Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Чашкин, Моделирование схем из функциональных элементов на универсальной машине Тьюринга, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 2, 98–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:02:08

Моделирование схем из функциональных элементов на универсальной машине Тьюринга

© 2004 г. А. В. Чашкин

Рассматривается время моделирования булевых схем на машине Тьюринга с тремя лентами, одна из которых используется для хранения программы, управляющей работой машины. Установлено, что для любой схемы S найдется такая программа P , что время моделирования $T(P)$ схемы S удовлетворяет соотношению $T(P) = O(L(S) \log_2 L(S))$, где $L(S)$ — сложность схемы S . Показано, что для некоторых схем данное соотношение является точным, то есть для них существуют нижние оценки $T(P)$ того же порядка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 02-01-00985 и 00-15-96103.

1. Значительный интерес представляет задача сравнения вычислительной мощности различных моделей вычислений, в частности, вычислений, использующих условный переход, и вычислений, условный переход не использующих. Типичными представителями вычислений первого типа являются различные варианты многоленточных машин Тьюринга. Описания машин Тьюринга и оценки времени моделирования одних машин Тьюринга другими можно найти в [1–8]. Основными моделями вычислений без условного перехода являются схемы (схемы из функциональных элементов, булевы схемы) и неветвящиеся программы. Описания и свойства этих моделей можно найти в [1, 3]. Отметим, что несмотря на внешнее несходство определений схем и неветвящихся программ (в основе определения схемы лежит понятие графа, а неветвящиеся программы определяются как последовательности равенств), схемы и неветвящиеся программы являются практически одним и тем же объектом. Поэтому результаты о сложности схем почти дословно можно переносить на сложность неветвящихся программ и наоборот.

Оценки сложности схем, моделирующих работу машины Тьюринга, можно найти в [3, 8], где, в частности, показано, что T шагов машины Тьюринга можно промоделировать схемой, сложность которой по порядку не превосходит величины $T \log_2 T$. Если же во время работы машина Тьюринга использует не более m различных ячеек, то сложность моделирующей схемы по порядку не превосходит величины $T \log_2 m$. Связь длины программ универсальных машин Тьюринга и схемной сложности подробно рассматривается в [3], где под универсальной машиной Тьюринга понимается машина, способная моделировать, при подходящей программе, работу произвольной машины Тьюринга.

В настоящей работе изучается время моделирования булевых схем (схем, вычисляющих булевы функции) на универсальной трехленточной машине Тьюринга. В ряде работ (см., например, [3, 8, 9]) рассматривались похожие задачи.

2. Приведем необходимые определения. Понятия, используемые ниже без определений, можно найти в [1–3].

Машиной Тьюринга M будем называть конечный автомат Q , снабженный тремя двух-сторонними лентами A , B и C , ячейки которых пронумерованы целыми числами так, что ячейки с меньшими номерами находятся левее ячеек с большими номерами. В каждый момент времени автомат имеет доступ к одной (активной) ячейке каждой ленты и в зависимости от величин, содержащихся в активных ячейках лент, и своего внутреннего состояния может

- изменить содержимое активных ячеек на лентах A и B ;
- сдвинуть каждую из лент на одну ячейку либо вправо, либо влево;
- изменить внутреннее состояние автомата Q .

Ленты A и B называются рабочими, используются для записи промежуточных результатов вычислений и в каждый момент времени либо пусты, либо содержат только булевы величины. Лента C называется программной. Ее алфавит состоит из конечного числа элементов $c_1, \dots, c_k$, которые будем называть командами. Последовательность команд, находящаяся на ленте C , называется программой, управляющей работой машины. Далее рассматриваются только безусловные программы, на каждом шаге такой программы автомат Q выполняет команду, содержащуюся в активной ячейке ленты C , после чего сдвигает ленту C влево. Будем полагать, что число команд k и число внутренних состояний автомата Q достаточно велики для того, чтобы машина M могла выполнять описываемые далее действия.

Булевой схемой S с n входами над множеством независимых переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$ будем называть последовательность присваиваний

$$y_i = f_i(a_i, b_i), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (1)$$

где f_i — двухместная булева функция, $a_i, b_i \in \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{i-1}\}$. Величины $y_1, y_2, \dots$ называются внутренними переменными схемы, а равенства (1) — элементами схемы. Число равенств называется сложностью схемы и обозначается через $L(S)$. Функции, вычисляемые схемами, сложность вычисления функций схемами и минимальные схемы определяются как обычно (см., например, [1, 3]).

