Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Рыбаков, Спектральные свойства линейного конгруэнтного генератора в специальных случаях, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 2, 54–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 07:23:00

Спектральные свойства линейного конгруэнтного генератора в специальных случаях

© 2004 г. А. С. Рыбаков

В данной работе для линейного конгруэнтного генератора

$$z_{N+1} = G(z_N), \quad N = 1, 2, \dots,$$

где $G(x) = \lambda x + c \pmod{W}$, $W = p^F$, p — простое число, имеющего полный период и множитель λ специального вида, устанавливается нетривиальная нижняя оценка наименьшего ненулевого волнового числа $e_L(\lambda)$ — базовой характеристики, вводимой в спектральном тесте для проверки случайности на основе изучения частоты встречаемости L -наборов $(t_1, \dots, t_L)$ в последовательности (z_N) .

Указываемая нижняя граница имеет вид $W^{1/L-\delta}$, где δ — некоторая величина, явно зависящая от параметров, определяющих множитель λ . При специальном выборе параметров δ можно сделать сколь угодно малым. Показатель $1/L$ в этой оценке нельзя заменить большим. Такого рода оценки необходимы для изучения классов множителей, проходящих спектральный тест.

1. Введение

Для построения последовательности (ζ_N) псевдослучайных чисел (см. гл. 3, п. 3.1 в [3]), отвечающих равномерному распределению на промежутке $[0, 1)$, на практике часто прибегают к следующей простой конструкции.

Пусть W — фиксированное большое натуральное число. (Его величина может достигать нескольких сотен или тысяч бит). С точки зрения практики наибольший интерес представляет случай, когда W равно степени 2. В данной работе мы будем предполагать, что $W = p^F$, где p — простое число, $F \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ — растущий параметр. Здесь и далее $\mathbb{Z}_{\geq m} = \{m, m+1, \dots\}$.

Пусть $\{G_{\lambda,c}\}$ — семейство линейных конгруэнтных генераторов по модулю W , то есть отображений множества $I_W = \{0, 1, \dots, W-1\}$ в себя таких, что

$$G_{\lambda,c}(x) \equiv \lambda x + c \pmod{W}, \tag{1}$$

где λ и c — произвольные натуральные числа. Сравнимые между собой пары индексов (λ, c) определяют один и тот же линейный конгруэнтный генератор, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что λ и c — также элементы множества I_W .

Фиксируя какие-либо числа $z_0 \in I_W$, $\lambda \in I_W$ и $c \in I_W$, можно построить псевдослучайную последовательность элементов I_W

$$z_0, z_1, z_2, \dots, \quad (2)$$

такую, что $z_{N+1} = G_{\lambda, c}(z_N)$, $N = 0, 1, 2, \dots$, с помощью которой в итоге определяется последовательность (ζ_N) :

$$\zeta_N = z_N / W, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

В данной работе мы будем рассматривать лишь последовательности (3), имеющие период максимальной длины W . Необходимым и достаточным условием для этого в силу п. 3.2.1.2 гл. 3 в [3] являются условия $p \nmid c$ и

$$\lambda \equiv 1 \pmod{p} \quad (\text{при } p > 2), \quad \lambda \equiv 1 \pmod{4} \quad (\text{при } p = 2). \quad (4)$$

Естественно поставить вопрос о проверке последовательности (3) на близость к случайной. Здесь и ниже под случайной последовательностью имеется в виду выборка из последовательности независимых равномерно распределенных на промежутке $[0, 1)$ случайных величин. Последовательность считается близкой к случайной, если она успешно проходит определенный набор статистических тестов на случайность, например, тех, что описаны в п. 3.3 главы 3 книги [3].

Наиболее совершенным, по мнению Д. Кнута, из имеющихся тестов на случайность является спектральный тест (см. п. 3.3.4 гл. 3 в [3]), предложенный в 1965 г. Р. Ковзю и Р. Макферсоном. Вероятно, будет уместным привести соответствующую цитату из [3], показывающую важность этого теста:

“Этот тест замечателен тем, что все известные плохие датчики, основанные на линейном конгруэнтном методе, были им забракованы, в то время как все хорошие датчики прошли его удовлетворительно. Безусловно, это наиболее совершенный из имеющихся тестов, в связи с чем он заслуживает особого внимания.”

Для определенности под близостью последовательности к случайной в данной работе имеется в виду успешное прохождение именно спектрального теста.

Пусть L — фиксированное натуральное число. Спектральный тест производит проверку на случайность посредством исследования преобразования Фурье функции $(t_1, \dots, t_L) \mapsto H(t_1, \dots, t_L)$, где $H(t_1, \dots, t_L)$ — частота появлений набора $(t_1, \dots, t_L)$ в последовательности (2) на отрезке длины, равной длине ее периода. При этом существуют две формы спектрального теста (сильная и слабая), для каждой из них результат проверки определяется по значению наименьшего ненулевого волнового числа

$$e_L(\lambda) = \min \left\{ \sqrt{h_1^2 + \dots + h_L^2} : \mathbf{0} \neq (h_1, \dots, h_L) \in \mathbf{Z}^L, \sum_{i=1}^L h_i \lambda^i \equiv 0 \pmod{W} \right\}.$$

Выписанное только что выражение имеет силу лишь для последовательностей (3) периода максимальной длины.

Для спектрального теста в слабой форме мерой близости к случайности принято считать величину $1/e_L(\lambda)$. Допустим, мы хотим потребовать, чтобы первые l p -ичных разрядов чисел (3) были, условно говоря, случайны, где l — фиксированное натуральное число. Спектральный тест в этом случае будет пройден, если выполнено неравенство $1/e_L(\lambda) \leq p^{-l}$, то есть $e_L(\lambda) \geq p^l$.

Спектральный тест в сильной форме требует выполнения неравенства

$$\gamma_L(\lambda) = \frac{\pi^{L/2}(e_L(\lambda))^L}{\Gamma(L/2 + 1)W} \geq 0,1, \quad (5)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Отметим, что граница 0,1 здесь установлена лишь на основании опытных данных и ее выбор можно считать относительно произвольным.

Неравенство (5) следует интерпретировать геометрически. Смысл его состоит в том, что наименьший ненулевой вектор решетки

$$\left\{ (h_1, \dots, h_L) \in \mathbf{Z}^L : \sum_{i=1}^L h_i \lambda^i = 0 \pmod{W} \right\}$$

не может быть слишком мал. Объем L -мерного шара радиуса $e_L(\lambda)$ (где $e_L(\lambda)$ — длина этого вектора) должен составлять не менее $1/10$ от объема ее основного параллелепипеда.

Заметим, что это довольно жесткое условие. С ростом L оно влечет неравенство

$$e_L(\lambda) \geq W^{1/L} \sqrt{\frac{L}{2\pi e}} (1 + o(1)),$$

в то время как в силу теоремы Минковского о выпуклом теле и формулы Стирлинга для всех λ справедлива верхняя оценка

$$e_L(\lambda) \leq W^{1/L} \sqrt{\frac{2L}{\pi e}}. \quad (6)$$

Таким образом, для успешного прохождения спектрального теста в сильной форме надо, чтобы нижняя граница $e_L(\lambda)$ отличалась от правой части (6), грубо говоря, не более, чем в 2 раза.

В данной работе определяется класс множителей λ , для которых можно написать нетривиальную оценку числа $e_L(\lambda)$ снизу. Заметим, что эта оценка весьма далека от того, чтобы утверждать, что множители данного класса проходят спектральный тест в сильной форме. Тем не менее, оказывается, что при специальном выборе параметров число l гарантируемых множителем данного класса случайных старших p -ичных разрядов элементов последовательности (3) будет достаточно близко к своей верхней границе

$$l \leq \frac{F}{L} + \frac{\ln \sqrt{2L/(\pi e)}}{\ln p}, \quad (7)$$

вытекающей из (6). Точная формулировка дается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть целые числа p , F , $W = p^F$ и $L \geq 2$ — те же, что и выше. Целые числа E , a , T удовлетворяют условиям

$$p^E \geq 3, \quad T \geq L, \quad p \nmid aT, \quad |a| \leq p^E.$$

Целые числа a' , T' удовлетворяют условиям

$$aa' \equiv 1 \pmod{W}, \quad TT' \equiv 1 \pmod{W}, \quad T' > 0.$$

Множитель λ имеет вид

$$\lambda = (1 - p^E a')^{T'}.$$

Тогда при достаточно большом T

$$e_L(\lambda) \geq W^{1/L - (1-1/L)\delta}, \quad \delta = \frac{1}{\lceil F/(EL) \rceil - 1} + \frac{5,414(L-1) \ln T}{E \ln p}. \quad (8)$$

Для прояснения содержания этой теоремы сделаем некоторые замечания.

1. Числа λ этой теоремы удовлетворяют условию (4), налагаемому на множитель для генерации последовательностей (3) периода максимальной длины.

2. Неравенство (8) становится тривиальным, если величина, стоящая в показателе степени W , неположительна, в частности, если

$$\rho = \lceil F/(EL) \rceil \leq L$$

или

$$E \ln p \leq 5,414(L-1)^2 \ln T.$$

Следовательно, чтобы утверждение теоремы было содержательным, надо как минимум предполагать, что $\rho > L$ и $E \ln p > 5,414(L-1)^2 \ln T$. Отсюда, в частности, вытекает, что $F > EL^2$ и $p^E > T^{5,414(L-1)^2}$, то есть $W = p^F > T^{5,414L^2(L-1)^2}$. Таким образом, число W должно расти вместе с T по меньшей мере, как $T^{5,414L^2(L-1)^2}$.

