Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Гонсалес, Е. Коусело, В. Т. Марков, А. А. Нечаев, Групповые коды и их неассоциативные обобщения, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 1, 146–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:34:17

Групповые коды и их неассоциативные обобщения

© 2004 г. С. Гонсалес, Е. Коусело, В. Т. Марков, А. А. Нечаев

Дается полное описание (с использованием компьютера) наилучших параметров линейных кодов, соответствующих левым идеалам луповых алгебр $F_q L$ при $q \in \{2, 3, 4, 5\}$ и $|L| \leq 7$, а также групповых алгебр $F_q G$ для групп G порядка $|G| \leq 12$. Мы выделяем линейно оптимальные коды, коды, удовлетворяющие условию Варшавова–Гилберта, а также коды, для которых достигается граница Плоткина. Результаты дают основание предположить, что исследование кодов, построенных с помощью неассоциативных и некоммутативных неполупростых алгебр может открыть новые возможности и заслуживает дальнейшего развития.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты 99-01-00382 и 99-01-00941, и грантами НШ-1910.2003.1 и НШ-2358.2003.9 Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ.

В. Т. Марков и А. А. Нечаев благодарят Университет Овьедо за гостеприимство.

1. Введение

В данной статье продолжают наши исследования кодов, построенных с помощью неассоциативных и некоммутативных алгебраических структур. В первой серии результатов этого направления (см. [1–5]) были описаны различные классы рекурсивных кодов с законами рекурсии, основанными на свойствах m -квазигрупп для $m \geq 2$.

Другой естественный подход состоит в изучении кодов, построенных с помощью левых идеалов луповых колец $A = RL$, где R — конечное кольцо, а L — конечная группа.

Пусть

$$L = \{g_1, \dots, g_n\}$$

— конечная лупа порядка n , R — конечное кольцо, $|R| = q$. Рассмотрим луповое кольцо $A = RL$ и левый идеал $I \leq {}_A A$ кольца A . Тогда множество $\mathcal{H} = \mathcal{H}(I)$ всех слов $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in R^n$ таких, что $\sum_{i=1}^n r_i g_i \in I$, является левым линейным n -кодом над кольцом R , который мы будем называть луповым кодом или L -кодом. Ясно, что $\mathcal{H}$ — подмодуль модуля ${}_R R^n$, и если $C = |\mathcal{H}|$, то $C \leq q^n$.

Каждый элемент $\mathbf{r} \in \mathcal{H}$ называется кодовым словом. Для любых двух кодовых слов $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $\mathbf{r}' = (r'_1, \dots, r'_n)$ вес Хемминга $w_H(\mathbf{r})$ и расстояние Хемминга $d(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ определяются равенствами

$$w_H(\mathbf{r}) = |\{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : r_i \neq 0\}|,$$

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = w_H(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Расстояние Хемминга кода $\mathcal{K}$ определяется как число

$$d = d(\mathcal{K}) = \min\{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\},$$

и ввиду линейности кода, разумеется, удовлетворяет равенству

$$d = \min\{w_H(\mathbf{r}) : \mathbf{r} \in \mathcal{K} \setminus 0\}.$$

Говорят, что $\mathcal{K}$ является $(n, C, d)_q$ -кодом или, эквивалентно, $[n, k, d]_q$ -кодом, где $k = \log_q C$ — комбинаторная размерность кода $\mathcal{K}$. Иногда, для краткости, мы будем отождествлять кодовое слово $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{K}(I)$ с соответствующим элементом $\sum_{i=1}^n r_i g_i \in I$ и говорить, что луповой код содержится в соответствующем луповом кольце.

Известно много фактов о G -кодах этого типа, когда $R = \mathbb{F}_q$ — конечное поле, $(n, q) = 1$ и G — абелева, и в особенности циклическая, группа (классические циклические коды, см. [8, 7]). В [11–13] приведены некоторые результаты о групповых кодах неабелевых групп, главным образом при условии $(n, q) = 1$ полупростоты группового кольца $\mathbb{F}_q G$.

