Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Лялин, О решении автоматных уравнений, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 2, 104–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:23:44

О решении автоматных уравнений

© 2004 г. И. В. Лялин

Рассматривается задача решения автоматных уравнений с одним неизвестным. Предложен алгоритм для определения того, имеет или нет решение данное автоматное уравнение. Вводится понятие ограниченно-недетерминированной функции. Доказано, что в случае существования решения автоматного уравнения множество всех его решений вложимо в некую ограниченно-недетерминированную функцию, которая может быть эффективно построена по исходному уравнению.

1. Основные понятия и постановка задачи

Пусть $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, E_k^∞ — множество всех бесконечных последовательностей (сверхслов), составленных из элементов E_k . Через P_{bd} обозначим множество ограниченно-детерминированных функций (о.-д. функций), входные и выходные переменные которых принимают значение из E_k^∞ . Через $E_k(n)$ обозначим множество $E_k \times \dots \times E_k$ (с n сомножителями). Таким образом, $E_k^\infty(n)$ будет обозначать множество $E_k^\infty \times \dots \times E_k^\infty$ (с n сомножителями).

Пусть $t \geq 1$. Через E_k^t обозначим множество всех слов длины t в алфавите E_k ; $E_k^t(n)$ будет обозначать множество $E_k^t \times \dots \times E_k^t$ (с n сомножителями); E_k^* будет обозначать множество всех слов в алфавите E_k , $E_k^*(n)$ — множество всех слов в алфавите $E_k(n)$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_{\text{bd}}$. Отображение $E_k^\infty(n)$ в E_k^∞ , осуществляемое функцией f для всякого $t \geq 1$, однозначно определяет детерминированные функции $f^t(x_1, \dots, x_n)$, отображающие множество $E_k^t(n)$ в E_k^t . Поэтому можно расширить область определения функции f , полагая, что эта о.-д. функция определена на множестве $E_k^\infty(n) \cup (\bigcup_{t=1}^\infty E_k^t(n))$.

Вместе с тем очевидно, что отображение, осуществляемое о.-д. функцией f на множестве $\bigcup_{t=1}^\infty E_k^t(n)$, полностью определяет и отображение, осуществляемое ею на множестве $E_k^\infty(n)$. Таким образом, с каждой о.-д. функцией f можно связать последовательность $f^1(x_1, \dots, x_n), f^2(x_1, \dots, x_n), \dots$ детерминированных функций, причем эта последовательность задает о.-д. функцию однозначно.

Одной из центральных задач, рассматриваемых в дискретной математике, является задача о выразимости одних о.-д. функций через другие. В связи с этим на множестве всех о.-д. функций определяются операции композиции — суперпозиции и обратной связи. Известно (см. гл. 2 в [1]), что любая о.-д. функция вычисляется некоторым автоматом. Поэтому операциям над о.-д. функциями соответствуют естественным образом операции над автоматами. Выполнение операции в этом случае связано с соединением входов и выходов соответствующих автоматов. Если рассматриваются композиции над некоторым

Рис. 1.

Рис. 2.

множеством о.-д. функций $M = \{f_1, \dots, f_l\}$, то с каждой о.-д. функцией $f_i \in M$ связывают элемент K_i — прямоугольник с n_i входными стрелками (n_i — число переменных f_i) и выходной стрелкой (коротко, входы и выходы f_i). Функционирование элемента K_i — это функционирование инициального конечного автомата A_i , вычисляющего о.-д. функцию f_i , $i = 1, \dots, l$. Композициям над множеством о.-д. функций M соответствует схема, полученная путем композиции (некоторого соединения) элементов $K_1, \dots, K_l$. Функционирование каждой такой схемы S однозначно определяется функционированием составляющих ее элементов и совпадает с функционированием некоторого конечного автомата A . Если автомат A вычисляет о.-д. функцию f , то это означает, что о.-д. функция f выразима через о.-д. функции $f_1, \dots, f_l$ с помощью операции композиции.

В данной работе мы будем рассматривать схемы, являющиеся композицией не только элементов $K_1, \dots, K_l$, но и элемента X , который также может быть изображен прямоугольником с m , $m \geq 1$, входными стрелками и одной выходной стрелкой. Элемент X назовем свободной позицией. Будем считать, что свободная позиция только один раз входит в рассматриваемые нами схемы, и кроме того, каждая схема образована из элементов $K_1, \dots, K_l$, X лишь с помощью операции суперпозиции (без обратной связи). Элементу X , в отличие от элементов $K_1, \dots, K_l$, изначально не ставится в соответствие никакой автомат. Таким образом, если X входит в какую-либо схему S , то S не будет полностью определенной и не будет реализовать никакую о.-д. функцию. Вместе с тем, при замене X элементом K_0 , функционирующим как некий инициальный конечный автомат A_0 , схема S становится корректной (или полностью определенной) и задает автомат, реализующий некоторую о.-д. функцию.