3. При некоторых условиях можно добиться того, чтобы число δ было произвольно мало. Например, если обе величины

$$E_0 = \sqrt{\frac{F \ln T}{\ln p}}, \quad \rho_0 = \frac{F}{E_0 L} = \sqrt{\frac{F \ln p}{L^2 \ln T}}$$

достаточно велики, то для $E = \lceil 2,327 E_0 \rceil$ получим, что $\delta < 4,654 \rho_0$.

4. Число l гарантируемых множителем λ теоремы случайных старших p -ичных разрядов элементов последовательности (3) удовлетворяет неравенству

$$l \geq \left\lfloor \frac{F}{L} (1 - (L-1)\delta) \right\rfloor,$$

что асимптотически равно (7), если $(L-1)\delta$ стремится к 0.

5. Неравенство (5) спектрального теста в сильной форме для чисел λ теоремы может не выполняться, но исходя из результатов практических вычислений можно предположить, что при правильном выборе параметров это будет довольно редким явлением (см. раздел 5).

В заключение заметим, что метод доказательства теоремы целиком опирается на хорошо известную конструкцию приближений Эрмита–Паде для совокупности степенных функций, примененную к p -адическому случаю. Главная проблема при этом состоит в получении точной верхней оценки для наименьшего общего знаменателя коэффициентов этих приближений. При тривиальной оценке этой величины получается неравенство типа (8) с величиной T вместо $\ln T$. Основной вклад нашей работы состоит в том, что мы значительно уточняем верхнюю оценку знаменателя, делая это применительно к нашему случаю в целом на основе тех же идей, что использованы в лемме 2.5 в [7], при доказательстве формулы 5.7 в [8], в лемме 2.5 в [9] и в предложении 6.6 в [6]. Наша основная лемма (см. ниже лемму 3) отличается от вышеперечисленных тем, что в ней рассматривается случай произвольного большого T и произвольного ρ , что вносит ряд дополнительных трудностей в структуру доказательства.

2. Оценка $\pi(X, K, \Lambda)$

Всюду в данной работе q обозначает простое число, $q_1, q_2, \dots$ обозначают все простые числа, занумерованные в возрастающем порядке, $c_1, C_1, c_2, C_2, \dots$ обозначают некоторые положительные абсолютные постоянные. Знаки O также скрывают некоторые положительные абсолютные постоянные.

Лемма 1. При $K \rightarrow \infty$ и $X \geq 2^{(1+\varepsilon)(\ln K)/\ln \ln K}$, где ε — любое положительное число, справедлива оценка

$$\sum_{x \leq X, (x, K)=1} \frac{1}{x} = \frac{\varphi(K)}{K} \ln X (1 + o(1)),$$

где $\varphi(K)$ — функция Эйлера, а (x, K) — наибольший общий делитель.

Доказательство. Пусть

$$S(X) = \sum_{x \leq X, (x, K)=1} \frac{1}{x}, \quad R(X) = \sum_{x=1}^X \frac{1}{x}$$

и $\mu(d)$ — функция Мебиуса. Так как $\sum_{d|t} \mu(d)$ есть 0 при $t > 1$ и 1 при $t = 1$ (см. [1]), справедливы равенства

$$\begin{aligned} S(X) &= \sum_{t|K} \sum_{x \leq X, (x, K)=t} \frac{1}{x} \sum_{d|t} \mu(d) = \sum_{d|K} \mu(d) \sum_{t: d|t, t|K} \sum_{x \leq X, (x, K)=t} \frac{1}{x} \\ &= \sum_{d|K} \mu(d) \sum_{x \leq X, d|x} \frac{1}{x} = \sum_{d|K} \mu(d) \sum_{x \leq X/d} \frac{1}{xd} = \sum_{d|K} \frac{\mu(d)}{d} R(X/d). \end{aligned}$$

Так как $R(X) = \ln X + O(1)$ при $X \geq 1$ и 0 при $X < 1$,

$$S(X) = \sum_{d|K, d \leq X} \frac{\mu(d)}{d} \ln X - \sum_{d|K, d \leq X} \frac{\mu(d)}{d} \ln d + O\left(\sum_{d|K} \frac{1}{d}\right). \quad (9)$$

Сумма под знаком O не превосходит

$$\prod_{q|K} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} = \prod_{q|K} \frac{q}{q-1} = \frac{K}{\varphi(K)}$$

(последнее равенство приведено в [1]), и это асимптотически малая величина по сравнению с предполагаемым главным членом $(\varphi(K) \ln X)/K$. Для доказательства заметим, что

$$\frac{\varphi(K)}{K} \geq \frac{c_1}{\ln \ln K}, \quad K \geq 3, \quad (10)$$

где $c_1 > 0$ — абсолютная постоянная (см. теорему 5.1 в [5]). Поскольку в силу условия леммы $\ln X > 0,6(\ln K)/\ln \ln K$, то

$$\frac{\varphi(K)}{K} \ln X \geq \frac{0,6c_1 \ln K}{(\ln \ln K)^2}, \quad (11)$$

в то время как

$$\frac{K}{\varphi(K)} = O(\ln \ln K) = o\left(\frac{\ln K}{(\ln \ln K)^2}\right),$$

что и требовалось доказать.

Так как

$$\sum_{d|K} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(K)}{K}$$

(см. [1]), соотношение (9) переписывается в виде

$$S(X) = \frac{\varphi(K)}{K} \ln X (1 + o(1)) - \sum_{d|K, d > X} \frac{\mu(d)}{d} \ln X - \sum_{d|K, d \leq X} \frac{\mu(d)}{d} \ln d. \quad (12)$$

Для доказательства леммы нам остается показать, что две последние суммы асимптотически малы по сравнению с $(\varphi(K) \ln X)/K$.

Покажем сперва, что

$$\sum_{d|K} \frac{\ln d}{d} \mu(d) = O((\ln \ln K)^2 \ln \ln \ln K). \quad (13)$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда K не делится на квадрат простого числа. Если K делится на q^α , $\alpha > 1$, то K можно разделить на $q^{\alpha-1}$, при этом левая часть (13) не изменится. При этом условии докажем более сильное неравенство

$$\sum_{d|K} \frac{\ln d}{d} = O((\ln \ln K)^2 \ln \ln \ln K). \quad (14)$$

Пусть r — число простых чисел, входящих в разложение K . Функция $(\ln d)/d$ монотонно убывает при $d \geq 3$, поэтому, если мы докажем (14) для числа $K_0 = q_1 q_2 \dots q_r$, то это же будет верно и для K ввиду того, что

$$\sum_{d|K} \frac{\ln d}{d} \leq \frac{\ln 2}{2} + \sum_{d|K_0} \frac{\ln d}{d}.$$

Следовательно, при доказательстве (14) можно предполагать, что число K равно произведению первых r простых чисел. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{d|K} \frac{\ln d}{d} &= \sum_{s=1}^r \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq r} \frac{\ln(q_{k_1} \dots q_{k_s})}{q_{k_1} \dots q_{k_s}} \leq \sum_{s=1}^r s \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq r} \frac{\ln q_{k_s}}{q_{k_1} \dots q_{k_s}} \\ &\leq \sum_{s=1}^r \frac{s}{(s-1)!} \sum_{k_i < k_s \text{ при } i < s, s \leq k_s \leq r} \frac{\ln q_{k_s}}{q_{k_1} \dots q_{k_s}} \\ &= \sum_{s=1}^r \frac{s}{(s-1)!} \sum_{s \leq k_s \leq r} \frac{\ln q_{k_s}}{q_{k_s}} \left(\sum_{1 \leq k < k_s} \frac{1}{q_k} \right)^{s-1} \end{aligned} \quad (15)$$

(при $s = 1$, $k_s = 1$ величина $\left(\sum_{1 \leq k < k_s} 1/q_k\right)^{s-1}$ считается равной 1).