Первым шагом в исследовании луповых кодов может быть вычисление параметров всевозможных кодов вида $\mathcal{K} = \mathcal{K}(I)$ для всех левых идеалов I луповых алгебр FG маленьких порядков и поиск наилучших кодов среди них.

Здесь приводятся результаты вычислений параметров кодов $\mathcal{K}(I)$, где I пробегает множество левых идеалов луповых алгебр FL для полей $\mathbb{F} \in \{\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5\}$ и для всех луп L порядков $4, \dots, 7$. Отдельно мы определяем параметры групповых кодов для групп диэдра $\mathcal{D}_m, m = 4, 5, 6$; группы кватернионов Q_8 ; знакопеременной группы A_4 и всех абелевых групп тех же порядков.

Мы обращаем особое внимание на хорошие коды, то есть коды, параметры которых приближаются к параметрам лучших кодов в следующих смыслах: МДР-коды, линейно оптимальные коды, коды, лежащие на границе Плоткина и удовлетворяющие условию Варшавова–Гилберта. Для этого мы получили, посредством компьютерного перебора, список всех левых идеалов I и, таким образом, список всех возможных луповых кодов $\mathcal{K} = \mathcal{K}(I)$ в упомянутых выше случаях. Мы упорядочили их по высоте (длина максимальной цепочки левых идеалов, начинающейся с нулевого идеала и заканчивающейся данным идеалом), а в случае совпадения высот — по рангу, то есть минимальному числу образующих.

2. Алгоритм перебора

Приведем краткое описание алгоритма, использованного для поиска всех луповых кодов, то есть всех левых идеалов луповой алгебры заданной лупы, а также для установления вложений одних идеалов в другие.

Алгоритм состоит из двух основных шагов.

Основной шаг 1: Создание списка всех главных левых идеалов.

Для этого реализована следующая процедура.

Шаг 1. Последовательно перебираются элементы f алгебры A , начиная, для определенности, с элемента $f = e$. Для исключения повторений рассматриваются только элементы со старшим коэффициентом $1 \in \mathbb{F}_q$.

Цель шагов 2–4 — построить базис главного левого идеала $A(f)$ над полем F_q . Для этого используется следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $f \in A = FL$ — произвольный элемент луповой алгебры FL . Положим

$$\mathcal{L}_0 = 0, \quad \mathcal{M}_0 = \mathcal{L}_1 = \langle L(Ff) \rangle_F, \quad \mathcal{L}_{i+1} = \langle L\mathcal{L}_i \rangle_F,$$

и выберем некоторые прямые дополнения $\mathcal{M}_i$ подпространств $\mathcal{L}_i$ в $\mathcal{L}_{i+1}$ так, что

$$\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{M}_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $\langle LX \rangle_F$ — линейная оболочка над F множества $\{gx \mid g \in L, x \in X\}$. Тогда

$$\mathcal{L}_{i+1} = \langle L\mathcal{M}_{i-1} \rangle_F + \mathcal{L}_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

и

$$\bigcup_{i \geq 0} \mathcal{L}_i = A(f).$$

Действительно, первые равенства выполнены по определению:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i+1} &= \langle L\mathcal{L}_i \rangle_F = \langle L(\mathcal{M}_{i-1} \oplus \mathcal{L}_{i-1}) \rangle_F \\ &= \langle L\mathcal{M}_{i-1} \rangle_F + \langle L\mathcal{L}_{i-1} \rangle_F = \langle L\mathcal{M}_{i-1} \rangle_F + \mathcal{L}_i. \end{aligned}$$

Включение $\mathcal{L}_i \subseteq A(f)$ доказывается индукцией по i , а обратное включение следует из того, что $\bigcup_{i \geq 0} \mathcal{L}_i$ — левый идеал кольца A , содержащий элемент f . Ясно, что найдется такое натуральное число i , что $\mathcal{M}_i = 0$ или, равносильно, что $\mathcal{L}_i = A(f)$.

