Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Алексеев, О числе отображений типа замыкания, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 2, 85–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:42:06

О числе отображений типа замыкания

© 2004 г. В. Б. Алексеев

В работе рассматриваются отображения декартовых степеней S^n произвольного частично упорядоченного множества S в себя, обладающих основными свойствами замыканий. Для каждого частично упорядоченного множества установлена асимптотика логарифма числа таких отображений при $n \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 03-01-00783.

1. Введение

В математике существуют различные операции замыкания φ , которые сопоставляют каждому подмножеству A некоторого множества новое подмножество $\varphi(A)$. При этом основными свойствами таких операций являются следующие: для любых подмножеств A и B выполняются условия

$$\varphi(A) \supseteq A, \quad (A \subseteq B) \implies (\varphi(A) \subseteq \varphi(B)), \quad \varphi(\varphi(A)) = \varphi(A).$$

Используемое здесь отношение включения для подмножеств является частным случаем отношения частичного порядка, что позволяет обобщить понятие замыкания на произвольные частично упорядоченные множества.

Определение 1. Пусть S — частично упорядоченное множество. Отображение $\varphi: S \rightarrow S$ будем называть операцией замыкания (или просто замыканием), если для любых элементов $a \in S$, $b \in S$ выполняются условия

$$\varphi(a) \geq a, \quad (a \leq b) \implies (\varphi(a) \leq \varphi(b)), \quad \varphi(\varphi(a)) = \varphi(a).$$

Если S — некоторое множество и n — натуральное число, то через S^n будем обозначать декартову степень множества S , то есть множество всех наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ длины n с элементами из S . При этом, если на S задано отношение частичного порядка $\leq$, то будем считать, что на S^n индуцируется отношение

$$\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \iff \forall i (\alpha_i \leq \beta_i),$$

где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Это отношение на S^n также будет отношением частичного порядка.

В данной статье мы для каждого фиксированного конечного частично упорядоченного множества S установим асимптотику логарифма (при $n \rightarrow \infty$) числа всевозможных различных операций замыкания на частично упорядоченном множестве S^n . Для случая, когда $|S| = 2$, это сделано в [1]. Для каждого собственного подмножества условий, налагаемых на операцию замыкания, в [4, 5, 6] изучено поведение при $n \rightarrow \infty$ числа отображений частично упорядоченного множества S^n в себя, удовлетворяющих этим условиям.

2. Некоторые свойства замыканий

Определение 2. Пусть φ — замыкание на частично упорядоченном множестве S . Элемент $a \in S$ будем называть замкнутым относительно φ , если $\varphi(a) = a$. Через C_φ будем обозначать множество всех элементов из S , замкнутых относительно φ .

Лемма 1. Пусть S — частично упорядоченное множество, и пусть φ_1, φ_2 — два замыкания на S . Тогда если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то $C_{\varphi_1} \neq C_{\varphi_2}$.

Доказательство. По условию существует $a \in S$ такое, что $\varphi_1(a) \neq \varphi_2(a)$. Тогда либо $\varphi_1(a) \not\leq \varphi_2(a)$, либо $\varphi_2(a) \not\leq \varphi_1(a)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi_1(a) \not\leq \varphi_2(a)$. Так как φ_2 — замыкание, то $a \leq \varphi_2(a)$, а так как φ_1 — замыкание, то $\varphi_1(a) \leq \varphi_1(\varphi_2(a))$. Поскольку $\varphi_1(a) \not\leq \varphi_2(a)$, отсюда следует, что $\varphi_1(\varphi_2(a)) \neq \varphi_2(a)$, то есть $\varphi_2(a) \notin C_{\varphi_1}$. С другой стороны, $\varphi_2(\varphi_2(a)) = \varphi_2(a)$, то есть $\varphi_2(a) \in C_{\varphi_2}$. Следовательно, $C_{\varphi_1} \neq C_{\varphi_2}$.

Если S — частично упорядоченное множество с отношением $a \leq b$, то под $a < b$ будем понимать отношение $(a \leq b) \ \& \ (a \neq b)$.

Определение 3. Пусть S — частично упорядоченное множество. Через $\text{Max}(S)$ будем обозначать множество всех максимальных элементов в S , то есть всех элементов $a \in S$ таких, что не существует $b \in S$, удовлетворяющего условию $a < b$.

Если S — конечное частично упорядоченное множество, то, очевидно, множество $\text{Max}(S)$ не пусто.

Определение 4. Пусть S — частично упорядоченное множество и $N \subseteq S$. Элемент $a \in S$ называется нижней гранью подмножества N , если $a \leq b$ для всех $b \in N$. Элемент $a \in S$ называем максимальной нижней гранью подмножества N , если a — нижняя грань для N и не существует $b \in S$ такого, что $a < b$ и b — нижняя грань для N .

Заметим, что у N может вовсе не быть нижних граней и может существовать несколько максимальных нижних граней.

Определение 5. Пусть S — частично упорядоченное множество и $N \subseteq S$. Через $\text{Inf}(N)$ будем обозначать множество всех максимальных нижних граней подмножества N в S .

Определение 6. Пусть S — частично упорядоченное множество и $M \subseteq S$. Будем говорить, что M замкнуто относительно Inf , если для любого $N \subseteq M$ справедливо включение $\text{Inf}(N) \subseteq M$.

Лемма 2. Пусть S — частично упорядоченное множество и φ — произвольное замыкание на S . Тогда подмножество замкнутых элементов C_φ содержит $\text{Max}(S)$ и замкнуто относительно Inf .