При $Q \geq 3$ справедлива оценка (см. [2])

$$\sum_{q \leq Q} \frac{1}{q} = \ln \ln Q + O(1).$$

Полагая здесь $Q = q_{k_s} - 1$ и учитывая, что при $k \geq 3$

$$\ln q_k = \ln k + \ln \ln k + O(1) \quad (16)$$

(см. теорему 3.3 в [5]), получим, что при $k_s \geq 3$

$$\sum_{1 \leq k < k_s} \frac{1}{q_k} = \ln \ln k_s + O(1). \quad (17)$$

Применяя (16) и (17) к (2), найдем, что

$$\begin{aligned} \sum_{d|K} \frac{\ln d}{d} &\leq \sum_{s=1}^2 \frac{s}{(s-1)!} \sum_{s \leq k_s \leq 2} \frac{\ln q_{k_s}}{q_{k_s}} \left(\sum_{1 \leq k < k_s} \frac{1}{q_k} \right)^{s-1} \\ &\quad + \sum_{s=1}^r \frac{s}{(s-1)!} \sum_{3 \leq k_s \leq r} O\left(\frac{\ln k_s}{k_s \ln k_s}\right) (\ln \ln k_s + C_1)^{s-1} \\ &= O\left(1 + \sum_{s=1}^r \frac{s}{(s-1)!} \sum_{3 \leq k \leq r} \frac{(\ln \ln k + C_1)^{s-1}}{k}\right). \end{aligned}$$

При любом фиксированном $s \in [1, r]$ функция $x \mapsto (\ln \ln x + C_1)^{s-1}/x$ имеет на отрезке $[3, r]$ не более двух участков монотонности, а значения этой функции не превосходят $(\ln s + C_1)^{s-1}$. Следовательно,

$$\sum_{d|K} \frac{\ln d}{d} = O\left(1 + \sum_{s=1}^r \frac{s}{(s-1)!} (\ln s + C_1)^{s-1} + \sum_{s=1}^r \frac{s}{(s-1)!} \int_3^r \frac{(\ln \ln x + C_1)^{s-1}}{x} dx\right).$$

Ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s}{(s-1)!} (\ln s + C_1)^{s-1}$$

сходится, поэтому

$$\sum_{d|K} \frac{\ln d}{d} = O\left(1 + \sum_{s=1}^r \frac{s}{(s-1)!} \int_3^r \frac{(\ln \ln x + C_1)^{s-1}}{x} dx\right).$$

Далее заметим, что

$$\frac{(\ln \ln x + C_1)^{s-1}}{x} \leq \frac{d}{dx} ((\ln \ln x + C_1)^{s-1} \ln x),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{d|K} \frac{\ln d}{d} &= O\left(1 + \sum_{s=1}^r \frac{s}{(s-1)!} ((\ln \ln x + C_1)^{s-1} \ln x) \Big|_3^r\right) \\ &= O\left(1 + \sum_{s=1}^r \frac{s}{(s-1)!} (\ln \ln r + C_1)^{s-1} \ln r\right). \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{s x^{s-1}}{(s-1)!} = (x+1)e^x,$$

то

$$\sum_{d|K} \frac{\ln d}{d} = O(1 + \ln r(\ln \ln r + C_1 + 1) \ln r) = O(\ln^2 r \ln \ln r).$$

С другой стороны, ясно, что $r = O(\ln K)$, откуда,

$$\ln r = O(\ln \ln K), \quad \ln \ln r = O(\ln \ln \ln K)$$

и оценка (13) тем самым доказана.

Заметим, что правая часть (13) асимптотически мала по сравнению с предполагаемым главным членом $(\varphi(K)/K) \ln X$ (см. (11)), поэтому из (12) и (13) следует, что

$$S(X) = \frac{\varphi(K)}{K} \ln X (1 + o(1)) + \sum_{d|K, d > X} \frac{\mu(d)}{d} \ln \frac{d}{X}.$$

Отсюда вытекает, что

$$S(X) = \frac{\varphi(K)}{K} \ln X (1 + o(1)) + O\left(\frac{\ln K}{X}\right) \sum_{d|K} 1.$$

По теореме 5.2 из [5] сумма $\sum_{d|K} 1$ при достаточно большом K не превосходит

$$\exp\left((1 + \varepsilon/2) \frac{\ln K}{\ln \ln K} \ln 2\right),$$

значит,

$$S(X) = \frac{\varphi(K)}{K} \ln X (1 + o(1)) + O\left(\frac{\ln K}{X} \exp\left((1 + \varepsilon/2) \frac{\ln K}{\ln \ln K} \ln 2\right)\right).$$

Вспомня, что по условию леммы число X не меньше, чем

$$\exp\left((1 + \varepsilon) \frac{\ln K}{\ln \ln K} \ln 2\right),$$

получим, что

$$S(X) = \frac{\varphi(K)}{K} \ln X (1 + o(1)) + O\left(\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} \frac{\ln K}{\ln \ln K} \ln 2\right)\right).$$

Остаточный член в этой формуле асимптотически мал по сравнению с $(\varphi(K)/K) \ln X$ (что следует из (11)), значит,

$$S(X) = \frac{\varphi(K)}{K} \ln X (1 + o(1))$$

и лемма тем самым доказана.

Ниже мы используем стандартное обозначение $\pi(X, K, \Lambda)$ числа простых чисел, не превосходящих X и сравнимых с Λ по модулю K (предполагается, что $1 \leq \Lambda \leq K$ и наибольший общий делитель $(\Lambda, K) = 1$).

Лемма 2. При $K \rightarrow \infty$ и $X \geq K 4^{(1+\varepsilon) \ln K / \ln \ln K}$, где ε — произвольное положительное число, справедлива оценка

$$\pi(X, K, \Lambda) \leq \frac{2 + o(1)}{\varphi(K)} \frac{X}{\ln(X/K)}.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 4.1 в главе 2 в [5] было установлено неравенство

$$\pi(X, K, \Lambda) \leq \frac{N}{Z} + R + \frac{z}{K} + 1, \quad (18)$$

где

$$N = |\{m \in \mathbb{N}: Km + \Lambda \leq X\}| = \frac{X}{K} + O(1), \quad z = \sqrt{N} / \ln^2 N,$$

$$Z = \sum_{m \leq z, (m, K)=1} \frac{1}{m}, \quad R = O(z^2 \ln^2 z).$$

Отметим, что аналогичное неравенство содержится в [5], однако в [5] дается недостаточно точная для наших целей оценка числа Z снизу, что ведет к недостаточно точной верхней границе для $\pi(X, K, \Lambda)$. Цель данной леммы состоит в том, чтобы подправить оценку для Z (пользуясь леммой 1) и получить таким образом требуемую оценку для $\pi(X, K, \Lambda)$.

Чтобы использовать неравенство

$$Z \geq \frac{\varphi(K)}{K} \ln z (1 + o(1)) \quad (19)$$

леммы 1, мы должны проверить, что выполнено требуемое ею условие для числа z , то есть, что

$$z \geq 2^{(1+\varepsilon/2)(\ln K)/\ln \ln K}. \quad (20)$$

Заметим, что из определения числа N и условия на X следует, что

$$N \geq \frac{X}{K} - 2 \geq 4^{(1+\varepsilon)(\ln K)/\ln \ln K} - 2.$$

Так как $z = \sqrt{N} / \ln^2 N$ и функция $\sqrt{x} / \ln^2 x$ монотонно растет при $x \geq e^4$, для доказательства (20) достаточно показать, что

$$\frac{\sqrt{4^{(1+\varepsilon)(\ln K)/\ln \ln K} - 2}}{\ln^2(4^{(1+\varepsilon)(\ln K)/\ln \ln K} - 2)} \geq 2^{(1+\varepsilon/2)(\ln K)/\ln \ln K}.$$

Последнее неравенство при достаточно большом K , очевидно, выполнено. Используя (18) и (19) и учитывая, что $R = O(z^2 \ln^2 z) = O(N / \ln^2 N)$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \pi(X, K, \Lambda) &\leq \frac{NK}{\varphi(K)} \frac{1 + o(1)}{\ln z} + O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right) \\ &= \frac{2NK(1 + o(1))}{\varphi(K) \ln N} + O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Так как K больше, чем $\varphi(K)$, второе слагаемое правой части (21) асимптотически мало по сравнению с первым. Учитывая также, что

$$N = \frac{X}{K} + O(1) = \frac{X}{K}(1 + o(1)),$$

и следовательно,

$$\ln N = \ln \frac{X}{K} + o(1) = (1 + o(1)) \ln \frac{X}{K},$$

из (21) найдем, что

$$\pi(X, K, \Lambda) \leq \frac{2 + o(1)}{\varphi(K)} \frac{X}{\ln(X/K)},$$

что и требовалось доказать.

3. Лемма о знаменателе

Для формулировки следующей леммы введем обозначения

$$(x; T)_a^A = (x + aT)(x + (a + 1)T) \dots (x + (A - 1)T),$$

$$(x)_a^A = (x; 1)_a^A.$$

Пусть также $\text{den } X$ обозначает совокупность знаменателей множества $X \subseteq \mathbf{Q}$, то есть множество таких $D \in \mathbf{Q}$, что $Dx \in \mathbf{Z}$ для любого $x \in X$.

Лемма 3. Пусть

$$m \in \mathbf{Z}_{\geq 1}, \quad \xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbf{Q}, \quad n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}, \quad \eta_1, \dots, \eta_n \in \mathbf{Q};$$

$$0 < \xi_i \leq 1, \quad 0 < \eta_j \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$T \in \text{den}\{\xi_i, \eta_j : i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\} \cap \mathbf{Z}_{\geq 2}, \quad R \in \mathbf{Z}_{\geq 2};$$

Θ — множество чисел θ вида

$$\prod_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} (\xi_i)_{a_i}^{A_i} / \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (\eta_j)_{b_j}^{B_j},$$

где

$$M \in \mathbf{Z}_{\geq 1}, \quad i_1, \dots, i_M \quad \text{— произвольные числа из } \{1, \dots, m\};$$

$$a_i, A_i \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq a_i < A_i < R, \quad i = i_1, \dots, i_M;$$

$$N \in \mathbf{Z}_{\geq 1}, \quad j_1, \dots, j_N \quad \text{— попарно различные числа из } \{1, \dots, n\};$$

$$b_j, B_j \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq b_j < B_j < R, \quad j = j_1, \dots, j_N;$$

$$\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} (A_i - a_i) = \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (B_j - b_j).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) $\ln \theta \leq Rn + n \ln(RT)$ для всех $\theta \in \Theta$;
- (2) При достаточно большом T и $M = O(n)$ существует положительное число $D \in \text{den } \Theta$, удовлетворяющее неравенству $\ln D \leq 3,86036Rn \ln T$.