Шаг 2. Строится базис $f_1^{(1)}, \dots, f_{(1)}^{k_1}$ линейной оболочки $\mathcal{L}_1$ системы элементов $\{gf \mid g \in L\}$ над полем F_q такой, что матрица координат его элементов в стандартном базисе имеет специальный ступенчатый вид (ведущий элемент каждой строки равен 1 и является единственным ненулевым элементом соответствующего столбца). Каждый элемент, полученный на этом шаге, помечается как новый.

Шаг 3. Предположим, что базис пространства $\mathcal{L}_i$ уже построен и имеет вид

$$e_1, \dots, e_s, f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(k_i)},$$

где $e_1, \dots, e_s$ — базис пространства $\mathcal{L}_{i-1}$, а $f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(k_i)}$ — базис пространства $\mathcal{M}_{i-1}$, $s = 0$ при $i = 1$ и $s = \sum_{j=1}^{i-1} k_j$ при $i > 1$, причем матрица координат его элементов в стандартном базисе имеет специальный ступенчатый вид (возможно, с перестановкой строк) и элементы $f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(k_i)}$ помечены как новые. Каждый из новых элементов умножается слева на все элементы лупы (в результате возникает система образующих подпространства $\langle L\mathcal{L}_{i-1} \rangle_F$), и если произведение $f_{i+1}^{(j)} = gf_i^{(k)}$ не лежит в линейной оболочке уже найденных базисных векторов, то мы добавляем линейную комбинацию уже построенных векторов и этого произведения, меняя уже построенные элементы таким образом, чтобы специальный ступенчатый вид матрицы координат сохранялся. Точнее, пусть к подпространству $\mathcal{L}_i$ уже добавлены элементы $f_{i+1}^{(1)}, \dots, f_{i+1}^{(j-1)}$, причем базис полученного подпространства имеет вид $e'_1, \dots, e'_t$, где $t = s + k_i + j - 1$, и

$$\langle e'_1, \dots, e'_t \rangle = \mathcal{L}_i \oplus \langle e'_{s+k_i+1}, \dots, e'_t \rangle = \mathcal{L}_i \oplus \langle f_{i+1}^{(1)}, \dots, f_{i+1}^{(j-1)} \rangle. \quad (1)$$

Добавление элемента $f_{i+1}^{(j)}$ сводится к следующим преобразованиям:

(а) Элемент $f_{i+1}^{(j)}$ заменяется на

$$e''_{i+1} = \alpha(f_{i+1}^{(j)}) + \sum_{k=1}^t \beta_k e'_k,$$

для некоторых $\alpha \in F \setminus \{0\}, \beta_1, \dots, \beta_t \in F$;

(б) Элементы e'_k заменяются на элементы

$$e''_k = e'_k + \gamma_k e''_{i+1}, \quad \gamma_k \in F, \quad k = 1, \dots, t.$$

Коэффициенты α, β_k и γ_k подбираются так, чтобы обеспечить специальный ступенчатый вид матрицы координат новых базисных элементов. Однако, независимо от выбора этих коэффициентов, имеет место соотношение, подобное (1):

$$\begin{aligned} \langle e''_1, \dots, e''_{i+1} \rangle &= \langle e'_1, \dots, e'_t \rangle \oplus \langle e''_{i+1} \rangle \\ &= \langle e'_1, \dots, e'_t \rangle \oplus \langle f_{i+1}^{(j)} \rangle \\ &= \mathcal{L}_i \oplus \langle e'_{s+k_i+1}, \dots, e'_t \rangle \oplus \langle f_{i+1}^{(j)} \rangle \\ &= \mathcal{L}_i \oplus \langle f_{i+1}^{(1)}, \dots, f_{i+1}^{(j)} \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Затем все элементы перестроенного базиса с номерами $k = 1, \dots, s$ помечаются как старые, а элементы, добавленные на данном шаге, как новые. Из построения ясно (см. (1) или (2)), что новые элементы образуют базис некоторого подпространства $\mathcal{M}_i$ такого, что

$$\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \oplus \mathcal{M}_i$$

(согласно первому утверждению предложения 1).