Доказательство. Пусть $a \in \text{Max}(S)$. Поскольку $a \leq \varphi(a)$, то $\varphi(a) = a$, то есть $a \in C_\varphi$. Поэтому $\text{Max}(S) \subseteq C_\varphi$. Пусть $N \subseteq C_\varphi$ и $N = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$. Тогда $\varphi(b_i) = b_i$ для всех i . Пусть $a \in \text{Inf}(N)$. Тогда $a \leq b_i$ для всех i , и поэтому $\varphi(a) \leq \varphi(b_i) = b_i$ для всех i . Таким образом, $\varphi(a)$ — нижняя грань для N . Поскольку $a \in \text{Inf}(N)$, то $a \not\leq \varphi(a)$. Но $a \leq \varphi(a)$, следовательно, $a = \varphi(a)$ и $a \in C_\varphi$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть S — частично упорядоченное множество, $C \subseteq S$ и $\text{Inf}(C) \subseteq C$. Тогда $|\text{Inf}(C)| \leq 1$.

Доказательство. Пусть $d_1 \in \text{Inf}(C)$ и $d_2 \in \text{Inf}(C)$. Так как $\text{Inf}(C) \subseteq C$, то $d_1 \in C$ и $d_2 \in C$. Поскольку $d_1 \in \text{Inf}(C)$, то $d_1 \leq d_2$. Аналогично, $d_2 \leq d_1$. Отсюда, $d_1 = d_2$ и $|\text{Inf}(C)| \leq 1$.

Лемма 4. Пусть S — частично упорядоченное множество, $C \subseteq S$ и C замкнуто относительно Inf . Пусть

$$a \in S, \quad U(a) = \{b \in S \mid a \leq b\}, \quad C_a = U(a) \cap C, \quad C_a \neq \emptyset.$$

Пусть $\text{Inf}_a(C_a)$ — множество всех максимальных нижних граней подмножества C_a в частично упорядоченном множестве $U(a)$. Тогда

$$\text{Inf}_a(C_a) \subseteq C_a, \quad |\text{Inf}_a(C_a)| = 1.$$

Доказательство. Пусть $g \in \text{Inf}_a(C_a)$. Докажем, что $g \in \text{Inf}(C_a)$ (в S). Пусть $g \leq h$ и h — нижняя грань множества C_a в S . Поскольку $g \in U(a)$, то $a \leq g \leq h$, то есть $h \in U(a)$ и, следовательно, h — нижняя грань множества C_a в $U(a)$. Но $g \in \text{Inf}_a(C_a)$, поэтому $h = g$. Таким образом, g — максимальная нижняя грань для C_a в S , то есть $g \in \text{Inf}(C_a)$. Поскольку C замкнуто относительно Inf , то $g \in C$. Но $g \in U(a)$, поэтому $g \in C_a$. Мы доказали, что $\text{Inf}_a(C_a) \subseteq C_a$. Тогда по лемме 3 $|\text{Inf}_a(C_a)| \leq 1$. С другой стороны, a — нижняя грань для C_a в $U(a)$. Поэтому $\text{Inf}_a(C_a) \neq \emptyset$ и $|\text{Inf}_a(C_a)| = 1$.

Лемма 5. Пусть S — частично упорядоченное множество, $C \subseteq S$, $C \supseteq \text{Max}(S)$ и C замкнуто относительно Inf . Тогда существует замыкание φ на S такое, что $C_\varphi = C$.

Доказательство. Пусть $a \in S$. Положим

$$U(a) = \{b \in S \mid a \leq b\}, \quad C_a = U(a) \cap C.$$

Так как $U(a) \cap \text{Max}(S) \neq \emptyset$ и $C \supseteq \text{Max}(S)$, то $C_a \neq \emptyset$. По лемме 4 $|\text{Inf}_a(C_a)| = 1$, то есть $\text{Inf}_a(C_a) = \{g_a\}$. Пусть φ каждый элемент $a \in S$ отображает в соответствующий элемент g_a . Докажем, что φ — замыкание и $C_\varphi = C$. Сначала проверим выполнение трех свойств замыкания.

- (1) Так как $g_a \in U(a)$, то $a \leq g_a = \varphi(a)$.
- (2) Если $a \leq b$, то $U(a) \supseteq U(b)$ и $C_a \supseteq C_b$. Так как $g_b \in \text{Inf}_b(C_b) \subseteq C_b$, то $g_b \in C_a$, а так как $g_a \in \text{Inf}_a(C_a)$, то $g_a \leq g_b$.
- (3) Так как $g_a \in \text{Inf}_a(C_a)$, то $C_a \subseteq U(g_a)$ и $C_{g_a} = U(g_a) \cap C \supseteq C_a$. С другой стороны, так как $a \leq g_a$, то $C_{g_a} \subseteq C_a$. Отсюда $C_a = C_{g_a}$. Поскольку $U(g_a) \subseteq U(a)$ и $g_a \in \text{Inf}_a(C_a)$, то $g_a \in \text{Inf}_{g_a}(C_a) = \text{Inf}_{g_a}(C_{g_a})$. Так как $|\text{Inf}_a(C_a)| = 1$ (лемма 4), то $\varphi(g_a) = g_a$, то есть $\varphi(\varphi(a)) = \varphi(a)$.

Таким образом, φ — замыкание. Докажем, что $C_\varphi = C$. Если $a \in C$, то $a \in C_a$ и $g_a \leq a$. Отсюда, $\varphi(a) = g_a = a$, то есть $a \in C_\varphi$. Пусть $a \notin C$. Поскольку (лемма 4) $g_a \in C$, то $\varphi(a) = g_a \neq a$. Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 и 5 получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Число различных замыканий на частично упорядоченном множестве S равно числу всех различных подмножеств в S , содержащих $\text{Max}(S)$ и замкнутых относительно Inf .

Определение 7. Пусть S — частично упорядоченное множество. Элемент $a \in S$ называется стабильным, если он замкнут относительно любой операции замыкания φ на S , то есть $\varphi(a) = a$ для любого замыкания на S . Через $\text{St}(S)$ будем обозначать множество всех стабильных элементов из S .