(3) Если в условиях леммы все $\xi_1, \dots, \xi_m$ равны 1 или для всех $d \mid T$

$$|\{j = \{1, \dots, n\} : d \mid T\eta_j\}| \leq \frac{n}{d},$$

то константу 3,86036 можно заменить на 3,207.

Прежде, чем перейти к доказательству, заметим, что число T в данной лемме не обязано совпадать с числом T в сформулированной выше теореме, хотя, как мы увидим далее, при доказательстве теоремы реализуется именно этот случай.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть

$$\begin{aligned} \theta &= \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} (\xi_i)_{a_i}^{A_i} / \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (\eta_j)_{b_j}^{B_j}, \\ S &= \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} (A_i - a_i) = \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}}^N (B_j - b_j). \end{aligned} \quad (22)$$

Так как $A_i - a_i \leq R - 1$ и $\xi_i \leq 1$, то $(\xi_i)_{a_i}^{A_i} \leq (1 + R - 1)^{A_i - a_i}$ и

$$\ln \prod_{i=i_1, \dots, i_M} (\xi_i)_{a_i}^{A_i} \leq S \ln R. \quad (23)$$

С другой стороны, $\eta_j \geq 1/T$, поэтому

$$\begin{aligned} (\eta_j)_{b_j}^{B_j} &\geq \frac{1}{T} \left(\frac{1}{T} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{T} + B_j - b_j - 1 \right) \\ &\geq \frac{1}{T} (B_j - b_j - 1)! \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть

$$S_0 = \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (B_j - b_j - 1) = S - N. \quad (25)$$

Тогда в силу (24)

$$\ln \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (\eta_j)_{b_j}^{B_j} \geq -n \ln T + \ln(S_0!) - \ln \frac{(B_{j_1} - b_{j_1} - 1 + \dots + B_{j_N} - b_{j_N} - 1)!}{(B_{j_1} - b_{j_1} - 1)! \cdot \dots \cdot (B_{j_N} - b_{j_N} - 1)!}.$$

Последнее слагаемое правой части этого неравенства есть минус логарифм от коэффициента при члене $X_1^{B_{j_1} - b_{j_1} - 1} \dots X_N^{B_{j_N} - b_{j_N} - 1}$ в разложении степени $(X_1 + \dots + X_N)^{S_0}$ в сумму одночленов от $X_1, \dots, X_N$. Этот коэффициент в любом случае не превосходит $(1 + \dots + 1)^{S_0} = N^{S_0}$, следовательно,

$$\ln \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (\eta_j)_{b_j}^{B_j} \geq -n \ln T + \ln(S_0!) - S_0 \ln N.$$

Используя формулу Стирлинга и учитывая, что $N \leq n$ (что следует из условия леммы), получим, что

$$\begin{aligned} \ln \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (\eta_j)_{b_j}^{B_j} &\geq -n \ln T + S_0 \ln \frac{S_0}{e} - S_0 \ln N \\ &\geq -n \ln T + S_0 \ln S_0 - S_0 \ln(ne), \end{aligned}$$

отсюда, ввиду (23) и (25), для числа θ из (22) получаем оценку

$$\ln \theta \leq S_0 \ln(neR) + n \ln R + n \ln T - S_0 \ln S_0. \quad (26)$$

Далее заметим, что функция $x \mapsto x \ln(neR) - x \ln x$ монотонно растет при $0 \leq x \leq nR$. Так как $S_0 < S < nR$ (второе неравенство вытекает из того, что $A_i - a_i \leq R - 1$ и $N \leq n$), из (26) следует оценка

$$\ln \theta \leq nR \ln(neR) + n \ln(RT) - nR \ln(nR) = Rn + n \ln(RT),$$

что и требовалось доказать.

Докажем утверждение 2. Пусть $\xi_i = x_i \cdot T$, $\eta_j = y_j \cdot T$, где $x_i, y_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Запишем число θ в виде $\theta_0 \theta_1 \theta_2$, где

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} \frac{(B_j - b_j)!}{(y_j; T)_{b_j}^{B_j}}, \\ \theta_1 &= \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \frac{(x_i; T)_{a_i}^{A_i}}{(A_i - a_i)!}, \\ \theta_2 &= \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} (A_i - a_i)! / \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (B_j - b_j)!. \end{aligned}$$

Пусть Θ_σ — множества чисел вида θ_σ для $\sigma = 0, 1, 2$, удовлетворяющих условиям леммы, налагаемым на множество Θ . Мы покажем, что существуют элементы $0 < D_\sigma \in \text{den } \Theta_\sigma$ такие, что

$$\ln D_0 \leq 3,860357 Rn \ln T, \quad (27)$$

$$\ln D_1 = O(Rn \ln \ln T), \quad (28)$$

$$\ln D_2 = O(Rn). \quad (29)$$

Этого будет достаточно для доказательства утверждения 2.

Пусть сначала $\sigma = 2$. Если q — простое число, $q \leq \rho$, и $\nu_q(x)$ — q -показатель числа x (то есть наибольшее целое α , для которого $q^\alpha \mid x$), то

$$\nu_q(\theta_2) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \lfloor (A_i - a_i)/q^\alpha \rfloor - \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} \lfloor (B_j - b_j)/q^\alpha \rfloor \right) \quad (30)$$

это вытекает из известной формулы для $\nu_q(X!)$ (см. [1]):

$$\nu_q(X!) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \lfloor X/q^\alpha \rfloor, \quad X \in \mathbb{N}.$$

Так как $A_i - a_i < R$, $B_j - b_j < R$ и

$$\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} (A_i - a_i) = \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (B_j - b_j),$$

из (30) следует, что

$$\begin{aligned} v_q(\theta_2) &\geq \sum_{\alpha: q^\alpha \leq R} \left(\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \left(\frac{A_i - a_i}{q^\alpha} - 1 \right) - \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} \frac{B_j - b_j}{q^\alpha} \right) \\ &= -M \sum_{\alpha: q^\alpha \leq R} 1 = -M \lfloor (\ln R) / \ln q \rfloor. \end{aligned}$$

По условию леммы $M \leq C_2 n$, причем число C_2 можно считать целым, поэтому, полагая

$$D_2 = \prod_{q \leq R} q^{C_2 n \lfloor (\ln R) / \ln q \rfloor},$$

получим, что $0 < D_2 \in \text{den } \Theta_2$ и

$$\ln D_2 \leq C_2 n \sum_{q \leq R} \left\lfloor \frac{\ln R}{\ln q} \right\rfloor \ln q \leq C_2 n \ln R \sum_{q \leq R} 1 = O(nR),$$

последнее соотношение справедливо в силу известной оценки Чебышева для числа простых чисел, не превосходящих R (см. теорему 3.2 в [5]). Тем самым, неравенство (29) доказано.

В случаях $\sigma = 1$ и $\sigma = 0$ надо оценить числа $v_q((x_i; T)_{a_i}^{A_i})$ снизу, а $v_q((y_j; T)_{b_j}^{B_j})$ сверху. Мы будем использовать следующее двустороннее неравенство: если y , b и B — целые числа, лежащие в пределах $1 \leq y \leq T$, $0 \leq b < B < R$, и q — простое число, не делящее T , то

$$v_q((B - b)!) \leq v_q(y; T)_b^B \leq v_q((B - b)!) + \left\lfloor \frac{\ln(RT)}{\ln q} \right\rfloor \quad (31)$$

(см. доказательство теоремы 4.3 в [6], именно, оценку числа $\Delta_r^{(1)}$).

Рассмотрим случай $\sigma = 1$. Пусть q — простое число. Тогда, если $q \nmid T$, то справедливо неравенство $v_q(\theta_1) \geq 0$. Если же $q \mid T$, то во всяком случае

$$\begin{aligned} v_q(\theta_1) &\geq v_q \left(\prod_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \frac{1}{(A_i - a_i)!} \right) = - \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{A_i - a_i}{q^\alpha} \right\rfloor \\ &> - \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_i - a_i}{q^\alpha} = - \frac{S}{q-1} > - \frac{Rn}{q-1} \end{aligned}$$

(то, что $S < Rn$, мы уже видели при доказательстве утверждения 1).

Положим

$$D_1 = \prod_{q \mid T} q^{\lfloor Rn/(q-1) \rfloor}. \quad (32)$$

Тогда $0 < D_1 \in \text{den } \Theta_1$ и

$$\ln D_1 \leq Rn \sum_{q|T} \frac{\ln q}{q-1}.$$

Для доказательства (28) нам остается показать, что

$$\sum_{q|T} \frac{\ln q}{q-1} = O(\ln \ln T). \quad (33)$$

Пусть r — число простых чисел, входящих в разложение T . Так как функция $(\ln x)/(x-1)$ при $x \geq 2$ монотонно убывает, не ограничивая общности, можно считать, что $T = q_1 q_2 \dots q_r$ (рассуждение здесь то же, что и при доказательстве неравенства (14) леммы 1). Пользуясь оценкой (16), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{q|T} \frac{\ln q}{q-1} &= \sum_{k=1}^2 \frac{\ln q_k}{q_k-1} + \sum_{k=3}^r \frac{\ln q_k}{q_k-1} \\ &= O\left(1 + \sum_{k=3}^r \frac{\ln k}{k \ln k}\right) = O(\ln r). \end{aligned}$$

Так как $r = O(\ln T)$, то $\ln r = O(\ln \ln T)$, что и доказывает (33). Этим завершается рассмотрение случая $\sigma = 1$.