Шаг 4. Шаг 3 повторяется до тех пор, пока некоторые новые элементы будут добавляться к базису (заметим, что для групповой алгебры число повторений шага 3 равно 1). В результате, согласно второму утверждению предложения 1, будет получен базис левого идеала, порожденного заданным элементом. Обозначим через k размерность полученного идеала.

Шаг 5. По списку уже построенных главных идеалов, упорядоченному по размерности, с помощью массива указателей на первый идеал заданной размерности, проверяется совпадение уже построенного идеала с каким-либо из найденных ранее идеалов размерности k (достаточно проверять принадлежность образующей f к главному идеалу той же размерности k). В случае совпадения переходим к следующему элементу луповой алгебры (см. шаг 1), если же рассматриваемый элемент не принадлежит ни одному из идеалов заданной размерности k , то идеал добавляется к списку (с корректировкой упомянутого выше массива указателей). После этого происходит переход к следующему элементу луповой алгебры).

Основной шаг 2. Имея базис для каждого главного идеала, строим новые идеалы как суммы главных.

Шаг 6. Сначала, суммируя главные идеалы попарно и отбрасывая те, что совпадают с уже построенными (аналогично шагу 5), получаем список идеалов ранга 2 (под рангом мы понимаем здесь минимальное число образующих).

Шаг 7. Беря суммы уже построенных идеалов ранга r и главных идеалов (список которых построен на основном шаге 1) и пропуская уже найденные, получаем список идеалов ранга $r + 1$.

Шаг 8. Шаг 7 повторяется, пока число вновь построенных идеалов отлично от нуля.

3. Параметры луповых кодов

На следующем этапе работы мы сравнивали параметры, полученные для луповых кодов, с параметрами лучших кодов в различных смыслах. Для этого определялось соответствие параметров некоторым хорошо известным границам для кодов. Были вычислены параметры всевозможных кодов вида $\mathcal{K} = \mathcal{K}(I)$ для всех левых идеалов I луповых алгебр $F_q G$ малых порядков (для $q \in \{2, 3, 4, 5\}$ и для всех луп G порядков 4, 5, 6, 7) и найдены наилучшие среди таких кодов. Приведем некоторые из полученных результатов.

3.1. Граница Синглтона. МДР-коды. Оптимальные коды

Напомним, что линейный $[n, k, d]$ -код над конечным полем F_q удовлетворяет неравенству

$$d \leq n - k + 1$$

(граница Синглтона) [8]; он называется МДР-кодом, если достигается равенство

$$d = n - k + 1.$$

Легко видеть, что любая луповая алгебра

$$A = F_q L$$

содержит два тривиальных луповых МДР-кода: $[n, 1, n]$ -код $\mathcal{K}(I_0)$, соответствующий идеалу

$$I_0 = A \left(\sum_{g \in G} g \right) = F_q \left(\sum_{g \in G} g \right),$$

и $[n, n - 1, 2]$ -код $\mathcal{K}(\Delta)$, соответствующий фундаментальному идеалу $\Delta \triangleleft A$, который можно определить как левый (и правый) аннулятор идеала I_0 .

Однако некоторые из исследованных алгебр содержат нетривиальные луповые МДР-коды, например, алгебра $F_5 S_3$ содержит $[6, 3, 4]$ -код. Были найдены луповые МДР-коды с следующими параметрами, приведенными в таблице 1.