Существуют частично упорядоченные множества, в которых все элементы являются стабильными, то есть на таких множествах существует ровно одна операция замыкания (тождественное отображение). Примером такого множества, где $\text{St}(S) = S$ и $\text{Max}(S) \neq S$, может служить множество с элементами $\{0, 1, 2\}$ и отношением $\leq$ таким, что $0 \leq 1, 0 \leq 2$, 1 и 2 — несравнимы. Следующая теорема характеризует множество $\text{St}(S)$.

Теорема 2. Пусть S — частично упорядоченное множество. Тогда множество $\text{St}(S)$ — это минимальное подмножество в S , содержащее $\text{Max}(S)$ и замкнутое относительно Inf .

Доказательство. По определению $\text{St}(S)$ — это пересечение всех подмножеств C_φ для всех замыканий φ . Поскольку $\text{Max}(S) \subseteq C_\varphi$ для любого замыкания φ , то $\text{Max}(S) \subseteq \text{St}(S)$. Пусть $C \subseteq \text{St}(S)$. Тогда $C \subseteq C_\varphi$ для всех замыканий φ . Поскольку все C_φ замкнуты относительно Inf (лемма 2), то $\text{Inf}(C) \subseteq C_\varphi$ для всех замыканий φ , то есть $\text{Inf}(C) \subseteq \text{St}(S)$. Таким образом, $\text{St}(S)$ замкнуто относительно Inf . С другой стороны, для любого подмножества C , содержащего $\text{Max}(S)$ и замкнутого относительно Inf , существует замыкание φ такое, что $C_\varphi = C$, и следовательно, $\text{St}(S) \subseteq C_\varphi = C$. Теорема доказана.

Пусть S — частично упорядоченное множество. Рассмотрим частично упорядоченное множество S^n (см. Введение).

Лемма 6. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — замыкания на частично упорядоченном множестве S , и пусть операция φ на S^n определена условием

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2), \dots, \varphi_n(\alpha_n)).$$

Тогда φ — операция замыкания на S^n .

Доказательство. Проверим выполнение трех свойств замыкания.

- (1) Так как все φ_i — замыкания, то $\alpha_i \leq \varphi_i(\alpha_i)$ для всех i . По определению это означает, что

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\varphi_1(\alpha_1), \dots, \varphi_n(\alpha_n)) = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

- (2) Если $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ и $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, то $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех i . Так как все φ_i — замыкания, то $\varphi_i(\alpha_i) \leq \varphi_i(\beta_i)$ для всех i , то есть $\varphi(\tilde{\alpha}) \leq \varphi(\tilde{\beta})$.

- (3) Ясно, что

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) &= \varphi(\varphi_1(\alpha_1), \dots, \varphi_n(\alpha_n)) = (\varphi_1(\varphi_1(\alpha_1)), \dots, \varphi_n(\varphi_n(\alpha_n))) \\ &= (\varphi_1(\alpha_1), \dots, \varphi_n(\alpha_n)) = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть φ — операция замыкания на S^n , и пусть $a_2, a_3, \dots, a_n$ — фиксированные элементы из S . Пусть операция φ_1 на S определена следующим условием: если $\varphi(a, a_2, \dots, a_n) = (c, c_2, \dots, c_n)$, то $\varphi_1(a) = c$.

Тогда φ_1 — операция замыкания на S .

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 8. Если S — частично упорядоченное множество, то $\text{St}(S^n) = [\text{St}(S)]^n$ для любого натурального n .

Доказательство. 1. Пусть $(a_1, \dots, a_n) \in \text{St}(S^n)$. Пусть φ — замыкание на S . Рассмотрим операцию $\varphi = \varphi_1 \times e \times e \times \dots \times e$ на S^n , где e — тождественное отображение на S . Так как e — замыкание, по лемме 6 операция φ является операцией замыкания на S^n . Так как $(a_1, \dots, a_n) \in \text{St}(S^n)$, то $\varphi(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n)$, и значит, $\varphi_1(a_1) = a_1$. Поскольку это верно для любого замыкания φ_1 на S , то $a_1 \in \text{St}(S)$. Аналогично, $a_i \in \text{St}(S)$ для всех i , то есть $(a_1, \dots, a_n) \in [\text{St}(S)]^n$.

2. Пусть $(a_1, \dots, a_n) \in [\text{St}(S)]^n$. Докажем от противного, что

$$(a_1, \dots, a_n) \in \text{St}(S^n).$$

Допустим, что это не так, то есть существует замыкание φ на S^n такое, что $\varphi(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \neq (a_1, \dots, a_n)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $b_1 \neq a_1$. Зафиксируем $(a_2, \dots, a_n)$ и определим операцию φ на S так, как в лемме 7. Тогда $\varphi_1(a_1) = b_1$ и по лемме 7 φ_1 — замыкание на S . Это противоречит тому, что $a_1 \in \text{St}(S)$.

Из части 1 получаем, что $\text{St}(S^n) \subseteq [\text{St}(S)]^n$, а из 2) — обратное включение. Лемма доказана.

Следствие 1. Если на частично упорядоченном множестве S существует только одна операция замыкания (тождественная), то для любого натурального n на S^n также существует только одна операция замыкания.

3. Основная теорема

Пусть S — произвольное конечное частично упорядоченное множество и на его элементах задана весовая функция $w(a)$ с действительными значениями. Будем называть весовую функцию допустимой, если

$$\forall a \in S \forall b \in S [a < b \implies w(b) \geq w(a) + 1].$$

Если $|S| = k$, то определим среднее

$$\bar{w} = \frac{1}{k} \sum_{a \in S} w(a)$$

и дисперсию

$$D(w) = \frac{1}{k} \sum_{a \in S} (w(a) - \bar{w})^2.$$

Для фиксированного частично упорядоченного множества S определим минимальную дисперсию на S равенством

$$D = \inf D(w),$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым весовым функциям на S . В [2] доказано, что для любого конечного частично упорядоченного множества S величина D достигается на некоторой весовой функции и дан алгоритм вычисления D по S .