Пусть теперь $\sigma = 0$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $R \leq T^\alpha$, где $\alpha \in (1, 1, 2, 860357)$ — параметр, который мы уточним ниже. Положим

$$D_0 = \prod_{j=1}^n \prod_{h=0}^{R-1} (y_j + Th). \quad (34)$$

Ясно, что $0 < D_0 \in \text{den } \Theta_0$ и

$$\ln D_0 \leq Rn \ln(TR) \leq (\alpha + 1)Rn \ln T < 3,860357 Rn \ln T,$$

что и требовалось в (27).

2. Пусть $R > T^\alpha$. Число D_0 будем искать в виде $D_0 = D_{0,0} D_{0,1} D_{0,2}$, где $D_{0,k} > 0$, $k = 0, 1, 2$, будут определены позднее. Число $D_{0,0}$ будет отвечать за простые $q | T$, число $D_{0,1}$ — за простые $q \nmid T$, $q \leq R$, число $D_{0,2}$ — за остальные простые q . Тогда для доказательства (27) достаточно показать, что

$$\ln D_{0,0} \leq (1 + o(1))Rn \ln T, \quad (35)$$

$$\ln D_{0,1} = O(Rn), \quad (36)$$

$$\ln D_{0,2} \leq (\alpha + o(1))Rn \ln T. \quad (37)$$

Пусть q — простое число, $q | T$. Оценим кратность вхождения таких q в знаменатели чисел $\theta_0 \in \Theta_0$. Введем обозначения $u = v_q(T)$ и

$$\pi_j = (y_j; T)_{b_j}^{B_j} / (B_j - b_j)!, \quad j = 1, \dots, n.$$

Фиксируем временно число j . Пусть $v = v_q(y_j)$. Тогда, если $v < u$, то

$$v_q(\pi_j) = v(B_j - b_j) - v_q((B_j - b_j)!) \leq vR.$$

Если же $v \geq u$, то, пользуясь (31), получим, что

$$v_q(\pi_j) \leq uR + \left\lfloor \frac{\ln(RT)}{\ln q} \right\rfloor.$$

Пусть

$$D_{0,0} = \prod_{\substack{q|T \\ u=v_q(T)}} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq v=v_q(y_j) < u}} q^{Rv} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ v=v_q(y_j) \geq u}} q^{\lfloor \ln(RT)/\ln q \rfloor + Ru}. \quad (38)$$

Для всех простых $q | T$ и всех $\theta_0 \in \Theta_0$ справедливы неравенства $v_q(D_{0,0}\theta_0) \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \ln D_{0,0} &\leq \sum_{\substack{q|T \\ u=v_q(T)}} \left(Rnu + n \left\lfloor \frac{\ln(RT)}{\ln q} \right\rfloor \right) \ln q \\ &\leq Rn \ln T + n \ln(RT) \sum_{q|T} 1. \end{aligned}$$

Так как $R > T^\alpha > T$, то

$$\ln(RT) = O(\ln R) = o(R).$$

Ясно также, что

$$\sum_{q|T} 1 = O(\ln T).$$

Тем самым, установлена оценка (35) и рассмотрение случая $k = 0$ завершается.

Пусть $k = 1$, то есть рассматриваются простые $q \leq R$, не делящие T . Для таких q в силу (31) справедливы оценки

$$v_q(\pi_j) \leq \left\lfloor \frac{\ln(RT)}{\ln q} \right\rfloor, \quad j = 1, \dots, n.$$

Возьмем

$$D_{0,1} = \prod_{\substack{q \nmid T \\ q \leq R}} q^{n \lfloor \ln(RT)/\ln q \rfloor}.$$

Тогда $v_q(D_{0,1}\theta_0) \geq 0$ для всех рассматриваемых q и всех $\theta_0 \in \Theta_0$. Пользуясь тем, что $\ln(RT) = O(\ln R)$ (так как $R > T$) и неравенством Чебышева для числа простых, не превосходящих R (см. теорему 3.2 в [5]), находим, что

$$\ln D_{0,1} \leq n \ln(RT) \sum_{\substack{q \nmid T \\ q \leq R}} 1 = O \left(n \ln R \sum_{q \leq R} 1 \right) = O(Rn).$$

Тем самым, установлена оценка (36) и рассмотрение случая $k = 1$ завершено.

Пусть q — простое число, $q > R$. Оценим кратность вхождения таких q в знаменатели чисел $\theta_0 \in \Theta_0$. Прежде всего заметим, что $q \nmid (B_j - b_j)!$ (так как $B_j - b_j < R$), поэтому, $\nu_q(\pi_j) = \nu_q((y_j; T)_{b_j}^{B_j})$.

Допустим, что $q \mid (y_j; T)_{b_j}^{B_j}$ при некотором j . Так как $q > R$, а $y_j + TB_j \leq RT$, существует равенство вида

$$Aq = y_j + Th, \quad 0 \leq h < R, \quad 1 \leq A \leq T.$$

Число A не может делиться на q , так как $q > R > T$.

Пусть

$$D_{0,2} = \prod_{j=1}^n \prod_{A=1}^T \prod_{\substack{R < q < RT/A \\ T \mid (Aq - y_j)}} q. \quad (39)$$

Тогда $\nu_q(D_{0,2}\theta_0) \geq 0$ для всех рассматриваемых q и всех $\theta_0 \in \Theta_0$.

Заметим также, что если $T \mid (Aq - y_j)$, $d = (y_j, T)$, $y_j = dy_j^*$, $T = dT^*$, то $d \mid A$, $A = dA^*$, $T^* \mid (A^*q - y_j^*)$ и $(A^*, T^*) = 1$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \ln D_{0,2} &\leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ d=(y_j, T) \\ y_j^*=y_j/d \\ T^*=T/d}} \sum_{\substack{1 \leq A^* \leq T^* \\ (A^*, T^*)=1}} \sum_{\substack{q \leq RT^*/A^* \\ q \equiv y_j^* A^{*-1} \pmod{T^*}}} \ln q \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ d=(y_j, T) \\ y_j^*=y_j/d \\ T^*=T/d}} \sum_{\substack{A^*=1, \dots, T^* \\ (A^*, T^*)=1}} \theta\left(\frac{RT^*}{A^*}, T^*, y_j^* A^{*-1}\right), \end{aligned}$$

где

$$\theta(X, K, \Lambda) = \sum_{\substack{q - \text{простое} \\ q \leq X, q \equiv \Lambda \pmod{K}}} \ln q.$$

Для оценки числа $\theta(RT^*/A^*, T^*, y_j^* A^{*-1})$ мы рассмотрим два случая.

Если

$$T^* \leq \exp\left(c_2 \frac{\ln R}{\ln \ln R}\right),$$

где $c_2 > 0$ — некоторая достаточно малая абсолютная постоянная, то по теореме 2.1 главы 9 книги [5] получим, что

$$\theta(RT^*/A^*, T^*, y_j^* A^{*-1}) \leq \frac{(2 + o(1))RT^*}{\varphi(T^*)A^*}.$$

Если

$$T^* \geq \exp\left(c_2 \frac{\ln R}{\ln \ln R}\right),$$

то T^* растет с ростом T и

$$\frac{RT^*}{A^*} \geq R > T^\alpha \geq T^{*\alpha} > T^{*1.1} > T^* e^{(2 \ln T^*) / \ln \ln T^*}$$

при достаточно большом T , следовательно, выполнены условия леммы 2. С помощью этой леммы выводим, что

$$\begin{aligned} \theta(RT^*/A^*, T^*, y_j^* A^{*-1}) &\leq \left(\ln \frac{RT^*}{A^*} \right) \pi(RT^*/A^*, T^*, y_j^* A^{*-1}) \\ &\leq \left(\ln \frac{RT^*}{A^*} \right) \frac{2 + o(1)}{\varphi(T^*)} \frac{RT^*}{A^*} \frac{1}{\ln(R/A^*)} \\ &= \frac{(2 + o(1))RT^*}{\varphi(T^*)A^*} \frac{1}{1 - (\ln T^*)/\ln(RT^*/A^*)}. \end{aligned}$$

В любом случае

$$\ln D_{0,2} \leq R \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ y_j^* = y_j/d, \\ T^* = T/d}} \frac{T^*}{\varphi(T^*)} \sum_{\substack{1 \leq A^* \leq T^* \\ (A^*, T^*) = 1}} \frac{2 + o(1)}{A^* (1 - (\ln T^*)/\ln(RT^*/A^*))}. \quad (40)$$

Для оценки суммы по A^* мы рассмотрим два случая.