Напомним, что (не обязательно линейный) $[n, k, d]$ -код $\mathcal{K}$ над конечным полем F_q называется оптимальным [7], если $|\mathcal{K}| = q^k$ — максимально возможная мощность n -кода с расстоянием d . В соответствии с этим определением введем следующее определение.

Таблица 1. Луповые $[n, k, d]$ -МДР-коды в $F_q L$

n	k	d	F_q	Лупы L
4	2	3	F_4	$Z_2 \oplus Z_2$
4	2	3	F_5	Z_4
5	3	3	F_4	Z_5
5	3	3	F_5	Z_5
5	2	4	F_4	Z_5
5	2	4	F_5	Z_5
6	3	4	F_5	Z_6, S_3

Определение 1. Линейный $[n, k, d]_q$ -код называется линейно оптимальным, если k — максимально возможная размерность линейного над полем F_q кода длины n с расстоянием d .

Очевидно, что любой МДР-код оптимален. Сверх того, можно указать следующий признак линейной оптимальности.

Обозначим через $n(k, q)$ (соответственно, $m(k, q)$) максимальную длину МДР-кода $\mathcal{K}$ комбинаторной размерности k над алфавитом из q элементов (соответственно, линейного МДР-кода над полем F_q для примарного числа q). Конечно,

$$m(k, q) \leq n(k, q).$$

Предложение 2. Пусть n, k — натуральные числа, q — такое примарное число, что $n > m(k + 1, q)$. Тогда любой линейный $[n, k, n - k]_q$ -код линейно оптимален.

Действительно, в противном случае существует линейный $[n, k + 1, n - k]_q$ -код. Но такой код является МДР-кодом, следовательно, $n \leq m(k + 1, q)$, получаем противоречие.

Наши результаты показывают, что среди луповых кодов имеются коды, удовлетворяющие условию предложения 2. Например, каждая из алгебр $F_q \mathcal{D}_4, F_q \mathcal{Q}_8$, $q = 2, 3, 4, 5$, содержит $[8, 4, 4]_q$ -код. Все эти коды линейно оптимальны, поскольку для указанных значений q выполнено неравенство

$$m(5, q) < 8$$

в силу следующего хорошо известного результата.

Теорема 1 ([7, 8]). Если $q \leq k$, то

$$n(k, q) = k + 1.$$

Если $k \leq q$ и q четно, то

$$n(k, q) \leq q + k - 1.$$

Если $3 \leq k \leq q$ и q нечетно, то

$$n(k, q) \leq q + k - 2.$$

Были получены следующие результаты, приведенные в таблице 2 (таблицы Кэли лупы #1 и лупы #2 приведены ниже).

Таблица 2. Линейно оптимальные луповые $[n, k, d]$ -коды в $F_q L$

n	k	d	F_q	Лупы L
6	2	4	F_2	Z_6, S_3 , Лупа #1 и еще 10 неассоциативных луп
6	2	4	F_3	Z_6, S_3 , Лупа #1 и еще 10 неассоциативных луп
6	3	3	F_3	Z_6, S_3 , Лупа #2 и еще 3 неассоциативных лупы
6	3	3	F_4	Z_6, S_3 , Лупа #2 и еще 3 неассоциативных лупы
7	4	3	F_2	Z_7
7	4	3	F_4	Z_7
7	3	4	F_2	Z_7
7	3	4	F_4	Z_7

Таблица 3. Таблицы Кэли луп #1, #2

Лупа #1:						Лупа #2:					
0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
1	0	3	2	5	4	1	0	3	2	5	4
2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1
3	2	5	4	1	0	3	4	5	0	1	2
4	5	0	1	3	2	4	5	0	1	2	3
5	4	1	0	2	3	5	2	1	4	3	0

3.2. Граница Плоткина

Для любого $[n, k, d]_q$ -кода выполняется неравенство (граница Плоткина [8])

$$d \leq \frac{(q-1)q^k}{q(q^k-1)}n. \quad (3)$$

Если оно обращается в равенство, то мы говорим, что данный код лежит на границе Плоткина.