Пусть схема S вычисляет систему булевых функций

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n).$$

Будем говорить, что машина M под управлением программы P моделирует работу S , если выполняются следующие два условия.

- (1) В начальный момент времени значения переменных $x_1, \dots, x_n$ последовательно (в соседних ячейках) расположены на ленте A . Команды программы P расположены на ленте C . На лентах A и C активными являются самые левые непустые ячейки. Лента B пуста.
- (2) После окончания работы машины значения $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ (возможно в ином порядке) последовательно расположены на ленте A . На ленте A активной является самая левая непустая ячейка. Лента B пуста.

3. Рассмотрим список $l = (l_1, \dots, l_n)$ и двоичный набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Список $l(\alpha) = (l_{i_1}, \dots, l_{i_n})$ назовем α -перестановкой списка l , если $\alpha_{i_j} \leq \alpha_{i_{j+1}}$ для каждого $j = 1, 2, \dots, n-1$. Будем говорить, что машина Тьюринга M выполняет α -перестановку n -элементного списка l , если перед началом работы элементы списка l последовательно расположены на ленте A и самая левая непустая ячейка ленты A является активной; во время работы машины ни одна из ячеек, расположенных на ленте A правее ячеек с элементами списка, не является активной; после окончания работы элементы списка $l(\alpha)$ последовательно расположены на ленте A , и самая левая непустая ячейка ленты A является активной.

Лемма 1. Произвольную α -перестановку n -элементного списка l можно выполнить на машине Тьюринга M за время, не превосходящее $6n$.

Доказательство. Без ограничения общности будем полагать, что элементы списка находятся на ленте A в ячейках с номерами от 1 до n , а на ленте B активной является ячейка с номером 1. Последовательно перенесем элементы списка с ленты A на ленту B . Элемент, находящийся на ленте A в i -й ячейке, перенесем на ленту B в ячейку с номером $2i-1$, если $\alpha_i = 0$, или в ячейку с номером $2i$ если $\alpha_i = 1$. Для этого потребуется $2n$ шагов. После этого перенесем элементы списка назад на ленту A . Перемещая ленты A и B вправо, перенесем на ленту A элементы, находящиеся в ячейках ленты B с четными номерами. Для этого потребуется $2n$ шагов. Затем, перемещая ленту B в обратном направлении и продолжая перемещать ленту A вправо, перенесем на ленту A элементы, находящиеся на ленте B в ячейках с нечетными номерами. Для этого так же потребуется $2n$ шагов. Легко видеть, что общее время не превосходит $6n$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть S — произвольная булева схема с n входами. Тогда для машины Тьюринга M найдется такая программа P , что машина M под управлением этой программы моделирует работу схемы S и время работы $T(P)$ машины M на программе P при $L(S) \geq n$ и $n \rightarrow \infty$ удовлетворяет соотношению

$$T(P) = O(L(S) \log_2 L(S)).$$

Доказательство. Без ограничения общности будем полагать, что сложность моделируемой схемы S является степенью двойки и равна 2^m .

Очевидно, что моделирование одноэлементной схемы потребует не более четырех шагов. В качестве примера рассмотрим одноэлементную схему S , которая вычисляет трехкомпонентную вектор-функцию $(x, y, f(x, y))$. Допустим, что ее аргументы x и y перед началом работы находятся на ленте A в двух соседних ячейках, левая из которых является активной ячейкой этой ленты. Тогда моделирование схемы S можно провести следующим образом. На первом шаге автомат Q запоминает символ x из первой ячейки ленты A и лента A сдвигается влево. На втором шаге автомат Q запоминает символ y из второй ячейки ленты A , и лента A сдвигается вправо. На третьем шаге лента A сдвигается вправо. На четвертом шаге в активную ячейку ленты A помещается значение $f(x, y)$. В результате в трех соседних ячейках ленты A записаны (неупорядоченно) значения вектор-функции $(x, y, f(x, y))$, и самая левая непустая ячейка ленты A является активной.

Допустим, что любая булева схема, состоящая из 2^k элементов, где $1 \leq k < m$, может быть промоделирована на машине Тьюринга за время $T(2^k) \leq 27k2^k$ и при этом будут выполнены следующие условия.