Если $T^* \leq \ln T$, то сумму мы оценим тривиально величиной $O(\ln(T^* + 2))$ (заметим, что множитель $1/(1 - (\ln T^*)/\ln(RT^*/A^*))$ уйдет в $O(1)$, потому что $R > T^{*1.1}$), что в силу (10) дает общий вклад в оценку $D_{0,2}$, не больший

$$O(R) \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ y_j^* = y_j/d, \\ T^* = T/d}} O(\ln \ln(T^* + 2) \ln(T^* + 2)) = O(Rn(\ln \ln T) \ln \ln \ln T) = o(Rn \ln T).$$

Если $T^* \geq \ln T$, то T^* растет с ростом T и мы можем применить лемму 1. Интервал суммирования $1 \leq A^* \leq T^*$ предварительно разобьем на несколько интервалов:

$$A^* \leq e^{S_1}, \quad A^* \in \bigcup_{S_1 < s \leq S_2} (e^{s-1}; e^s],$$

где

$$S_1 = \lceil (\ln T^*)/\ln \ln T^* \rceil, \quad S_2 = \lceil \ln T^* \rceil.$$

Строго говоря, множество целых чисел промежутка $(e^{S_1}; T^*]$ может не совпадать с множеством целых чисел промежутка

$$(e^{S_1}; e^{S_2}] = \bigcup_{S_1 < s \leq S_2} (e^{s-1}; e^s],$$

но нам достаточно того, что первое из этих множеств лежит во втором.

Сумма по $A^* \leq e^{S_1}$ в силу леммы 1 есть $O((\varphi(T^*) \ln T^*)/T^* \ln \ln T^*)$ и ее вклад в оценку числа $D_{0,2}$ есть $O((Rn \ln T)/\ln \ln T) = o(Rn \ln T)$.

На промежутке $e^{s-1} < A^* \leq e^s$ справедлива оценка сверху

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - (\ln T^*)/\ln(RT^*/A^*)} &\leq \frac{1}{1 - (\ln T^*)/\ln(RT^*/e^s)} \\ &< \frac{1}{1 - (\ln T^*)/\ln(T^{*(\alpha+1)}/e^s)} \\ &= \frac{(\alpha + 1) \ln T^* - s}{\alpha \ln T^* - s} \\ &= 1 + \frac{\ln T^*}{\alpha \ln T^* - s}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\sum_{\substack{e^{s-1} < A^* \leq e^s \\ (A^*, T^*)=1}} \frac{1}{A^*(1 - (\ln T^*)/\ln(RT^*/A^*))} \leq \left(1 + \frac{\ln T^*}{\alpha \ln T^* - s}\right) \sum_{\substack{e^{s-1} < A^* \leq e^s \\ (A^*, T^*)=1}} \frac{1}{A^*}.$$

Последнюю сумму мы оцениваем с помощью леммы 1, что дает неравенство

$$\sum_{\substack{e^{s-1} < A^* \leq e^s \\ (A^*, T^*)=1}} \frac{1}{A^*(1 - (\ln T^*)/\ln(RT^*/A^*))} \leq \left(1 + \frac{\ln T^*}{\alpha \ln T^* - s}\right) \frac{(1 + o(1))\varphi(T^*)}{T^*}.$$

Вклад всех промежутков $(e^{s-1}; e^s]$ в общую сумму по A^* не превышает

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(T^*)(1 + o(1))}{T^*} \sum_{1 \leq s \leq \lceil \ln T^* \rceil} \left(1 + \frac{\ln T^*}{\alpha \ln T^* - s}\right) \\ \leq \frac{\varphi(T^*)(1 + o(1))}{T^*} \ln T^* \left(1 + \sum_{1 \leq s \leq \lceil \ln T^* \rceil} \frac{1}{\alpha \ln T^* - s}\right). \end{aligned}$$

Функция $s \mapsto 1/(\alpha \ln T^* - s)$ монотонно растет на промежутке $[1; \lceil \ln T^* \rceil]$, а ее значения на этом промежутке есть $o(1)$, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq s \leq \lceil \ln T^* \rceil} \frac{1}{\alpha \ln T^* - s} &\leq \int_1^{\lceil \ln T^* \rceil} \frac{ds}{\alpha \ln T^* - s} + o(1) \\ &= \ln(\alpha \ln T^* - s) \Big|_1^{\lceil \ln T^* \rceil} + o(1) \\ &= \ln(\alpha \ln T^*) - \ln((\alpha - 1) \ln T^*) + o(1) \\ &= \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что вклад всех промежутков $(e^{s-1}; e^s]$ в общую сумму по A^* не превышает

$$\frac{\varphi(T^*)(1 + o(1))}{T^*} \ln T^* \left(1 + \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} + o(1)\right),$$

а соответствующий вклад в оценку числа $D_{0.2}$ из (40) не превышает

$$\left(2 + 2 \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} + o(1)\right) Rn \ln T.$$

Возьмем в качестве α корень уравнения

$$2 + 2 \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \alpha,$$

то есть $\alpha = 2,860356327 \dots < 2,860357$. Тогда получим, что число $D_{0.2}$ из (39) удовлетворяет оценке (37) и доказательство утверждения 2 леммы завершается.

Доказательство утверждения 3 легко вытекает из доказательства утверждения 2. Пусть сначала все ξ_i равны 1. Обозначим через $\Theta_{0,1}$ множество чисел вида $\theta_0\theta_1$, удовлетворяющих условиям леммы. Все отличие от предыдущего состоит в том, что Θ_0 , Θ_1 и D_1

теперь исключаются из рассмотрения, а на D_0 налагается условие $0 < D_0 \in \text{den } \Theta_{0,1}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \frac{(x_i; T)_{a_i}^{A_i}}{(A_i - a_i)!} &= T^{\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} (A_i - a_i)} \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \binom{A_i}{a_i} \\ &= T^{\sum_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} (B_j - b_j)} \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \binom{A_i}{a_i}, \end{aligned}$$

поэтому $\theta_0 \theta_1$ можно представить в виде

$$\theta_0 \theta_1 = \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_M\}} \binom{A_i}{a_i} \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_N\}} \frac{T^{B_j - b_j}}{\pi_j}.$$

Это показывает, что можно изменить определение числа $D_{0,0}$, взяв вместо (38)

$$D_{0,0} = \prod_{q|T} q^{n \lfloor (\ln(RT)) / \ln q \rfloor}. \quad (41)$$

Тем же рассуждением, что и выше, несложно показать, что $v_q(D_{0,0} \theta_0 \theta_1) \geq 0$ для всех $\theta_0 \theta_1 \in \Theta_{0,1}$ и $q \mid T$, а оценку (35) можно заменить оценкой $\ln D_{0,0} = o(Rn \ln T)$. Для числа $D_{0,2}$ теперь достаточно требовать выполнения не (37), а неравенства $\ln D_{0,2} \leq (\alpha + 1 + o(1)) Rn \ln T$, где в качестве α нужно взять корень уравнения

$$1 + 2 \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \alpha,$$

что дает $\alpha = 2,2069956422 \dots$. Значит, $\ln D \leq 3,207 Rn \ln T$ при достаточно большом T , что и требовалось доказать.

Рассмотрим второй случай, когда $|\{j = 1, \dots, n : d \mid y_j\}| \leq n/d$ для всех $d \mid T$. Мы возвращаемся к ситуации утверждения 2, но число $D_{0,0}$ из (38) оценим точнее. Пусть

$$t_q(v) = |\{j = 1, \dots, n : v_q(y_j) \geq v\}|.$$

Ясно, что $t_q(v) - t_q(v+1)$ есть число тех j , для которых $v_q(y_j) = v$, поэтому

$$\begin{aligned} \ln D_{0,0} &\leq R \sum_{\substack{q|T \\ u=v_q(T)}} \ln q \left(\sum_{1 \leq v < u} v(t_q(v) - t_q(v+1)) + \sum_{v \geq u} u(t_q(v) - t_q(v+1)) \right) \\ &\quad + n \ln(RT) \sum_{q|T} 1 = R \sum_{\substack{q|T \\ u=v_q(T)}} \ln q \sum_{1 \leq v \leq u} t_q(v) + O(n \ln R \ln T). \end{aligned}$$

По условию $t_q(v) \leq n/q^v$, следовательно,

$$\begin{aligned} \ln D_{0,0} &\leq Rn \sum_{\substack{q|T \\ u=v_q(T)}} \ln q \sum_{1 \leq v \leq u} \frac{1}{q^v} + o(Rn \ln T) \leq Rn \sum_{q|T} \frac{\ln q}{q-1} + o(Rn \ln T) \\ &= O(Rn \ln \ln T) + o(Rn \ln T) = o(Rn \ln T) \end{aligned}$$

(в предпоследнем переходе использована оценка (33)).

Это показывает, что число α можно выбрать в точности тем же, что и в предыдущем случае, чем и завершается доказательство леммы.

4. Доказательство теоремы

Пусть q — простое число. Ниже мы используем следующие стандартные обозначения: $\mathbf{Q}_q$ — замыкание $\mathbf{Q}$ по метрике $|x|_q = q^{-v_q(x)}$, где $v_q(x)$ — q -показатель числа x в $\mathbf{Q}$ (который продолжается до показателя в $\mathbf{Q}_q$); $\mathbf{Z}_q$ — замыкание $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Q}_q$.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы заменить число λ из формулировки теоремы на

$$\mu = (1 - p^E/a)^{1/T} \in \mathbf{Z}_p.$$

Для этого достаточно показать, что $\lambda \equiv \mu \pmod{W}$ в $\mathbf{Z}_p$.