Таблица 4 показывает, какие луповые коды лежат на границе Плоткина.

3.3. Граница Варшавова–Гилберта

Пусть

$$s_q(i, \delta) = \sum_{0 \leq t \leq \delta} \binom{i}{t} (q-1)^t$$

(число элементов шара радиуса δ в пространстве Хемминга F_q^i). Используя 1.10 из [8] и 8.6 из [7], нетрудно доказать следующий факт.

Таблица 4. Луповые $[n, k, d]$ -коды в $F_q L$, лежащие на границе Плоткина

n	k	d	F_q	Лупы L
5	2	4	F_4	Z_5
6	2	4	F_2	Z_6, S_3 , Лупа #1 и еще 10 неассоциативных луп
7	3	4	F_2	Z_7

Таблица 5. Луповые $[n, k, d]$ -коды в $F_q L$, удовлетворяющие условию Варшавова–Гилберта

n	k	d	F_q	Лупы L
4	2	3	F_4	$Z_2 \oplus Z_2$
4	2	3	F_5	Z_4
5	3	3	F_4	Z_5
5	3	3	F_5	Z_5
5	2	4	F_4	Z_5
5	2	4	F_5	Z_5
6	3	4	F_5	Z_6, S_3

Теорема 2. Для заданных чисел $n \in \mathbb{N}$, $d \in \{1, \dots, n-1\}$ существует линейный $[n, k, d]_q$ -код такой, что

$$k \geq n - \lceil \log_q s_q(n-1, d-2) \rceil - 1.$$

Если линейный $[n, k, d]_q$ -код удовлетворяет неравенству из этой теоремы, мы говорим, что он удовлетворяет условию Варшавова–Гилберта.

Вычисления показывают, что существуют луповые коды, удовлетворяющие условию Варшавова–Гилберта.

4. Параметры групповых кодов

Поскольку число луп порядка n растет очень быстро при возрастании n , в случае луповых кодов длины, большей 7, мы ограничились рассмотрением групповых кодов. Изучались параметры групповых кодов для следующих групп: групп диэдра $\mathcal{D}_m$, $m = 4, 5, 6$; группы кватернионов Q_8 ; знакопеременной группы A_4 и всех абелевых групп порядков 8, 9, 10 и 12 (коды из групповых алгебр $F_q Z_{11}$ не включены в таблицы, поскольку для рассматриваемых значений q это — известные классические циклические коды [8]).

Приведем список линейно оптимальных кодов, которые лежат в групповых алгебрах указанных групп и удовлетворяют предложению 2 (таблица 6), а также список найденных групповых кодов, лежащих на границе Плоткина.

5. Заключение

1. Решетки левых идеалов неассоциативных луповых алгебр $A = F_q L$ малой мощности ($q \leq 5$, $|L| \leq 7$), за редким исключением, тривиальны и состоят из следующих четырех идеалов: 0 , I_0 , Δ , A . Поэтому они не содержат интересных луповых кодов.

Исключение составляют линейно оптимальные $[6, 2, 4]_q$ -коды для $q \in \{2, 3\}$, а также $[6, 3, 3]_q$ -коды для $q \in \{3, 4\}$. Отметим, что найденные $[6, 2, 4]_q$ -коды не только линейно оптимальны, но также абсолютно оптимальны (см. [8]).

Представляется естественной возможность построения более интересных луповых кодов для луп больших порядков, однако полный перебор всех таких кодов — более сложная задача.