Пусть S — произвольная схема, построенная без использования операции обратной связи, с единственным вхождением свободной позиции X . Пусть схема S имеет n входов $x_1, \dots, x_n$ и p выходов $y_1, \dots, y_p$. Входам свободной позиции X , входящей в S , поставим в соответствие переменные $z_1, \dots, z_m$, а его выходу переменную u (см. рис. 1). Если некоторый вход схемы S является одновременно и входом X , то этому входу соответствуют две переменные из множеств $\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{z_1, \dots, z_m\}$.

Пусть $h(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная о.-д. функция. Возникает вопрос, существует ли о.-д. функция $f(z_1, \dots, z_m) = u$, которую можно было бы поставить в схеме S на свободную позицию X с тем, чтобы полученная полностью определенная схема реализовала о.-д. функцию $h(x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$S(x) = h. \quad (1)$$

Будем называть его автоматным уравнением без обратной связи. Настоящая работа посвящена исследованию автоматных уравнений и поиску эффективных способов их решения. Нами будут рассмотрены две следующие задачи.

- (1) Существует ли алгоритм, устанавливающий, имеют ли решение уравнения вида (1)?
- (2) Каким образом можно было бы описать множество решений произвольного автоматного уравнения?

2. Упрощение задачи

Пусть $S(x) = h$ — произвольное автоматное уравнение и $d(y_1, \dots, y_p, v_1, \dots, v_p)$ — такая о.-д. функция, что для любого $t \geq 1$, если $y_i(t) = v_i(t)$ при любом $i = 1, \dots, p$, то $d(t) = 0$, в противном случае $d(t) = 1$ (см. рис. 1). Пусть $h_0(x_1, \dots, x_n)$ — такая о.-д. функция, что $h_0(t) = 0$ для любого $t \geq 1$.

Рассмотрим схему S' , которая получается из схем S , d и h следующим образом (см. рис. 2). Выходы $y_1, \dots, y_p$ схемы S соединяются с входами $y_1, \dots, y_p$ схемы d . Выходы $v_1, \dots, v_p$ схемы h соединяются с входами $v_1, \dots, v_p$ схемы d . Входы схем S и h , которым соответствует одна и та же переменная из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, отождествляются. Получается схема, приведенная на рис. 2.

Нетрудно видеть, что уравнение $S(x) = h$ имеет то же множество решений, что и $S'(x) = h_0$. Таким образом, мы можем всюду вместо уравнения вида $S(x) = h$ рассматривать уравнение вида $S(x) = h_0$.

3. Существование алгоритма, устанавливающего наличие решения у автоматных уравнений

Рассмотрим схему S . Пусть в этой схеме l элементов не являются свободой позицией. Очевидно, $l \geq 1$ (в противном случае можно добавить лишний, несущественный для работы схемы, автомат). Произвольным образом упорядочим эти элементы: $K_1, \dots, K_l$. Через p_i , $i = 1, \dots, l$, обозначим множество состояний соответствующего элементу K_i автомата A_i . Пусть

$$p = \prod_{i=1}^l p_i.$$

Будем говорить, что схема S имеет p состояний.

Лемма 1. Пусть схема S имеет p состояний, $t = 2^p$ и уравнение $S(x) = h_0$ имеет решение на множестве $P_{\text{бд}}^t$. Тогда это уравнение имеет решения и на множестве $P_{\text{бд}}$.

Доказательство. Пусть f_i — автомат, являющийся решением уравнения на множестве P_{bd}^i ; $\text{in}(a)$ — слово, пришедшее на вход f_i в случае, если на вход $S(f_i)$ подано слово a ; $\text{state}(a)$ — состояние схемы S после того, как на вход $S(f_i)$ подано слово a .

Пусть b — слово в входном алфавите для f_i . Введем обозначение

$$Q(b) = \{q \in Q_S \mid \exists a \in E_k^*(n) \text{ такое, что } b = \text{in}(a) \text{ и } q = \text{state}(a)\},$$

где Q_S — множество состояний схемы S .

Пусть Q_k — множество, элементами которого являются все множества $Q(b)$ такие, что длина слова b не больше, чем k . Очевидно, что $Q_k \subseteq Q_{k+1}$. Поскольку $|Q_0| = 1$ и $|Q_k| \leq 2^p$, найдется $t' \leq 2^p = t$ такое, что $Q_{t'} = Q_{t'-1}$.