Разлагая оба числа λ и μ в биномиальный ряд, видим, что достаточно доказать справедливость неравенства

$$v_p \left(\binom{1/T}{f} - \binom{T'}{f} \right) + Ef \geq v_p(W)$$

при любом $f > 0$. В силу тождества

$$\binom{X+Y}{f} = \sum_{i,j \geq 0, i+j=f} \binom{X}{i} \binom{Y}{j}$$

для биномиальных коэффициентов [4] это сводится к доказательству того, что

$$v_p \left(\binom{T'}{i} \right) + v_p \left(\binom{\omega W}{j} \right) + E(i+j) \geq v_p(W)$$

при условии, что $i \geq 0$, $j \geq 1$ и $\omega \in \mathbf{Z}_p$. Но последнее верно, потому что

$$\binom{\omega W}{j} = \frac{\omega W}{j} \binom{\omega W - 1}{j-1}$$

при $j \geq 1$, и следовательно,

$$v_p \left(\binom{\omega W}{j} \right) \geq v_p(W) - v_p(j).$$

Далее мы доказываем теорему в терминах числа μ . Мы используем следующую хорошо известную конструкцию (см. [6]), носящую название приближений Эрмита–Паде для совокупности функций $(1-z)^{\omega_j}$, $j = 1, \dots, L$.

Пусть $\rho = \lceil F/(EL) \rceil$ — число из теоремы, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $\rho_{i,j} = \rho + \delta_{i,j}$. Рассмотрим комплексный интеграл

$$J_i(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathcal{L}} (1-z)^\zeta \prod_{j=1}^L \prod_{s=0}^{\rho_{i,j}-1} \frac{d\zeta}{\zeta - \omega_j - s},$$

где $\mathcal{L}$ — контур, охватывающий все полюсы подынтегральной функции. Вычисляя его как сумму вычетов в конечных точках, получим, что

$$J_i(z) = \sum_{j=1}^L (1-z)^{\omega_j} P_{i,j}(z),$$

где

$$P_{i,j}(z) = \sum_{s=0}^{\rho_{i,j}-1} (1-z)^s p_{i,j,s},$$

$$p_{i,j,s} = \prod_{\substack{1 \leq J \leq L \\ 0 \leq S \leq \rho_{i,j}-1 \\ (J,S) \neq (j,s)}} \frac{1}{\omega_j + s - \omega_J - S}.$$

С другой стороны, вычет в ∞ есть

$$\sum_{\substack{\mu_0 \geq 0, \mu_{j,s} \geq 0, j=1, \dots, L, s=0, \dots, \rho_{i,j}-1 \\ \mu_0 - \sum_{j,s} \mu_{j,s} = \sum_j \rho_{i,j} - 1 = \rho L}} \frac{(\ln(1-z))^{\mu_0}}{v_0!} \prod_{\substack{1 \leq j \leq L \\ 0 \leq s \leq \rho_{i,j}-1}} (\omega_j + s)^{\mu_{j,s}}.$$

В последней сумме суммирование ведется по всем $\mu_0 \geq 0$ и $\mu_{j,s} \geq 0$ для $j = 1, \dots, L$, $s = 0, \dots, \rho_{i,j} - 1$, удовлетворяющим равенству $\mu_0 - \sum_{j,s} \mu_{j,s} = \rho L$, при этом порядок нуля в точке $z = 0$ слагаемого, соответствующего $\mu_0 = \rho L$, $\mu_{j,s} = 0$ (для любых j, s), строго меньше порядка нуля всех прочих слагаемых и равен ρL . Значит, порядок нуля интеграла $J_i(z)$ равен ρL и $J_i(z) \neq 0$ для $i = 1, \dots, L$.

Теперь возьмем $\omega_j = j/T$, $j = 1, \dots, L$ и оценим сверху максимум модуля получающихся чисел, если домножить все $p_{i,j,s}$ на их наименьший общий знаменатель. Предварительно выделим в $p_{i,j,s}$ два множителя

$$p'_{i,j,s} = \prod_{\substack{1 \leq J \leq L \\ J \neq j, 0 \leq S \leq \rho_{i,j}-1}} \frac{1}{\omega_j + s - \omega_J - S},$$

$$p''_{i,j,s} = \prod_{\substack{0 \leq S \leq \rho_{i,j}-1 \\ S \neq s}} \frac{1}{s - S},$$

так что $p_{i,j,s} = p'_{i,j,s} p''_{i,j,s}$.

Относительно $p''_{i,j,s}$ проблем нет: все $\rho! p''_{i,j,s}$ — целые и ограничены по модулю величиной 2^ρ . В случае с числами $p'_{i,j,s}$ применим лемму 3. Чтобы проверить ее условия, рассмотрим совокупность

$$\Theta' = \{(\rho!)^{L-1} |p'_{i,j,s}| : i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, L, s = 0, 1, \dots, \rho_{i,j} - 1\}.$$

Ясно, что Θ' лежит в Θ , если взять (в обозначениях леммы 3)

$$\begin{aligned} m &= L, & n &= 2L - 2, & R &= \rho + 1, & T &= T, \\ \xi_i &= 1, & i &= 1, \dots, L, \\ \eta_j &= j/T, & j &= 1, \dots, L - 1, \\ \eta_{j+L-1} &= 1 - j/T, & j &= 1, \dots, L - 1 \end{aligned}$$

(относительно последнего условия леммы заметим, что в нашем случае всегда

$$\sum_{j=1, \dots, j_N} (B_j - b_j) \in [\rho(L-1); \rho(L-1) + 1],$$

этим оправдывается возможность введения поправочного множителя $(\rho!)^{L-1}$, то есть возможность считать, что $M = L-1$ или $M = L$ и для всех $i = i_1, \dots, i_M$ за исключением, быть может, одного имеют место равенства $A_i = \rho$, $a_i = 0$.)

Из первого утверждения леммы 3 следует, что

$$\ln \max \Theta' = n \ln T + o(Rn \ln T). \quad (42)$$

Для оценки минимума D' абсолютных величин ненулевых элементов множества $\text{den}(\Theta')$ мы воспользуемся доказательством второй части утверждения 3 леммы 3. Если перейти к обозначениям этого доказательства, то для $D_{0,0}$ можно написать оценку

$$\ln D_{0,0} = o(Rn \ln T)$$

(потому что выполнено предположение о числе элементов множества $\{j: d \mid y_j\}$ для $d \mid T$), а число D_1 из (32) можно заменить на $T^{-\rho(L-1)}$, потому что все $\theta_1 \in \Theta_1$ делятся на $T^{\rho(L-1)}$. Тем самым, мы получаем два неравенства

$$\ln D_0 \leq 3,206996Rn \ln T, \quad \ln D_1 = -\rho(L-1) \ln T,$$

откуда с учетом оценки $\ln D_2 = O(Rn)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \ln D' &\leq 3,206996Rn \ln T - (R-1)\frac{n}{2} \ln T + O(Rn) \\ &= 2,706996Rn \ln T + O(Rn + n \ln T). \end{aligned}$$

В обозначениях теоремы

$$\ln D' \leq 5,413992\rho(L-1) \ln T + O(\rho L + L \ln T).$$

Соединяя это с оценкой (42) для $\ln \max \Theta'$, получим, что

$$\ln \max D' \Theta' \leq 5,414\rho(L-1) \ln T + O(L \ln T) \quad (43)$$

при достаточно большом T .

Покажем, что если число T достаточно велико, то в (43) можно убрать слагаемое $O(L \ln T)$. При $\rho > \ln T$ это ясно непосредственно, так как мы имеем право уменьшить константу 5,414 до 5,413992, при этом величина $L \ln T$ будет асимптотически мала по сравнению с $\rho(L-1) \ln T$. Если же $\rho \leq \ln T$, то из неравенства (42) и доказательства утверждения 2 леммы 3 (оценка D_0) следует более сильная, чем (43), оценка

$$\begin{aligned} \ln \max D' \Theta' &\leq (1 + o(1))Rn \ln T + n \ln T \\ &= (2 + o(1))\rho(L-1) \ln T + 4(L-1) \ln T, \end{aligned} \quad (44)$$

так как при рассмотрении случая $\sigma = 0$ мы можем ограничиться величиной D_0 из (34) с $\alpha = o(1)$. Но $(2 + o(1))\rho + 4 < 5,414\rho$ при всех $\rho \geq 2$ и достаточно большом T . Заметим, что мы можем изначально предполагать, что $\rho > L$ (следовательно, $\rho \geq 3$) ввиду замечания 2, сделанного после формулировки теоремы (при $\rho \leq L$ утверждение теоремы теряет смысл). Итак,

$$\ln |p_{i,j,s}^*| \leq 5,414\rho(L-1) \ln T, \quad p_{i,j,s}^* = D'(\rho!)^L p_{i,j,s},$$

если T достаточно велико.

Теперь положим

$$P_{i,j}^*(z) = \sum_{s=0}^{\rho_{i,j}-1} (1-z)^s P_{i,j,s}^*,$$

$$J_i^*(z) = \sum_{j=1}^L (1-z)^{\omega_j} P_{i,j}^*(z).$$

По определению ряды $J_i^*(z)$ имеют целые коэффициенты в поле $\mathbf{Q}_p$ и первый ненулевой коэффициент у них стоит при степени $z^{\rho L}$. Далее, определитель

$$\Delta^*(z) = \det(P_{i,j}^*(z))$$

матрицы $(P_{i,j}^*)$ размера $L \times L$ не равен 0 для $z \neq 0$, так как, с одной стороны, этот определитель есть многочлен от z степени ρL (что легко установить, рассмотрев старшие члены многочленов $P_{i,j}^*(z)$), а с другой стороны, он делится на $z^{\rho L}$ (поскольку первый столбец определителя $\Delta^*(z)$ можно сложить с соответствующей линейной комбинацией остальных столбцов и получить на i -й позиции степенной ряд $(1-z)^{-1/T} J_i^*(z)$, а все такие ряды делятся на $z^{\rho L}$).