2. При изучении перечисленных выше групповых кодов были найдены, в частности, следующие известные абсолютно оптимальные (в соответствие с [8]) линейные коды:

Таблица 6. Линейно оптимальные групповые $[n, k, d]$ -коды в $F_q G$

n	k	d	F_q	Группы G
8	4	4	F_2	$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2, Z_4 \oplus Z_2, Q_8, \mathcal{D}_4$
8	5	3	F_3	Z_8, Q_8
8	4	4	F_3	$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2, Z_4 \oplus Z_2, Z_8, Q_8, \mathcal{D}_4$
8	3	5	F_3	Z_8, Q_8
8	2	6	F_3	Z_8, Q_8
8	5	3	F_4	$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2, Z_4 \oplus Z_2, Q_8, \mathcal{D}_4$
8	4	4	F_4	$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2, Z_4 \oplus Z_2, Q_8, \mathcal{D}_4$
8	2	6	F_4	$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2, Z_4 \oplus Z_2, Q_8, \mathcal{D}_4$
8	5	3	F_5	$Z_4 \oplus Z_2, Z_8, Q_8, \mathcal{D}_4$
8	4	4	F_5	$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2, Z_8, Q_8, \mathcal{D}_4$
8	2	6	F_5	$Z_4 \oplus Z_2, Z_8$
8	3	5	F_4	Q_8
9	6	3	F_3	$Z_3 \oplus Z_3$
9	5	4	F_3	$Z_3 \oplus Z_3$
9	4	5	F_3	$Z_3 \oplus Z_3$
9	3	6	F_3	$Z_3 \oplus Z_3$
9	6	3	F_4	$Z_3 \oplus Z_3$
9	3	6	F_4	$Z_3 \oplus Z_3$
10	6	4	F_4	$Z_{10}, \mathcal{D}_5$
10	2	8	F_4	$Z_{10}, \mathcal{D}_5$
10	7	3	F_5	$Z_{10}, \mathcal{D}_5$
10	6	4	F_5	$Z_{10}, \mathcal{D}_5$
10	2	8	F_5	$Z_{10}, \mathcal{D}_5$
10	4	6	F_4	$\mathcal{D}_5$
10	4	6	F_5	$\mathcal{D}_5$
12	9	3	F_4	$Z_2 \oplus Z_6, A_4$
12	9	3	F_5	$Z_2 \oplus Z_6, A_4$
12	8	4	F_5	$Z_2 \oplus Z_6, Z_2 \oplus Z_6, A_4, \mathcal{D}_6$
12	8	4	F_4	A_4
12	6	6	F_4	A_4
12	6	6	F_4	$\mathcal{D}_6$

Таблица 7. Групповые $[n, k, d]$ -коды в $F_q G$, лежащие на границе Плоткина

n	k	d	F_q	Группы G
8	2	6	F_3	Z_8, Q_8
9	2	6	F_2	$Z_3 \oplus Z_3, Z_9$
10	2	8	F_4	$Z_{10}, \mathcal{D}_5$
12	2	8	F_2	$Z_2 \oplus Z_6, Z_{12}, A_4, \mathcal{D}_6$

симплексный $[7, 3, 4]_2$ -код в F_2Z_7 ; $[7, 4, 3]_2$ -код Хэмминга в F_2Z_7 ; $[8, 4, 4]_2$ -код Бауэра [7] (расширенный $[7, 4, 3]_2$ -код Хэмминга) в $F_2(Z_2^3)$, $F_2(Z_2 \times Z_4)$, F_2Q_8 , F_2D_4 , где Q_8 — группа кватернионов, D_4 — группа диэдра.

3. В групповых алгебрах некоммутативных групп существуют линейно оптимальные коды, которые нельзя построить с использованием абелевых групп. Примеры таких кодов: $[8, 3, 5]$ -код в F_4Q_4 ; $[10, 4, 6]$ -код в F_4D_5 и в F_5D_5 ; $[12, 8, 4]$ - и $[12, 6, 6]$ -коды в F_4A_4 ; $[12, 6, 6]$ -код в F_4D_6 .

4. Важно отметить, что многие из найденных нами лучших кодов задаются идеалами из не полупростых и некоммутативных алгебр. Это делает особо интересной задачу изучения таких алгебр с точки зрения теории кодов.

