p_\theta^{L-\beta} \mathbf{P}(S_L \geq \theta L), \quad 0 < p_\theta < 1,$$

где c — постоянная. Выделим в Σ_2 слагаемые, удовлетворяющие условию $\gamma \leq \alpha$, и обозначим их сумму через Σ'_2 ; сумму слагаемых с условием $\gamma > \alpha$ обозначим через Σ''_2 . В случае $\gamma \leq \alpha$, $r + s - k - l \leq r - k$, $s \leq l$ воспользуемся представлением

$$L - \beta = L - (k + l - r) = (L - l) + (r - k)$$

и заметив, что $\mathbf{I}\{r + s > k + l, s \leq l\} = \mathbf{I}\{l - (r - k) < s \leq l\}$, получим, что

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=n+1}^{2n} p_\theta^{r-k} \sum_{l=L-n+1}^L p_\theta^{L-l} \sum_{s=L-n+1}^L \mathbf{I}\{r + s > k + l, s \leq l\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_\theta^i \sum_{i=0}^{\infty} p_\theta^i = c''_\theta. \quad (17)$$

Таким образом,

$$\Sigma_2 \leq c c''_\theta \mathbf{P}(S_L \geq \theta L).$$

Случай $\gamma > \alpha$ почти симметричен случаю $\gamma \leq \alpha$, отличие состоит лишь в незначительном изменении области суммирования в соответствующем выражении типа (17). В итоге получим, что

$$\mathbf{P}(A_{11}^{(n)} A_{21}^{(n)}) \leq \Sigma_1 + \Sigma'_2 + \Sigma''_2 \leq \hat{c}_\theta \mathbf{P}(S_L \geq \theta L), \quad (18)$$

где $\hat{c}_\theta$ — зависящая от θ постоянная.

Оценивание вероятностей $\mathbf{P}(A_{11}^{(n)} A_{m1}^{(n)})$, $m > 2$, проводится по той же схеме, что и при $m = 2$. В итоге получаем, что

$$\mathbf{P}(A_{11}^{(n)} A_{m1}^{(n)}) \leq \tilde{c}_\theta \mathbf{P}(S_L \geq \theta L) \hat{p}_\theta^{(m-2)n}, \quad 0 < \hat{p}_\theta < 1, \quad j > 2, \quad (19)$$

где $\tilde{c}_\theta$ — зависящая от θ постоянная. Суммируя оценки (18), (19), получаем, что

$$\sum_{1 \leq i < m \leq L/n} \mathbf{P}(A_{i1}^{(n)} A_{m1}^{(n)}) \leq b_\theta \mathbf{P}(S_L \geq \theta L) \sum_{1 \leq i < m \leq L/n} \hat{p}_\theta^{(m-i-1)n} \leq b'_\theta \frac{L}{n} \pi(L; \theta), \quad (20)$$

где b_θ, b'_θ — зависящие от θ постоянные.

Неравенство (6) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{L}{n} \mathbf{P}(A_{11}^{(n)}) + \frac{L}{n} \sum_{j=2}^{L/n} \mathbf{P}(A_{1j}^{(n)}) &\geq \mathbf{P}(W_{L,L} \geq \theta L) \\ &\geq \frac{L}{n} \mathbf{P}(A_{11}^{(n)}) - \sum_{1 \leq i < m \leq L/n} \mathbf{P}(A_{i1}^{(n)} A_{m1}^{(n)}). \end{aligned} \quad (21)$$

Остается подставить в (21) оценки (9), (12), (20) и провести рассуждения, которые для данной области являются стандартными (см. [3, 5, 6]).

Автор приносит глубокую благодарность В. И. Питербаргу, под руководством которого выполнена эта работа.

Список литературы

1. Петров В. В., О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) **10**, 310–322.
2. Bahadur R. R., Ranga Rao R., On deviations of the sample mean. *Ann. Math. Statist.* (1960) **31**, №4, 1015–1027.
3. Питербарг В. И., О больших скачках случайного блуждания. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №1, 50–62.
4. Довгалюк В. В., Питербарг В. И., Большие отклонения траекторий пуассоновского процесса. В кн.: *Вероятностные процессы и их приложения*. МИЭМ, Москва, 1989, с. 112–117.
5. Питербарг В. И., Козлов А. М., О больших скачках случайного блуждания. *Теория вероятностей и ее применения* (2002) **47**, №4, 803–814.
6. Питербарг В. И., *Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей*. Изд-во МГУ, Москва, 1988.
7. Козлов М. В., О частичных суммах Эрдеша–Реньи: большие отклонения, условное поведение. *Теория вероятностей и ее применения* (2001) **46**, №4, 678–696.
8. Deheuvels P., Devroye L., Limit laws of Erdős–Rényi–Shepp type. *Ann. Probab.* (1987) **15**, №4, 1363–1386.

Статья поступила 20.01.2004.