Построим автомат f такой, что $S(f) = h_0$. Его множеством состояний будет множество всех вершин дерева о.-д. функции f_i яруса, не большего чем t' (начальная вершина образует нулевой ярус). Начальным состоянием будет начальная вершина дерева. Функция переходов и функция выходов состояния, соответствующего вершине w яруса, меньшего чем t' , совпадает с функцией переходов и функцией выходов вершины w . Осталось определить функцию переходов и выходов для состояний, соответствующих вершинам яруса t' . Пусть $\text{way}(w)$ — слово, переводящее начальное состояние дерева f_i в вершину w . По определению t' для каждой вершины w_1 яруса t' существует вершина w_2 яруса, меньшего чем t' , такая, что $Q(\text{way}(w_1)) = Q(\text{way}(w_2))$. Тогда функцию переходов и выходов в состоянии, соответствующем w_1 , определим так же, как в состоянии, соответствующем w_2 . Автомат f построен.

Докажем, что $S(f) = h_0$.

Пусть $\text{in}'(a)$ — слово, пришедшее на вход f в случае, если на вход $S(f)$ подали слово a ; $\text{state}'(a)$ — состояние схемы S после того, как на вход $S(f)$ подали слово a .

Пусть b — слово из входного алфавита для f . Введем обозначение

$$Q'(b) = \{q \in Q_S \mid \exists a \in E_k^*(n) \text{ такое, что } b = \text{in}'(a) \text{ и } q = \text{state}'(a)\}.$$

После того, как на вход автомата f придет слово b , он перейдет в состояние, соответствующее какой-то вершине w дерева о.-д. функции f_i яруса, не большего чем t' . Для вершины w существует и единственно слово $b' = \text{way}(w)$, по которому можно перейти от начальной вершины в w . Будем в этом случае писать, что $b' = \text{pr}(b)$. Докажем, что $Q'(b) \subseteq Q(\text{pr}(b))$. Пусть b — самое короткое слово такое, что $Q'(b) \not\subseteq Q(\text{pr}(b))$. Его длина не может быть меньше t' , так как для слов длины, не превосходящей t' , $\text{in}'(a) = \text{in}(a)$, $\text{state}'(a) = \text{state}(a)$, $\text{pr}(b) = b$, и значит, $Q'(b) = Q(b) = Q(\text{pr}(b))$. Пусть q_2 такое, что $q_2 \in Q'(b)$ и $q_2 \notin Q(\text{pr}(b))$. Это значит, что найдется такое слово a , что $b = \text{in}'(a)$ и под действием a автомат $S(f)$ перейдет в состояние q_2 . Пусть в предыдущий момент времени $S(f)$ находился в состоянии q_1 . Обозначим b_1 слово b без последней буквы β . Тогда $q_1 \in Q'(b_1)$ и $q_1 \in Q(\text{pr}(b_1))$. По построению автомата f его функция выходов и переходов после слова b_1 совпадает с функцией выходов и переходов после слова $\text{pr}(b_1)$. Значит, в следующий момент времени $S(f)$ из q_1 перейдет в q_2 в обоих случаях и q_2 принадлежит также и $Q(\text{pr}(b_1) \circ \beta)$, где $a \circ b$ обозначает конкатенацию слов a и b . Заметим, что если $|\text{pr}(b_1)| < t'$, то $\text{pr}(b_1) \circ \beta = \text{pr}(b_1 \circ \beta) = \text{pr}(b)$, то есть $Q(\text{pr}(b_1) \circ \beta) = Q(\text{pr}(b))$. Если же $|\text{pr}(b_1)| = t'$, то по построению автомата f

$$Q(\text{pr}(b_1) \circ \beta) = Q(\text{pr}(b_1 \circ \beta)).$$

Итак, q_2 принадлежит $Q(\text{pr}(b))$. Получаем противоречие.

Пусть a — произвольное слово, подаваемое на вход $S(f)$, $b = \text{in}'(a)$, $q = \text{state}'(a)$. Тогда $q \in Q(\text{pr}(b))$, поскольку $Q'(b) \subseteq Q(\text{pr}(b))$. А поскольку после b у f такая же функция выходов, как и после $\text{pr}(b)$, то после a автомат $S(f)$ поведет себя так же, как после произвольного слова a' такого, что $\text{pr}(b) = \text{in}(a')$. А так как $|a'| \leq t'$ и поведение $S(f)$ совпадает с поведением $S(f_t)$ на словах длины, не большей t' , то $S(f)$ выдаст на выходе 0 независимо от входа. Выходит, что $S(f) = h_0$ на всех словах.

Следующая теорема является прямым следствием леммы 1.