- (а) В начальный момент времени входные данные, не более $2 \cdot 2^k$ символов, последовательно расположены на ленте A в произвольном порядке. На ленте A активной является самая левая непустая ячейка. Лента B пуста.

- (b) Во время работы машины ни одна из ячеек, расположенных на ленте A правее ячеек с входными данными, не является активной.
- (c) После окончания работы машины результаты вычислений, не более $3 \cdot 2^k$ символов (аргументы схемы и вычисленные значения), последовательно расположены на ленте A . На ленте A активной является самая левая непустая ячейка. Лента B пуста.

Основываясь на сделанном предположении, опишем конструкцию программы P_m , моделирующей схему из 2^m элементов с $p \leq 2 \cdot 2^m$ входами и $q \leq 3 \cdot 2^m$ выходами. Команды программы P_m разобьем на следующие четыре последовательных блока.

- (1) Команды первого блока переупорядочивают входные данные на ленте A так, чтобы данные, используемые первыми 2^{m-1} элементами схемы, были расположены левее данных, не используемых этими элементами. Из леммы 1 следует, что для этого потребуется не более $6 \cdot 2^{m+1}$ шагов. После выполнения команд первого блока на ленте A активной является самая левая непустая ячейка.
- (2) Команды второго блока выполняют вычисления, соответствующие первым 2^{m-1} элементам схемы, и удовлетворяют условиям (a)–(c). В соответствии с предположением индукции для этого потребуется не более $T(2^{m-1})$ шагов.
- (3) Команды третьего блока переупорядочивают данные на ленте A так, чтобы данные, используемые последними 2^{m-1} элементами схемы, были расположены левее данных, не используемых этими элементами. После выполнения команд второго блока на ленте A может оказаться не более $3 \cdot 2^{m-1}$ значений, не являющихся аргументами последних 2^{m-1} элементов схемы. Поэтому в соответствии с леммой 1 для перемещения аргументов этих элементов потребуется не более $6(3 \cdot 2^{m-1} + 2 \cdot 2^{m-1})$ шагов.
- (4) Команды четвертого блока выполняют вычисления, соответствующие последним 2^{m-1} элементам схемы, и удовлетворяют условиям (a)–(c). В соответствии с предположением индукции для этого потребуется не более $T(2^{m-1})$ шагов.

Индукцией по m покажем, что время $T(2^m)$ работы программы P_m удовлетворяет неравенству

$$T(2^m) \leq 27m2^m.$$

При $m = 1$ это неравенство очевидно, так как моделирование одноэлементной схемы выполняется не более чем за четыре шага. Допустим, что $T(2^{m-1}) \leq 27(m-1)2^{m-1}$ при $m \geq 2$. Тогда из 1)–4) следует, что

$$T(2^m) \leq 2T(2^{m-1}) + 54 \cdot 2^{m-1} \leq 2 \cdot 27(m-1)2^{m-1} + 54 \cdot 2^{m-1} = 27m2^m.$$

Теорема доказана.

4. Рассмотрим булевы схемы специального вида, схемы с ограниченным числом внутренних переменных. Булевой схемой S с n входами над множеством независимых переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$ и с m внутренними переменными $\{y_1, \dots, y_m\}$ будем называть последовательность присваиваний

$$c_i = f_i(a_i, b_i), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2)$$

где f_i — двухместная булева функция, $c_i \in \{y_1, \dots, y_m\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ и $a_i, b_i \in \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$. Равенства (2) называются элементами схемы, а их число — сложностью схемы. Как и ранее, сложность схемы S обозначается через $L(S)$. С точки зрения сложности вычислений схемы с ограниченным числом внутренних переменных слабее обычных схем, так как в обычных схемах нет ограничений на число одновременно запоминаемых промежуточных результатов, а в схемах с m внутренними переменными их число ограничено величиной m . Отражением этого факта является меньшее время моделирования схем с ограниченным числом внутренних переменных по сравнению со временем моделирования обычных схем равной сложности.