В данной статье мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. Если S — произвольное конечное частично упорядоченное множество, $|S| = k$ и на S существует хотя бы одна операция замыкания, отличная от тождественной, то число замыканий $\chi(S^n)$ на S^n удовлетворяет при $n \rightarrow \infty$ равенству

$$\chi(S^n) = 2^{k^n / \sqrt{2\pi Dn(1+o(1))}}, \quad (1)$$

где D — минимальная дисперсия на S . Если же на S существует только одна операция замыкания (тождественная), то на S^n при любом натуральном n также существует только одна операция замыкания.

Более точные оценки остаточного члена в (1) даны в теоремах 4 и 5. Поскольку вторая часть теоремы 1 содержится в следствии 1, в дальнейшем будем считать, что $\text{St}(S) \neq S$.

4. Нижняя оценка числа замыканий

Для заданного частично упорядоченного множества S с $|S| = k$ рассмотрим допустимую весовую функцию w , на которой достигается минимальная дисперсия

$$D = \inf D(w), \quad (2)$$

где точная нижняя грань берется по всем допустимым весовым функциям на S . При этом будем считать, что все веса сдвинуты так, что

$$\bar{w} = \frac{1}{k} \sum_{a \in S} w(a) = 0. \quad (3)$$

Для любого набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ положим

$$w(\tilde{\alpha}) = w(\alpha_1) + w(\alpha_2) + \dots + w(\alpha_n).$$

Определим множество

$$M = \{\tilde{\alpha} \in S^n \mid -1/2 < w(\tilde{\alpha}) \leq 1/2\}. \quad (4)$$

В [2] доказано, что при $n \rightarrow \infty$

$$|M| \sim \frac{k^n}{\sqrt{2\pi Dn}}, \quad (5)$$

где D — минимальная дисперсия на S и $|S| = k$.

Теорема 4. Пусть S — частично упорядоченное множество, $|S| = k$ и $|\text{St}(S)| = r$, $r < k$. Тогда число замыканий $\chi(S^n)$ на S^n удовлетворяет при $n \rightarrow \infty$ неравенству

$$\chi(S^n) \geq 2^{|M|(1-c_0\sqrt{n}(r/k)^n)}, \quad (6)$$

где c_0 — некоторая положительная постоянная и M определено в (4) для весовой функции, удовлетворяющей (2) и (3).

Доказательство. Пусть

$$N = \{\tilde{\alpha} \in S^n \mid w(\tilde{\alpha}) < -1/2\}.$$

Пусть A — произвольное подмножество вида $D = N \cup \text{St}(S^n) \cup A_1$, где A_1 — произвольное подмножество из $M \setminus \text{St}(S^n)$. Тогда $A \supseteq \text{St}(S^n) \supseteq \text{Max}(S^n)$ и A замкнуто относительно Inf . Действительно, пусть $E \subseteq A$ и $a \in \text{Inf}(E)$. Если $a \in N$ или $a \in A_1$, то $a \in A$. В противном случае $E \cap N = \emptyset$ и $E \cap A_1 = \emptyset$, то есть $E \subseteq \text{St}(S^n)$. Поскольку $\text{St}(S^n)$ замкнуто относительно Inf (теорема 2), то в этом случае $a \in \text{St}(S^n) \subseteq A$. Таким образом, $\text{Inf}(E) \subseteq A$ и A — замкнуто относительно Inf . По лемме 5 получаем, что каждое такое подмножество A определяет замыкание на S^n и для разных A_1 получаем разные замыкания (лемма 1). Так как $|\text{St}(S^n)| = |\text{St}(S)|^n$ (лемма 8), то получаем, что

$$\kappa(S^n) \geq 2^{|M \setminus \text{St}(S^n)|} \geq 2^{|M| - r^n} = 2^{|M|(1 - r^n/|M|)}.$$

Учитывая (5), получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Можно показать, что $|\text{St}(S^n) \cap M| = O(r^n/\sqrt{n})$, что позволяет убрать $\sqrt{n}$ в остаточном члене в (6).

5. Верхняя оценка числа замыканий

Всюду в дальнейшем будем считать, что весовая функция w на S удовлетворяет (2) и (3). При получении верхней оценки в теореме 3 будем использовать язык дискретных функций. Будем рассматривать функции, отображающие S^n в $\{0, 1\}$.

Определение 8. Для фиксированной весовой функции w на S определим для каждого набора $\tilde{\alpha} \in S^n$ множество $K(\tilde{\alpha})$ следующим образом:

$$K(\tilde{\alpha}) = \{\tilde{\beta} \in S^n \mid \tilde{\alpha} < \tilde{\beta}, w(\tilde{\beta}) = w(\tilde{\alpha}) + 1\}. \quad (7)$$

Определение 9. Через $Z^{(n)}$ будем обозначать множество всех функций, отображающих S^n в $\{0, 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} ((\tilde{\beta} \in K(\tilde{\alpha})) \& (\tilde{\gamma} \in K(\tilde{\alpha})) \& (f(\tilde{\beta}) = f(\tilde{\gamma}) = 1) \implies f(\tilde{\alpha}) = 1). \quad (8)$$

Лемма 9. Для числа $\kappa(S^n)$ замыканий на S^n справедливо неравенство

$$\kappa(S^n) \leq |Z^{(n)}|.$$

Доказательство. Каждому замыканию φ на S^n сопоставим функцию f_φ , отображающую S^n в $\{0, 1\}$ такую, что $\{\tilde{\alpha} \in S^n \mid f_\varphi(\tilde{\alpha}) = 1\} = C_\varphi$. Тогда посылка в (8) будет означать, что $\tilde{\beta} \in C_\varphi$, $\tilde{\gamma} \in C_\varphi$ и $\tilde{\alpha} \in \text{Inf}(\{\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\})$. Тогда по лемме 2 и $\tilde{\alpha}$ принадлежит C_φ , то есть $f_\varphi(\tilde{\alpha}) = 1$. Следовательно, f_φ удовлетворяет (8) и $f_\varphi \in Z^{(n)}$. Отсюда и из того, что все функции f_φ разные (лемма 1) вытекает утверждение леммы 9.