Теорема 1. *Существует алгоритм для определения того, имеет или нет решение произвольное автоматное уравнение.*

4. Понятие ограниченно-недетерминированной функции

Договоримся слово, составленное из первых t букв слова (сверхслова) $\alpha \in E_k^*(n)$ ($E_k^\infty(n)$), обозначать $|\alpha|_t$. Конкатенацию двух слов a и b , как и выше, будем обозначать $a \circ b$. Длину слова a обозначим $|a|$.

Пусть M_k — множество всех подмножеств множества E_k^∞ , исключая пустое множество. Если $\lambda \in M_k$ то через $|\lambda|_t$ будем обозначать множество всех слов в алфавите E_k^t , являющихся началами длины t сверхслов из λ , то есть

$$|\lambda|_t = \{a \in E_k^t \mid \exists \alpha \in \lambda \text{ такое, что } |\alpha|_t = a\}.$$

Определение 1. Функцию $g: E_k^\infty(n) \rightarrow M_k$ будем называть γ -недетерминированной, если

$$\forall t \geq 1, \forall \alpha, \beta \in E_k^\infty(n) \quad (|\alpha|_t = |\beta|_t) \implies (|g(\alpha)|_t = |g(\beta)|_t).$$

Пусть $t \geq 1$, M_k^t — множество всех непустых подмножеств множества E_k^t . Так же, как и в случае рассмотрения о.-д. функции, каждая γ -недетерминированная функция $g(x_1, \dots, x_n)$ для любого $t \geq 1$ индуцирует некоторое γ -недетерминированное отображение множества $E_k^t(n)$ в M_k^t , то есть некоторую γ -недетерминированную функцию $g^t(x_1, \dots, x_n)$, определенную на наборах слов в алфавите E_k длины t . Очевидно, что любая γ -недетерминированная функция $g(x_1, \dots, x_n)$ однозначно определяется последовательностью γ -недетерминированных функций

$$g^1(x_1, \dots, x_n), g^2(x_1, \dots, x_n), \dots$$

По аналогии с тем, как это делается для детерминированных функций (см. гл. 3 в [2]), введем понятие остаточной функции для γ -недетерминированной функции $g(x_1, \dots, x_n)$.

Определение 2. Пусть $\alpha \in E_k^\infty(n)$, $\beta \in g(\alpha)$, $t \geq 1$, $a = |\alpha|_t$, $b = |\beta|_t$. Тогда функцию $f_{a,b}: E_k^\infty(n) \rightarrow M_k$ будем называть остаточной функцией для g , если для всех $x \in E_k^\infty(n)$

$$f_{a,b}(x) = \{y \in M_k \mid \exists v \in g(a \circ x) \text{ такое, что } v = b \circ y\}.$$

Заметим, что в отличие от детерминированных функций остаточные функции для γ -недетерминированных функций определяются не только по набору $\alpha = (b_1, \dots, b_n)$ из $E_k^t(n)$, но и по слову $\beta \in g^t(b_1, \dots, b_n)$.

Рис. 3.

Лемма 2. Функция $f_{a,b}$ является γ -недетерминированной.

Доказательство. Возьмем произвольные $t \geq 1, \alpha, \beta \in E_k^\infty(n)$ такие, что $|\alpha|_t = |\beta|_t$. Введем обозначения $c = |\alpha|_t, \alpha = c \circ \alpha_1, \beta = c \circ \beta_1$. Тогда

$$\begin{aligned}
 |f_{a,b}(\alpha)|_t &= |\{y \in M_k \mid \exists \gamma \in g(a \circ \alpha) \text{ такая, что } \gamma = b \circ y\}|_t \\
 &= |\{y|_t \mid y \in M_k \text{ и } \exists \gamma \in g(a \circ c \circ \alpha_1) \text{ такая, что } \gamma = b \circ y\}|_t \\
 &= |\{y|_t \mid y \in M_k \text{ и } \exists \gamma \in |g(a \circ c \circ \alpha_1)|_{|a|+t} \text{ такая, что } \gamma = |b \circ y|_{|a|+t}\}|_t \\
 &= |\{y|_t \mid y \in M_k \text{ и } \exists \gamma \in |g(a \circ c \circ \beta_1)|_{|a|+t} \text{ такая, что } \gamma = |b \circ y|_{|a|+t}\}|_t \\
 &= |\{y|_t \mid y \in M_k \text{ и } \exists \gamma \in g(a \circ c \circ \beta_1) \text{ такая, что } \gamma = b \circ y\}|_t \\
 &= |\{y \in M_k \mid \exists \gamma \in g(a \circ \beta) \text{ такая, что } \gamma = b \circ y\}|_t = |f_{a,b}(\beta)|_t
 \end{aligned}$$

Определение 3. Если множество всех остаточных функций γ -недетерминированной функции конечно, то она называется ограниченно-недетерминированной (о.-нд. функцией).