Теперь мы вплотную приблизились к доказательству теоремы.

Предположим, что $\bar{h} = (h_1, \dots, h_L)$ — ненулевой набор целых чисел, на котором достигается минимум $e_L(\lambda)$. Положим $h_{i,j}^* = a^\rho P_{i,j}^*(p^E/a)$ для всех i, j . Числа $h_{i,j}^*$ целые и при достаточно большом T ограничены сверху величиной

$$H^* = p^{\rho E} T^{5.414\rho(L-1)}, \quad (45)$$

потому что $\ln L$ асимптотически мал по сравнению с $\rho(L-1) \ln T$ и то же касается евклидовых длин векторов

$$\bar{h}_i^* = (h_{i,1}^*, \dots, h_{i,L}^*). \quad (46)$$

Линейные комбинации

$$\sum_{j=1}^L h_{i,j}^* \mu^j = \sum_{j=1}^L a^\rho P_{i,j}^*(p^E/a) (1 - p^E/a)^{j/T}$$

$$= a^\rho J_i^*(p^E/a), \quad i = 1, \dots, L$$

есть целые числа поля $\mathbf{Q}_p$, делящиеся на W (потому что $J_i^*(z)$ делятся на $z^{\rho L}$, а $\rho EL \geq F = v_p(W)$ по определению числа ρ).

Определитель Δ^* , строками которого являются векторы (46), не равен нулю. Заменим в Δ^* одну из строк строкой $\bar{h}$, так чтобы полученный определитель (обозначим его Δ_1^*) также не был равен нулю. Из тех же соображений, что и выше (рассуждение о замене первого столбца определителя на его сумму с линейной комбинацией остальных) вытекает, что Δ_1^* — целое число, делящееся на W . Следовательно, $|\Delta_1^*| \geq p^F$. С другой стороны, из неравенства Адамара [4] вытекает верхняя оценка

$$|\Delta_1^*| \leq e_L(\lambda) H^{*L-1}.$$

Сравнивая эти оценки и учитывая (45), находим, что

$$\begin{aligned} e_L(\lambda) &\geq (p^{\rho E} T^{5,414\rho(L-1)})^{-(L-1)} p^F \\ &= (p T^{5,414(L-1)/E})^{-(L-1)\rho E} p^F. \end{aligned}$$

Из определения числа ρ вытекает оценка $E < F/((\rho - 1)L)$, откуда,

$$\rho E(L - 1) < F \frac{\rho(L - 1)}{(\rho - 1)L} = F \left(1 - \frac{1}{L} + \frac{L - 1}{L(\rho - 1)} \right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} e_L(\lambda) &\geq p^{F/L - (L-1)F/(L(\rho-1))} T^{-5,414(L-1)(1-1/L)(1+1/(\rho-1))F/E} = W^{1/L - (1-1/L)\delta} \\ \delta &= \frac{1}{\rho - 1} + \frac{5,414(L - 1)(1 + 1/(\rho - 1)) \ln T}{E \ln p}. \end{aligned} \quad (47)$$

В выражении для δ скобку $1 + 1/(\rho - 1)$ можно убрать, пользуясь теми же соображениями, что и выше: при $\rho \geq \ln T$ потому, что константу 5,414 можно слегка уменьшить, а при $\rho \leq \ln T$ потому, что, как мы видели выше (см. (44)), величину $5,414\rho(L - 1) \ln T$, участвующую в выражении для δ (47), можно заменить на $((2 + o(1))\rho + 4)(L - 1) \ln T$. Но

$$\frac{(2 + o(1))\rho + 4}{\rho - 1} < 5,414$$

при $\rho \geq 3$ и достаточно большом T . Следовательно, число δ будет иметь тот же вид, что и в теореме, что и требовалось доказать.

5. Числовой пример

По техническим причинам мы были вынуждены ограничиться случаем $W < 2^{31}$, поэтому рассматриваемый ниже пример весьма далек от той ситуации, при которой оценка теоремы обретает смысл. Тем не менее он позволяет составить первое впечатление о качестве предлагаемых датчиков.

Напомним, что ставится задача проверки последовательности (3) на близость к случайной, причем под близостью к случайной последовательности в данном случае имеется в виду успешное прохождение спектрального теста в сильной форме. Для того чтобы датчик (1) периода максимальной длины при данном L проходил спектральный тест в сильной форме, должно выполняться неравенство $\gamma_L(\lambda) \geq 0.1$, где $\gamma_L(\lambda)$ определено в (5). В приводимой ниже таблице в качестве λ берутся числа теоремы 1 с параметрами $\rho = 211$, $E = 1$, $F = T = 4$ и $a = -1, \dots, -40$. Данный выбор параметров можно считать относительно произвольным, учитывая, что мы стремились, с одной стороны, удержать модуль $W = p^F$ в границе $W < 2^{31}$, а с другой стороны, сделать его (равно как и число p^E в соответствии с замечанием 2 после формулировки теоремы) достаточно большим. Еще раз подчеркнем, что ввиду малости выбранных нами параметров F , T , $\rho = \lceil F/(EL) \rceil$ и p^E и несоблюдения в достаточной мере требований замечания 2, данный пример не следует считать иллюстрацией к доказанной теореме. Тем не менее оказывается, что из 40 рассматриваемых датчиков лишь для одного величина $\min_{L=2,3,4} \gamma_L(\lambda)$ меньше 0.1 (при $a = -3$). Остальные 39 датчиков успешно проходят спектральный тест в сильной форме.

Таблица 1. $p = 211$, $E = 1$, $F = T = 4$

a	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$\gamma_2(\lambda)$	2,7202	2,4124	0,0889	2,1585	2,2232	2,4230	2,7634	0,1300
$\gamma_3(\lambda)$	0,2361	0,2509	0,2664	0,2824	0,2992	0,3166	0,3346	0,3534
$\gamma_4(\lambda)$	3,8501	3,1470	1,8073	0,7334	1,0222	2,9986	3,6051	2,5416
a	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16
$\gamma_2(\lambda)$	2,5382	2,8393	1,9248	2,8457	0,3232	1,1774	1,5310	0,7534
$\gamma_3(\lambda)$	0,3729	0,3931	0,4140	0,4357	0,4581	0,4813	0,5054	0,5302
$\gamma_4(\lambda)$	2,1747	5,7575	2,9443	1,5077	0,8752	0,7034	0,8789	0,5195
a	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-24
$\gamma_2(\lambda)$	2,7873	0,6983	2,0789	0,6314	0,8201	2,1168	1,2871	2,8480
$\gamma_3(\lambda)$	0,5558	0,5822	0,6095	0,6377	0,6667	0,6966	0,7274	0,7591
$\gamma_4(\lambda)$	0,6587	0,5135	0,5639	0,8365	1,4583	1,7307	2,7877	4,8531
a	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	-32
$\gamma_2(\lambda)$	0,2500	2,3900	1,4969	2,1231	1,0073	0,5040	2,7350	0,9527
$\gamma_3(\lambda)$	0,7918	0,8253	0,8599	0,8953	0,9318	0,9692	1,0077	1,0472
$\gamma_4(\lambda)$	1,2001	3,1693	0,6815	0,4956	2,3755	3,8433	2,8082	2,1974
a	-33	-34	-35	-36	-37	-38	-39	-40
$\gamma_2(\lambda)$	3,2421	0,5183	1,5185	0,8822	0,5111	2,7612	1,6610	2,9962
$\gamma_3(\lambda)$	1,0877	1,1292	1,1718	1,2155	1,2603	1,3061	1,3531	1,4012
$\gamma_4(\lambda)$	3,3196	3,4023	2,9866	2,0221	0,5613	0,4693	0,3717	0,6776

Список литературы

1. Виноградов И. М., *Основы теории чисел*. Наука, Москва, 1981.
2. Дэвенпорт Г., *Мультипликативная теория чисел*. Наука, Москва, 1971.
3. Кнут Д., *Искусство программирования для ЭВМ*. т. 2: *Получисленные алгоритмы*. Мир, Москва, 1977.
4. Корн Г., Корн Т., *Справочник по математике*. Наука, Москва, 1973.
5. Прахар К., *Распределение простых чисел*. Мир, Москва, 1967.
6. Chudnovsky G. V., On the method of Tue-Siegel. *Ann. Math.* (1983) **117**, 325–382.
7. Hata M., Legendre type polynomials and irrationality measures. *J. Reine und Angewandte Math.* (1990) **407**, 99–125.
8. Hata M., A lower bound for rational approximations to π . *J. Number Theory* (1993) **43**, 51–67.
9. Hata M., Rational approximations to π and some other numbers. *Acta Arithmetica* (1993) **153**, 335–349.
10. Heimonen A., *On effective irrationality measures for some values of certain hypergeometric functions*. Diss. Oulu Univ., Oulu, 1997.

Статья поступила 26.02.2003.