С учетом леммы 9 верхняя оценка в теореме 3 будет вытекать из следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть множество M определено условием (4), где w удовлетворяет (2) и (3). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$|Z^{(n)}| \leq 2^{|M|(1 + c_1 n^{-1/4} \log n)},$$

где c_1 — некоторая положительная постоянная.

Эту теорему мы докажем методом искусственных ограничений [3]. Мы опишем некоторый процесс задания функций на S^n с искусственными ограничениями и покажем, что, с одной стороны, число получаемых функций не превосходит оценки в теореме 5, а, с другой стороны, все функции из $Z^{(n)}$ будут при этом построены.

Положим $\tau = \lceil n^{7/8} \rceil$.

Определение 10. Через L обозначим множество всех наборов из S^n , в которых хотя бы один элемент из S встречается менее, чем $n/k - \tau$ или более чем $n/k + \tau$ раз.

Лемма 10. Если $\tau = \lceil n^{7/8} \rceil$ и $|S| = k$, то $|L| \leq Ck^n n^{-3/4}$.

Доказательство. Пусть все наборы из S^n выбираются равновероятно. Пусть $v \in S$. Определим случайную величину ξ_i так, что $\xi_i = 1$, если в выбранном наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ будет $\alpha_i = v$, и $\xi_i = 0$ в противном случае. Тогда вероятность

$$\mathbf{P}(\xi_i = 1) = \mathbf{P}(\alpha_i = v) = \frac{1}{k}.$$

Случайная величина

$$\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

задает число вхождений v в набор $\tilde{\alpha}$ и математическое ожидание

$$\mathbf{M}\zeta = \mathbf{M}\xi_1 + \dots + \mathbf{M}\xi_n = \frac{n}{k}.$$

При этом дисперсия $\mathbf{D}\zeta = n\mathbf{D}\xi_1$. По неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}(|\zeta - n/k| > \tau) < \frac{\mathbf{D}\xi}{\tau^2} \leq \frac{n\mathbf{D}\xi_1}{n^{7/4}} = C_1 n^{-3/4}.$$

Отсюда, число наборов $\alpha \in S$, в которых v встречается менее, чем $n/k - \tau$ или более чем $n/k + \tau$ раз, не превосходит $C_1 k^n n^{-3/4}$, а число наборов в L не превосходит $k C_1 k^n n^{-3/4} = C k^n n^{-3/4}$.

Определение 11. Цепью в S^n называем любую последовательность

$$\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2 < \dots < \tilde{\alpha}_p$$

такую, что $w(\tilde{\alpha}_{i+1}) = w(\tilde{\alpha}_i) + 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, p-1$.

Пусть M определено, как в (4). Тогда каждая цепь в S^n имеет с M не более одного общего элемента.

В [3] доказано следующее утверждение (см. лемму 14 в [3]).

Лемма 11. Множество S^n можно разбить на цепи так, что для числа цепей в множестве R_1 всех цепей, не имеющих общих элементов с M , выполняется неравенство

$$|R_1| < \frac{Ck^n \ln^4 n}{n}.$$

Зафиксируем некоторое разбиение P множества S^n на цепи, удовлетворяющее лемме 11. Пусть R_0 — множество цепей в P , имеющих общий элемент (а тогда ровно 1) с M . Тогда $|R_0| = |M|$. Пусть ν — произвольная перестановка координат одновременно во всех наборах из S^n . Тогда каждая цепь переходит в цепь, и мы получаем новое разбиение на цепи $\nu(P)$.

Определение 12. Пусть $f \in Z^{(n)}$ и $K(\tilde{\alpha})$ определяется как в (7). Пусть m — натуральный параметр и $m \geq 2$. Положим

$$A = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} \in S^n \setminus L, f(\tilde{\alpha}) = 1 \text{ и в } K(\tilde{\alpha}) \text{ не более } m \text{ наборов } \tilde{\beta} \text{ таких, что } f(\tilde{\beta}) = 1\},$$

$$B = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} \in S^n \setminus L, f(\tilde{\alpha}) = 1 \text{ и в } K(\tilde{\alpha}) \text{ более } m \text{ наборов } \tilde{\beta} \text{ таких, что } f(\tilde{\beta}) = 1\}.$$

Лемма 12. Для любой функции $f \in Z^{(n)}$ среди $n!$ разбиений на цепи $\nu(P)$, описанных выше, найдется разбиение $\nu_f(P)$, в котором на всех цепях будет не более $(2k/(n-k\tau))k^n$ последовательных пар $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ таких, что $\tilde{\alpha}_i \in S^n \setminus L$, $f(\tilde{\alpha}_i) = 0$, $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, и не более $2km|A|/(n-k\tau)$ последовательных пар $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ таких, что $\tilde{\alpha}_i \in A$ и $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$.