Определение 4. Будем говорить, что о.-д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$ вложима в о.-нд. функцию $g(x_1, \dots, x_n)$, если для любого набора $(b_1, \dots, b_n)$ элементов из E_k^∞

$$f(b_1, \dots, b_n) \in g(b_1, \dots, b_n).$$

Аналогично тому, как строится диаграмма Мура для о.-д. функции, для о.-нд. функции можно построить диаграмму Мура, которая однозначно определяет соответствующую ей о.-нд. функцию (строгое определение диаграммы Мура для о.-нд. функции будет дано ниже).

Пример 1. Пусть $k = 2$. В о.-нд. функцию, диаграмма Мура которой изображена на рис. 3, вложимы все о.-д. функции с одним входом и одним выходом.

Лемма 3. Пусть $f(x)$ — о.-д. функция с v состояниями, $g(x)$ — о.-нд. функция с w состояниями, $t = 2^{vw}$, и пусть $f^t(b) \in g^t(b)$ для любого $b \in E_k^t(n)$. Тогда о.-д. функция $f(x)$ вложима в о.-нд. функцию $g(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi_f(b)$ — состояние автомата f после того, как на его вход пришло слово b , а $\psi_f(b)$ — слово, полученное при этом на выходе автомата f . В о.-нд. функции из каждого состояния существует не более одного перехода с меткой e_1/e_2 . Значит, для пары $(b, \psi_f(b))$ существует не более одного пути в g от начального состояния. Если он есть, то вершину на которой он заканчивается будем обозначать $\varphi_g(b)$.

Пусть P_u — множество всех пар $(\varphi_f(b), \varphi_g(b))$ таких, что $|b| = u$. Поскольку число всех пар $(\varphi_f(x), \varphi_g(x))$ есть vw , число различных P_u не превосходит $t = 2^{vw}$. Значит, найдутся два таких t_1 и t_2 , $t_1 < t_2 \leq t$, что $P_{t_1} = P_{t_2}$.

Для любой пары $(\varphi_f(x), \varphi_g(x))$ функция f_x или вложима в $g_{(x, \psi_f(x))}$ на словах длины 1, или нет. В первом случае будем говорить, что пара $(\varphi_f(x), \varphi_g(x))$ белая. Очевидно, что если для любого x пара $(\varphi_f(x), \varphi_g(x))$ белая, то f вложима в g .

По условию леммы все пары из P_{t_1} белые, так как $t_1 < t$. Значит, и в P_{t_2} все пары тоже белые.

Справедливо равенство $P_{t_1+1} = P_{t_2+1}$. В P_{t_1+1} все пары белые, следовательно, и в P_{t_2+1} все пары белые, и так далее.

Следующая теорема является прямым следствием леммы 3.

Теорема 2. *Существует алгоритм для определения того, вложима или нет произвольная о.-д. функция f в произвольную о.-нд. функцию g .*

Пусть g — произвольная о.-нд. функция. Через N_g обозначим множество всех о.-д. функций, вложимых в g . Теорема 2 говорит, что для любой о.-нд. функции g множество N_g рекурсивно.

5. Описание множества всех решений произвольного автоматного уравнения

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $S(x) = h_0$ — произвольное автоматное уравнение, имеющее непустое множество решений. Тогда по схеме S эффективно строится о.-нд. функция g такая, что множество N_g совпадает с множеством всех решений данного автоматного уравнения.*

Такую о.-нд. функцию g будем называть о.-нд. функцией всех решений.

По аналогии с диаграммой Мура для о.-д. функции определим диаграмму Мура для о.-нд. функции.

Определение 5. Диаграммой Мура недетерминированной функции

$$g: E_k^\infty(m) \rightarrow M_k$$

назовем ориентированный граф G со следующими свойствами.

- (1) Каждой вершине v графа G сопоставлена какая-то остаточная функция $f_{a,b} = \text{сог}(v)$ функции g .
- (2) В G выделена ровно одна вершина, ей сопоставлена функция g , которая является остаточной функцией самой себя.
- (3) Каждой дуге графа G поставлена метка из множества $E_k(m) \times E_k$.
- (4) Пусть $f_{a,b} = \text{сог}(v_1)$, $f_{c,d} = \text{сог}(v_2)$. Если из v_1 в v_2 идет дуга с меткой e_1/e_2 , то $f_{aoe_1.boe_2} = f_{c,d}$.
- (5) Для любого $e_1 \in E_k(m)$ из любой вершины v выходит не менее одной стрелки с меткой вида $e_1/\cdot$.
- (6) Для любой метки $e_1/e_2 \in E_k(m) \times E_k$ из любой вершины v выходит не более одной стрелки с меткой e_1/e_2 .