5. В [6, 7] было показано, что если G — циклическая группа порядка $q+1$ и $k = 1, \dots, q$, то алгебра $F_q G$ содержит идеал I такой, что $\mathcal{H}(I)$ есть $[q+1, k, q-k+2]$ -(МДР)-код, если и только если q четно или k нечетно. Кроме того, в [5] было показано, что если q нечетно и k четно, то существует не циклический, но рекурсивный над F_q $[q+1, k, q-k+2]$ -(МДР)-код. Интересно, существуют ли такие луповые коды для каких-нибудь нециклических луп L ? Наши вычисления показывают, что для $q = 3, 5$ и всех подходящих четных k таких кодов не существует. Более того, не существует групповых кодов с указанными параметрами для $q = 7, 9$ и соответствующих четных k . Это позволяет предположить, что верна следующая гипотеза.

Гипотеза. *Над полем F_q существует $[q+1, k, q-k+2]$ -луповый код тогда и только тогда, когда q четно или k нечетно, то есть тогда и только тогда, когда существует циклический код с указанными параметрами.*

6. Для $q = 2^t$ существует линейный $[q+2, q-1, 4]$ -(МДР)-код над F_q — дважды расширенный код Риды–Соломона (см., например, [8]). Линейный над F_q циклический код с такими параметрами неизвестен, однако в [5] было показано, что один из таких кодов линейно (в широком смысле) эквивалентен циклическому линейному над пространством F_2^t коду, названному Астурийским кодом. В связи с этим было бы интересно найти лупу L порядка $q+2$ такую, что алгебра $F_q L$ содержит идеал, задающий $[q+2, q-1, 4]$ -код.

Тот же вопрос интересен относительно $[q+2, 3, q]$ -кода, двойственного к исходному.

Список литературы

1. Абашин А. С., Линейные рекурсивные МДР-коды размерности 2 и 3. *Дискретная математика* (2000) **12**, №2, 140–153.
2. Гонсалес С., Коусело Е., Марков В. Т., Нечаев А. А., Рекурсивные МДР-коды и рекурсивно дифференцируемые квазигруппы. *Дискретная математика* (1998) **10**, №2, 3–29.
3. Couselo E., Gonzalez S., Markov V., Nechaev A., Recursive MDS-codes and recursively differentiable k -quasigroups. *Proc. Sixth Intern. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory*. Pskov, 1998, 78–84.
4. Couselo E., Gonzalez S., Markov V., Nechaev A., Recursive MDS-codes. *Proc. WCC'99*. Paris, 1999, 271–278.

5. Couselo E., Gonzalez S., Markov V., Nechaev A., Linear recursive MDS-codes and Asturian codes. *Proc. WCC'01*. Paris, 2001, 149–156.
6. Georgiades J., Cyclic $(q + 1, k)$ -codes of odd order q and even dimension k are not optimal. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* (1982) **30**, 284–285.
7. Heise W., Quattrocchi P., *Informations- und Codierungstheorie*. Springer, Berlin, 1995.
8. МакВильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Связь, Москва, 1979.
9. Нечаев А. А., Кузьмин А. С., Марков В. Т., Линейные коды над конечными кольцами и модулями. *Фундаментальная и прикладная математика* (1997) **3**, №1, 195–254.
10. Chein O., Pflugfelder H. O., Smith J. D. H., Eds., *Quasigroups and loops: theory and applications*. Heldermann, Berlin, 1990.
11. Sabin R. E., Lomonaco S. J., Metacyclic error-correcting codes. *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.* (1995) **6**, №3, 191–210.
12. Sabin R. E., On determining all codes in semi-simple group rings. *Lect. Notes Comput. Sci.* (1993) **673**, 279–290.
13. Sabin R. E., An ideal structure for some quasi-cyclic error-correcting codes. *Lect. Notes Pure Appl. Math.* (1993) **141**, 183–194.

Статья поступила 10.11.2003.