Доказательство. Пусть $f(\tilde{\alpha}) = 0$ и $\tilde{\alpha} \in S^n \setminus L$. Тогда, так как $f \in Z^{(n)}$, в $K(\tilde{\alpha})$ имеется не более одного набора $\tilde{\beta}$ такого, что $f(\tilde{\beta}) = 1$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — некоторый набор, который может переходить в $\tilde{\alpha}$ под действием некоторой перестановки координат. Пусть в разбиении на цепи P в некоторой цепи последовательно стоят $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\delta}$ такие, что $\tilde{\gamma} < \tilde{\delta}$. Тогда $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\delta}$ различаются только в одной (пусть l -й) компоненте. При всех перестановках координат, переводящих $\tilde{\gamma}$ в $\tilde{\alpha}$, l -я координата будет одинаковое число раз (из соображений симметрии) переходить во все координаты набора $\tilde{\alpha}$, равные γ_l . Так как $\tilde{\alpha} \in S^n \setminus L$, таких координат не менее $n/k - \tau$. При этом $\tilde{\delta}$ будет с одинаковой частотой переходить во все наборы из $K(\tilde{\alpha})$, отличающиеся от $\tilde{\alpha}$ заменой одной координаты γ_l на δ_l . Так как число таких наборов не менее $n/k - \tau$ и среди них не более одного набора $\tilde{\beta}$ такого, что $f(\tilde{\beta}) = 1$ (так как $f \in Z^{(n)}$), то не более чем для $1/(n/k - \tau) = k/(n - k\tau)$ доли всех перестановок ν , переводящих $\tilde{\gamma}$ в $\tilde{\alpha}$, следующим за $\tilde{\alpha}$ в цепи в $\nu(P)$, проходящей через $\tilde{\alpha}$, будет набор $\tilde{\beta}$ такой, что $f(\tilde{\beta}) = 1$. Если набор $\tilde{\gamma}$ в цепи в P является максимальным, то для всех перестановок ν , переводящих $\tilde{\gamma}$ в $\tilde{\alpha}$, набор $\tilde{\alpha}$ будет максимальным в цепи в $\nu(P)$. Таким образом, не более чем в $k/(n - k\tau)$ доле от всех $n!$ разбиений $\nu(P)$ следующим за $\tilde{\alpha}$ в цепи в $\nu(P)$ будет набор $\tilde{\beta}$ такой, что $f(\tilde{\beta}) = 1$. Так как всего наборов $\tilde{\alpha}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}) = 0$, не более k^n , всего во всех $n!$ разбиениях $\nu(P)$ количество последовательных пар $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ на цепи таких, что $\tilde{\alpha}_i \in S^n \setminus L$, $f(\tilde{\alpha}_i) = 0$, $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, не превосходит $(k/(n - k\tau))n!k^n$. Следовательно, менее чем в половине из всех $n!$ разбиений число таких пар превосходит $(2k/(n - k\tau))k^n$. Аналогично доказывается, что всего во всех $n!$ разбиениях число пар $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ на цепи таких, что $f(\tilde{\alpha}_i) = 1$, $\tilde{\alpha}_i \in A$, $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, не превосходит $(km/(n - k\tau))n!|A|$, и следовательно, менее чем в половине из всех $n!$ разбиений число таких пар превосходит $(2km/(n - k\tau))|A|$. Таким образом, существует хотя бы одно разбиение $\nu(P)$, удовлетворяющее лемме 12.

Лемма 13. Если R — число цепей в разбиении на цепи P , то

$$|A| \leq \left(\frac{k}{n - k\tau} k^n + |L| + R \right) \left(1 - \frac{km}{n - k\tau} \right)^{-1}.$$

Доказательство. В доказательстве леммы 12 отмечено, что всего во всех $n!$ разбиениях $\nu(P)$ число пар $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ на цепи таких, что $\tilde{\alpha}_i \in A$, $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, не превосходит $(km/(n - k\tau))n!|A|$. Отсюда следует, что всего во всех $n!$ разбиениях будет не менее

$$|A|n! - \frac{km}{n - k\tau} n!|A|$$

ситуаций таких, что $\tilde{\alpha}_i \in A$ и либо $\tilde{\alpha}_i$ — максимальный набор в своей цепи, либо за $\tilde{\alpha}_i$ в цепи следует набор $\tilde{\alpha}_{i+1}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 0$. Так как $f(\tilde{\alpha}_i) = 1$ (по определению A)

и переходы с 0 на 1 и с 1 на 0 на любой цепи должны чередоваться, то на каждой цепи число указанных выше ситуаций не более чем на 1 превосходит число последовательных пар $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}_i) = 0$, $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$. Учитывая оценку числа таких пар из леммы 12, получаем, что

$$|A|n! - \frac{km}{n - k\tau} n! |A| \leq \frac{k}{n - k\tau} n! k^n + |L|n! + Rn!,$$

откуда следует утверждение леммы 13.

Пусть M определено, как в (4), и R_0 — множество цепей в разбиении P , имеющих общий элемент (ровно 1) с M . Тогда $|R_0| = |M|$. Под действием перестановки координат ν цепи из R_0 переходят в новый набор цепей $\nu(R_0)$. В [3] доказано следующее утверждение.

Лемма 14. *Цепи из множества $\nu(R_0)$ можно разбить на блоки так, что число блоков $\mu(n)$ удовлетворяет условию*

$$\mu(n) \lesssim k^{n/2} e^{C\sqrt{n} \ln^3 n}$$

(для некоторой положительной постоянной C) и для любого $\tilde{\alpha} \in S^n \setminus L$ и любых $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ таких, что $\tilde{\beta} \in K(\tilde{\alpha})$, $\tilde{\gamma} \in K(\tilde{\alpha})$, выполняется следующее утверждение: если через $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ проходят 3 разные цепи из $\nu(R_0)$, то эти три цепи лежат в разных блоках.

Зафиксируем какое-нибудь разбиение цепей из $\nu(R_0)$ на блоки, удовлетворяющее лемме 14, зафиксируем порядок цепей в каждом блоке и рассмотрим все упорядочения блоков. Все цепи из $\nu(R_1)$ (см. лемму 11) упорядочим как один блок, который будем ставить перед блоками из $\nu(R_0)$. Получим всего $\mu(n)!$ упорядочений цепей.

Определение 13. Пусть $\nu_f(P)$ — разбиение на цепи, удовлетворяющее лемме 12. Пусть O — некоторое упорядочение цепей из $\nu_f(P)$, C — цепь из $\nu_f(P)$ и $\tilde{\alpha} \in C$. Будем говорить, что на $\tilde{\alpha}$ предопределено равенство $f(\tilde{\alpha}) = 1$, если на цепях, предшествующих C в упорядочении O , найдутся два набора такие, что $\tilde{\beta} \in K(\tilde{\alpha})$, $\tilde{\gamma} \in K(\tilde{\alpha})$, $f(\tilde{\beta}) = 1$, $f(\tilde{\gamma}) = 1$.