Диаграмма Мура для о.-нд. функции является, по сути, диаграммой Мура недетерминированного автомата. Любой ориентированный граф с одной выделенной вершиной и с метками на дугах из множества $E_k(m) \times E_k$ является диаграммой Мура какой-то о.-нд. функции, если из каждой вершины v для каждого $e_1 \in E_k(m)$ найдется дуга из этой вершины с меткой вида $e_1/\cdot$ и для любого $e_2 \in E_k(m)$ стрелок с меткой e_1/e_2 не более одной.

Определение 6. Пусть D_1 — диаграмма Мура о.-нд. функции $g: E_k^\infty(m) \rightarrow M_k$, D_2 — диаграмма Мура о.-д. функции $f: E_k^\infty(m) \rightarrow E_k^\infty$, V_1 — множество вершин D_1 , V_2 — множество вершин D_2 , v_1^0 — выделенная вершина D_1 , v_2^0 — выделенная вершина D_2 ,

Будем говорить что D_2 вкладывается в D_1 отображением $\omega: V_2 \rightarrow 2^{V_1}$, если $v_1^0 \in \omega(v_2^0)$ и для всех $v, u \in V_2$, если из v в u идет дуга с меткой $e_1/e_2 \in E_k(m) \times E_k$, то из каждой вершины $\omega(v)$ идет дуга с меткой e_1/e_2 в одну из вершин $\omega(u)$.

Теперь есть два определения для термина вложимость:

- (1) о.-д. функция вкладывается в о.-нд. функцию (определение 4),
- (2) диаграмма Мура о.-д. функции вкладывается отображением ω в диаграмму Мура о.-нд. функции (определение 6).

Связь между этими определениями дает следующая лемма.

Лемма 4. Функция f вложима в g по определению 4, если и только если существует отображение $\omega: V_2 \rightarrow 2^{V_1}$ (см. определение 6), которым D_2 вкладывается в D_1 по определению 6.

Доказательство. Пусть f вложима в g по определению 4. Построим отображение ω . Пусть $\text{согг}_1(v_1)$ — остаточные функции о.-нд. функции g , поставленные в соответствие вершинам $v_1 \in V_1$. Аналогично определяется $\text{согг}_2(v_2)$ для f для всех $v_2 \in V_2$. Отображение ω определяется следующим образом: для $v_2 \in V_2$

$$\omega(v_2) = \{v_1 \in V_1 : \text{согг}_2(v_2) \text{ вложима (по определению 4) в } \text{согг}_1(v_1)\}.$$

Докажем, что D_2 вкладывается в D_1 таким отображением ω .

Первое условие $v_1^0 \in \omega(v_2^0)$ определения 6 выполнено, поскольку $\text{согг}_2(v_2^0) = f$ вложима в $\text{согг}_1(v_1^0) = g$.

Докажем выполнимость второго условия. Пусть $v, u \in V_2$ и из v в u идет дуга с меткой $e_1/e_2 \in E_k(m) \times E_k$. Пусть $\text{согг}_2(v) = f_{a,b}$. Тогда $\text{согг}_2(u) = f_{a \circ e_1, b \circ e_2}$. Пусть y — произвольная вершина из $\omega(v)$. По определению ω функция $f_{a,b}$ вкладывается в $\text{согг}_1(y)$. Значит, $f_{a \circ e_1, b \circ e_2}$ тоже вкладывается в одну из вершин диаграммы D_1 . В частности, в ту вершину y' , куда ведет стрелка с меткой e_1/e_2 из y . А эта вершина лежит в $\omega(u)$ (по определению ω). Таким образом, доказаны оба пункта из определения 6.

Допустим теперь что D_2 вкладывается в D_1 неким отображением ω . Необходимо доказать, что f вложима в g . Для этого возьмем любое сверхслово $a \in E_k^\infty(m)$. Пусть $f(a) = b$. Сверхслову a/b соответствует некий путь в D_2 , выходящий из вершины v_2^0 . В силу тех свойств, которым по определению удовлетворяет ω , такой же путь от вершины v_1^0 можно провести и в D_1 . Следовательно, $b \in g(a)$, что и требовалось доказать.

Из леммы 4 следует, что если какая-то диаграмма Мура о.-д. функции f вкладывается в какую-то диаграмму Мура о.-нд. функции g , то любая диаграмма Мура о.-д. функции f вкладывается в любую диаграмму Мура о.-нд. функции g .

Итак, пусть $S(x) = h_0$ — произвольное автоматное уравнение, имеющее непустое множество решений. Опишем построение о.-нд. функции всех решений.