Теорема 2. Пусть S — произвольная булева схема с n входами и m , $m \geq n$, внутренними переменными. Тогда для машины Тьюринга M найдется такая программа P , что машина M под управлением этой программы моделирует работу схемы S и время работы $T(P)$ машины M на программе P при $L(S) \geq n$ и $n \rightarrow \infty$ удовлетворяет соотношению

$$T(P) = O(L(S) \log_2 m).$$

Доказательство. Пусть S — произвольная схема с m внутренними переменными. Схему S разобьем на $\lceil L(S)/m \rceil$ подсхем S_i , каждая из которых, кроме быть может последней, состоит из m последовательных элементов схемы. Каждую такую подсхему будем рассматривать как самостоятельную схему с $m + n$ входами и m выходами. Из предыдущей теоремы следует, что время моделирования каждой такой схемы (при условии $m \geq n$) по порядку не превосходит $m \log_2 m$. Пусть P_i — программа, моделирующая подсхему S_i . Нетрудно видеть, что программа P , состоящая в последовательном выполнении программ $P_1, P_2, \dots, P_{\lceil L(S)/m \rceil}$, будет моделировать схему S . Поэтому

$$T(P) = \sum_{i=1}^{\lceil L(S)/m \rceil} T(P_i) = \lceil L(S)/m \rceil O(m \log_2 m) = O(L(S) \log_2 m).$$

Теорема доказана.

5. Покажем, что с точностью до постоянного множителя оценки теорем 1, 2 точны. Для этого достаточно указать такие схему S и схему с m внутренними переменными S' , что время вычисления на машине Тьюринга реализуемых этими схемами функций с точностью до постоянного множителя не меньше, чем $L(S) \log_2 L(S)$ и $L(S') \log_2 m$, соответственно.

Рассмотрим множества $F(L, n)$ и $F(L, m, n)$, первое из которых состоит из всех n -местных булевых функций, сложность вычисления которых схемами не превосходит L , а второе — из всех n -местных булевых функций, сложность вычисления которых схемами с m внутренними переменными не превосходит L . Нетрудно показать (например, используя результаты из [10]), что при $L \geq m \geq n$ множества $F(L, n)$ и $F(L, m, n)$ содержат не менее L^{cL} и m^{cL} функций, где c — некоторая постоянная (можно показать, что при $L/n \rightarrow \infty$ постоянная c стремится к единице). Поэтому среди функций из $F(L, n)$ и $F(L, m, n)$ обязательно найдутся такие функции $f \in F(L, n)$ и $g \in F(L, m, n)$, длины минимальных программ которых по порядку не меньше величин $L \log_2 L$ и $L \log_2 m$, соответственно. Легко видеть, что если это не так, то число различных программ (число программ длины T не больше, чем k^T , где k — постоянная) будет меньше числа функций.

Пусть S_f — минимальная схема функции f и S_g — минимальная схема (среди всех схем с m внутренними переменными) функции g . Так как время работы машины Тьюринга не

меньше длины программы, легко видеть, что с точностью до постоянного множителя время моделирования схем S_f и S_g не меньше, чем $L \log_2 L$ и $L \log_2 t$, соответственно.

6. В заключение отметим, что утверждения теорем 1 и 2 остаются справедливыми для машины Тьюринга с двумя лентами и для машины Тьюринга с одним магазином и одной лентой. Доказательства для этих машин аналогичны приведенным выше, но более громоздки.

Список литературы

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж., *Построение и анализ вычислительных алгоритмов*. Мир, Москва, 1979.
2. Мальцев А. И., *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Наука, Москва, 1986.
3. Сэвидж Д. Э., *Сложность вычислений*. Мир, Москва, 1998.
4. Хенни Ф. К., Стирнз Р. Е., Моделирование многоленточной машины Тьюринга на двуленточной. В кн.: *Проблемы математической логики*. Мир, Москва, 1970, с. 194–212.
5. Хенни Ф. К., Вычисления на машинах Тьюринга со входом. В кн.: *Проблемы математической логики*. Мир, Москва, 1970, с. 249–270.
6. Штосс Г. Й., Двуленточное моделирование машин Тьюринга. В кн.: *Сложность вычислений и алгоритмов*. Мир, Москва, 1974, с. 199–212.
7. Штосс Г. Й., k -ленточное моделирование k -головочных машин Тьюринга. В кн.: *Сложность вычислений и алгоритмов*. Мир, Москва, 1974, с. 190–198.
8. Schnorr C. P., The network complexity and the Turing machine complexity of finite functions. *Acta Inform.* (1976) 7, 95–107.
9. Чашкин А. В., Моделирование схем из функциональных элементов машинами Тьюринга. *Дискретный анализ и исследование операций* (1999) 6, №3, 42–70.
10. Лупанов О. Б., Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. *Пробл. киберн.* (1965) 14, 31–110.

Статья поступила 21.04.2003.