Лемма 15. *Среди описанных выше $\mu(n)!$ упорядочений цепей из $\nu_f(P)$ найдется такое упорядочение O_f , в котором будет не более $2k^n/t$ наборов $\tilde{\alpha}$ таких, что $\tilde{\alpha} \in B$, $\tilde{\alpha}$ лежит на цепи из $\nu(R_0)$, но не предопределено равенство $f(\tilde{\alpha}) = 1$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} \in B$. Это значит, что в $K(\tilde{\alpha})$ имеются t наборов $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_t$ таких, что $f(\tilde{\beta}_i) = 1$ для всех i . Часть из этих наборов лежат в $\nu(R_1)$, а остальные лежат в разных блоках (лемма 14). Тогда существуют $t - 1$ наборов $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_{t-1}$ в $K(\tilde{\alpha})$ таких, что $f(\tilde{\beta}_i) = 1$ для всех i , часть из этих наборов лежат в $\nu(R_1)$, а остальные лежат в разных блоках, отличных от блока, в котором лежит $\tilde{\alpha}$, причем $\tilde{\alpha}$ лежит на цепи из $\nu(R_0)$. Поскольку при упорядочении цепей рассматриваются по разу все перестановки блоков из $\nu(R_0)$ и блок $\nu(R_1)$ всегда ставится в начало, не более чем в $2/t$ доле всех упорядочений набор $\tilde{\alpha}$ встретится в упорядочении раньше, чем все $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_{t-1}$ или ровно после одного из них. Таким образом $f(\tilde{\alpha}) = 1$ будет не предопределено не более чем в $2/t$ доле всех упорядочений. Тогда среднее число по всем упорядочениям ситуаций таких, что $\tilde{\alpha} \in B$, $\tilde{\alpha}$ лежит на цепи из $\nu(R_0)$, но не предопределено $f(\tilde{\alpha}) = 1$, не превосходит $2|B|/t \leq 2k^n/t$. Лемма доказана.

Пусть $f \in Z^{(n)}$. Зафиксируем какое-нибудь разбиение на цепи $\nu_f(P)$, удовлетворяющее лемме 12. Определим U как множество всех цепей в $\nu_f(P)$, на которых есть хотя бы одна пара последовательных наборов $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}_i) = 0$, $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$.

Лемма 16. Если разбиение на цепи $\nu_f(P)$ удовлетворяет лемме 12, то в множество U входит не более $C_1 k^n n^{-3/4}$ цепей, причем на всех этих цепях имеется не более $3C_1 k^n n^{-3/4}$ последовательных пар наборов $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) \neq f(\tilde{\alpha}_i)$ (C_1 — некоторая положительная постоянная).

Доказательство. Пусть на некоторой цепи есть пара последовательных наборов $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}_i) = 0$, $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$. По лемме 12 число таких пар с условием $\tilde{\alpha}_i \in S^n \setminus L$ не превосходит $(2k/(n - k\tau))k^n = O(k^n/n)$, и следовательно, общее число таких пар не превосходит $(2k/(n - k\tau))k^n + |L|$. Поскольку $|L| \leq Ck^n n^{-3/4}$ (лемма 10), число таких пар не превосходит $C_1 k^n n^{-3/4}$ для некоторой положительной постоянной C_1 . Тогда число цепей в U также не превосходит этой величины. Если на некоторой цепи имеется q пар последовательных наборов $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}_i) = 0$, $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, то на той же цепи имеется не более $q + 1 \leq 2q$ пар последовательных наборов $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}_i) = 1$, $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 0$, и следовательно, не более $3q$ пар последовательных наборов $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1}$ таких, что $f(\tilde{\alpha}_i) \neq f(\tilde{\alpha}_{i+1})$. Лемма доказана.

Пусть задано некоторое разбиение на цепи $\nu(P)$ и упорядочение этих цепей O . Рассмотрим следующее

условие (9): пусть $\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2 < \dots < \tilde{\alpha}_s$ — очередная цепь и $\tilde{\alpha}_i$ — максимальный из наборов на этой цепи, на которых предопределено равенство $f(\tilde{\alpha}_i) = 1$ заданием функции на предыдущих цепях (если таких наборов нет, то полагаем $i = 0$), и пусть $i + 2 \leq s$; тогда $f(\tilde{\alpha}_{i+2}) = 0$.

Лемма 17. Можно так подобрать значение параметра t , что если для функции $f \in Z^{(n)}$ выбрано разбиение на цепи $\nu_f(P)$ и упорядочение O_f , удовлетворяющие леммам 12 и 15, то для цепей, на которых функция антимонотонна, условие (9) нарушается не более чем на $Ck^n n^{-3/4}$ цепях, где C — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. Пусть C — очередная цепь, функция f антимонотонна на C и на C нарушается условие (9). Это значит, что на C есть 3 последовательных набора $\tilde{\alpha}_i < \tilde{\alpha}_{i+1} < \tilde{\alpha}_{i+2}$ такие, что $\tilde{\alpha}_i$ — максимальный из наборов на этой цепи, на которых предопределено равенство $f(\tilde{\alpha}) = 1$ заданием функции на предыдущих цепях, и $f(\tilde{\alpha}_{i+2}) = 1$. Так как f антимонотонна на цепи C , то $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, то есть $\tilde{\alpha}_{i+1} \in L \cup A \cup B$. Тогда получаем, что либо $\tilde{\alpha}_{i+1} \in L$, либо $\tilde{\alpha}_{i+1} \in A$ и $f(\tilde{\alpha}_{i+2}) = 1$, либо $\tilde{\alpha}_{i+1} \in B$, цепь C входит в $\nu(R_0)$ и не предопределено $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$, либо цепь C входит в $\nu(R_1)$. С учетом лемм 10, 12, 15 и 11, получаем, что число таких ситуаций не превосходит

$$C_1 k^n n^{-3/4} + \frac{2km}{n - k\tau} |A| + \frac{2}{m} k^n + \frac{C_2 \ln^4 n}{n} k^n.$$