Договоримся сначала о некоторых обозначениях. Схема S имеет n входов и один выход. У свободной позиции X имеется m входов и один выход. В схеме S имеется l элементов, $K_1, \dots, K_l$, не являющихся свободной позицией. A_i — автомат, соответствующий элементу K_i , Q_i — множество состояний автомата A_i , q_i^0 — начальное состояние автомата A_i , $i = 1, \dots, l$.

Построим по схеме-шаблону S граф $G_1(S)$. Граф $G_1(S)$ ориентированный, и у него каждая дуга будет иметь метку из множества $E_k(n) \times E_k \times E_k(m) \times E_k$. Вершинами этого графа будет множество $Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_l$. Будем говорить, что S находится в состоянии $q = (q_1, \dots, q_l)$, если автомат A_i находится в состоянии q_i , $i = 1, \dots, l$. Пусть S находится в состоянии $q = (q_1, \dots, q_l)$. Пусть на вход S подано in_1 , на вход свободной позиции пришло при этом out_1 , на выходе свободной позиции получено in_2 , на выходе S получено out_2 и i -й фиксированный автомат перешёл в состояние r_i , $i = 1, \dots, l$. Тогда и только тогда из вершины $q = (q_1, \dots, q_l)$ в вершину $r = (r_1, \dots, r_l)$ идет дуга с меткой $(in_1, in_2, out_1, out_2)$.

Построим граф $G_2(S)$. Для этого преобразуем графом $G_1(S)$ с помощью следующей процедуры. Назовем дугу графа $G_1(S)$ неправильной, если она помечена меткой вида $(in_1, in_2, out_1, out_2)$, где $out_2 \neq 0$. Выбросим из $G_1(S)$ все неправильные дуги. Получим граф $G'_1(S)$. Вершину графа $G'_1(S)$ назовем неправильной, если существует $e_1 \in E_k(n)$ такое, что множество дуг выходящих из данной вершины и помеченных метками вида $(e_1, \dots, \dots, \dots)$ пусто. Удалим из $G'_1(S)$ все неправильные вершины. При удалении вершины удаляются также все дуги, выходящие из нее или входящие в нее. После этого какие-нибудь другие вершины могут стать неправильными. Они также удаляются. Удаление продолжается до тех пор, пока в графе не останется неправильных вершин. Полученный граф назовем $G''_1(S)$. Тогда $G_2(S)$ — это граф, являющийся компонентой связности графа $G''_1(S)$ с началом в вершине $(q_1^0, \dots, q_l^0)$.

Здесь и далее под компонентой связности с началом в вершине x будем понимать подграф, содержащий вершину x и все вершины до которых можно дойти из этой вершины по стрелкам (вдоль стрелок) графа.

Заметим, что $G_2(S)$ не может оказаться пустым, то есть не имеющим ни одной вершины. Это вытекает из следствия 1 и предположения о том, что уравнение имеет решение.

Лемма 5. Пусть f — автомат с n входами и одним выходом такой, что $S(f) = h_0$. Тогда $S(f)$ в любой момент времени находится в состоянии, входящем в множество вершин $G_2(S)$.

Доказательство. Построим граф g . Вершинами g будут все состояния схемы-шаблона S , в которых может находиться $S(f)$. Пусть $S(f)$ находится в состоянии q . Пусть на вход S подано in_1 , на входе свободной позиции получено out_1 , на выходе свободной позиции получено in_2 и схема-шаблон перешла в состояние k . Тогда на выходе $S(f)$ получим 0 (так как $S(f) = h_0$). Тогда и только тогда в графе g из вершины u в вершину v идет дуга с меткой $(in_1, in_2, out_1, 0)$.

Очевидно, что g является подграфом графа $G_1(S)$. Также очевидно, что у g все дуги правильные. Значит, он является подграфом $G'_1(S)$. Все вершины g правильные. Значит, он является подграфом $G''_1(S)$. Имеется вершина $(q_1^0, \dots, q_l^0)$, и до любой другой вершины можно дойти по стрелкам из $(q_1^0, \dots, q_l^0)$. Значит, g является подграфом $G_2(S)$. Автомат $S(f)$ в любой момент времени находится в состоянии, входящем во множество вершин g , а значит, и в $G_2(S)$.

Следствие 1. Если существует f такая, что $S(f) = h_0$, то $G_2(S)$ не пуст.

Множество вершин графа $G_2(S)$ обозначим Q . Множество вершин графа $G_2(S)$, в которые ведут дуги из $q \in Q$, помеченные меткой $(\dots, \dots, e_1, \dots)$, обозначим $\chi_{in}(q, e_1)$. Множество вершин графа $G_2(S)$, в которые ведут дуги из $q \in Q$, помеченные меткой $(\dots, e_2, e_1, \dots)$, обозначим $\chi_{inout}(q, e_1, e_2)$.