При $m = n^{3/4}$ (и $\tau = \lceil n^{7/8} \rceil$) из лемм 13, 11, 10 и соотношения (5) получаем, что $|A| = O(k^n/\sqrt{n})$ и число указанных ситуаций не превосходит $O(k^n n^{-3/4})$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь следующий процесс задания функций, отображающих S^n в $\{0, 1\}$. Пусть r и t — натуральные параметры. Для каждого из $n!$ разбиений на цепи $\nu(P)$ и каждого из $(\mu(n))!$ описанных упорядочений O этих цепей сначала пометим не более чем r наборов и цепи, на которые попали помеченные наборы, отнесем к множеству U . Среди оставшихся цепей выделим не более t цепей и отнесем их к множеству V . Остальные цепи отнесем к множеству W . Будем просматривать цепи в соответствии с упорядоченностью

О. Если очередная цепь $\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2 < \dots < \tilde{\alpha}_s$ принадлежит U , то задаем функцию на цепи так, что $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) = f(\tilde{\alpha}_i)$, если набор $\tilde{\alpha}_i$ не помеченный, и $f(\tilde{\alpha}_{i+1}) \neq f(\tilde{\alpha}_i)$, если набор $\tilde{\alpha}_i$ помеченный. Легко видеть, что тогда задание f на такой цепи однозначно определяется заданием $f(\tilde{\alpha}_1)$, то есть мы допускаем не более двух способов задания f на цепи из U . Если очередная цепь C принадлежит V , то на C функцию f задаем любым антимонотонным способом. Если же очередная цепь C принадлежит W , то задаем функцию f на C антимонотонным способом, причем так, чтобы выполнялось искусственное ограничение (9). Это значит, что если $\tilde{\alpha}_i$ — максимальный набор на цепи C , на котором предопределено равенство $f(\tilde{\alpha}_i) = 1$ заданием функции на предыдущих цепях, то мы задаем

$$f(\tilde{\alpha}_i) = f(\tilde{\alpha}_{i-1}) = \dots = f(\tilde{\alpha}_1) = 1, \quad f(\tilde{\alpha}_{i+2}) = f(\tilde{\alpha}_{i+3}) = \dots = f(\tilde{\alpha}_s) = 0$$

и $f(\tilde{\alpha}_{i+1})$ произвольно. Если $r \leq k^n/2$ и R — общее число цепей, то число построенных функций не будет превосходить

$$n! (\mu(n))! r \binom{k^n}{r} 2^r \binom{R}{t} (kn+1)^t 2^{R-t}.$$

Если взять $r = \lceil 3C_1 k^n n^{-3/4} \rceil$, где C_1 — постоянная из леммы 16 и $t = \lceil Ck^n n^{-3/4} \rceil$, где C — постоянная из леммы 17, то в соответствии с этими леммами в нашем процессе будут построены все функции из $Z^{(n)}$. Поэтому при этих r и t получаем неравенство

$$\begin{aligned} \log_2 |Z^{(n)}| &\leq \log_2(n!) + \log_2((\mu(n))!) + \log_2 r \\ &\quad + \log_2 \binom{k^n}{r} + r + \log_2 \binom{R}{t} + t \log_2(kn+1) + R - t. \end{aligned}$$

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \log_2(n!) &\leq n \log_2 n = o(k^n n^{-3/4}), \\ \log_2((\mu(n))!) &\leq \mu(n) \log_2 \mu(n) = o(k^n n^{-3/4}) \quad (\text{см. лемму 14}), \\ \log_2 r &= O(n), \\ r &= O(k^n n^{-3/4}), \\ t \log_2(kn+1) &= O(k^n n^{-3/4} \log n), \\ R = |M| + |R_1| &= |M| + o(k^n n^{-3/4}) \quad (\text{см. лемму 11}), \\ |M| &\sim \frac{k^n}{\sqrt{2\pi Dn}} \quad (\text{см. (5)}). \end{aligned}$$

Легко получить, преобразовывая факториалы по формуле Стирлинга, что

$$\log_2 \binom{R}{t} \sim t \log_2 \frac{R}{t}$$

при $t = o(R)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \log_2 \binom{R}{t} &= O(k^n n^{-3/4} \log n), \\ \log_2 \binom{k^n}{r} &= O(r \log_2(k^n/r)) = O(k^n n^{-3/4} \log n). \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$\log_2 |Z^{(n)}| \leq |M|(1 + O(n^{-1/4} \log n)).$$

Этим доказана теорема 5. Из теоремы 5, леммы 9 и теоремы 4 получаем утверждение теоремы 3.

Список литературы

1. Алексеев В. Б., О числе семейств подмножеств, замкнутых относительно пересечения. *Дискретная математика* (1989) **1**, №2, 129–136.
2. Алексеев В. Б., О числе монотонных k -значных функций. *Проблемы киберн.* (1974) **28**, 5–24.
3. Алексеев В. Б., Метод искусственных ограничений для оценки числа дискретных функций. *Матем. вопросы киберн.* (1999) **8**, 123–134.
4. Вороненко А. А., О количестве многомерных монотонных экстенсивных отображений. *Вестник Моск. ун-та. Сер. Вычислительная матем. и киберн.* (2001) №1, 37–40.
5. Вороненко А. А., О количестве замкнутых экстенсивных отображений. *Вестник Моск. ун-та. Сер. Вычислительная матем. и киберн.* (2001) №4, 46–48.
6. Вороненко А. А., О количестве замкнутых многомерных монотонных отображений. *Вестник Моск. ун-та. Сер. Вычислительная матем. и киберн.* (2002) №2, 41–45.

Статья поступила 10.11.2003.