Смысл χ_{in} и χ_{inout} очень прост. Пусть S находится в состоянии $q \in Q$. Пусть при этом на вход S пришло что-то, в результате чего на вход свободной позиции пришло e_1 . Тогда множество состояний, где S может оказаться в следующий момент времени, входит в $\chi_{in}(q, e_1)$. Если при предыдущих условиях к тому же на выходе свободной позиции оказалось e_2 , то в следующий момент времени схема окажется в каком-то состоянии из $\chi_{inout}(q, e_1, e_2) \subseteq \chi_{in}(q, e_1)$.

Построим граф $G_3(S)$. Множество вершин графа $G_3(S)$ — множество всех подмножеств множества вершин графа $G_2(S)$, в том числе и пустое множество. Граф $G_3(S)$ ориентированный, и у него каждая дуга будет иметь метку из множества $E_k(m) \times E_k$. Из вершины u_1 графа $G_3(S)$ тогда и только тогда идет дуга с меткой e_1/e_2 к вершине

$$u_2 = \bigcup_{\forall q \in u_1} \chi_{inout}(q, e_1, e_2),$$

когда для всех $q \in u_1$

$$\chi_{in}(q, e_1) \neq \emptyset \implies \chi_{inout}(q, e_1, e_2) \neq \emptyset \quad (2)$$

Других стрелок в $G_3(S)$ нет.

Заметим, что граф $G_3(S)$ не пустой, так как $G_2(S)$ не пустой. Из определения $G_3(S)$ очевидно, что из любого его состояния не выходят две стрелки с одинаковыми метками. Из состояния, соответствующего пустому множеству, все стрелки идут в него же.

Построим граф $G_4(S)$. Он строится из $G_3(S)$ также, как $G_2(S)$ из $G_1(S)$. Вершину графа $G_3(S)$ назовем неправильной, если существует $e_1 \in E_k(m)$ такое, что множество дуг, выходящих из данной вершины и помеченных метками вида $e_1/\dots$ пусто. Удалим из $G_3(S)$ все неправильные вершины. При удалении вершины удаляются также все дуги, выходящие из нее или входящие в нее. После этого какие-нибудь другие вершины могут стать неправильными. Удаляем также и их. Удаления продолжаем до тех пор, пока в графе не останется неправильных вершин. Полученный граф назовем $G'_3(S)$. Тогда $G_4(S)$ — это граф, являющийся компонентой связности графа $G'_3(S)$ с началом в вершине $\{(q_1^0, \dots, q_l^0)\}$.

Нетрудно видеть, что $G_4(S)$ с выделенной вершиной $\{(q_1^0, \dots, q_l^0)\}$ является диаграммой Мура.

Лемма 6. Автомат z тогда и только тогда вложим в $G_3(S)$ с начальной вершиной $\{(q_1^0, \dots, q_l^0)\}$, когда он вложим в $G_4(S)$.

Доказательство. Нужно оговориться, что, строго говоря, определение 6 распространяется только на вложение в диаграммы Мура, но его можно использовать и для вложения в произвольные графы, что и используется в формулировке данного утверждения.

Если z вкладывается в $G_4(S)$ отображением ω , то тем же самым отображением он вкладывается и в $G_3(S)$.

Пусть теперь z отображением ω вкладывается в $G_3(S)$. Пусть Q_z — множество состояний автомата z , а U' — множество всех состояний $G_3(S)$, в которые вкладываются

состояния из Q_z , то есть

$$U' = \bigcup_{q \in Q_z} \omega(q).$$

По определению 6 все состояния из U' правильные, поскольку у любого $q \in Q_z$ и любого $e_1 \in E_k(m)$ есть стрелка, идущая из q с меткой вида $e_1/\cdot$. Следовательно, у всех состояний из $\omega(q)$ тоже будет такая стрелка.

Кроме того, ни одно состояние из U' не будет удалено в процессе перехода от $G_3(S)$ к $G'_3(S)$. Действительно, ни одно состояние не может быть удалено первым, поскольку на этот момент у него есть все необходимые для правильного состояния стрелки (если даже брать только стрелки, идущие от него к вершинам из U'). Итак, все вершины из U' являются вершинами $G'_3(S)$.

Вершина $\{(q_1^0, \dots, q_l^0)\} \in \omega(q_z^0) \subseteq U'$, где q_z^0 — начальное состояние автомата z . Построим отображение ω' , отображающее z в $G_4(S)$. Для каждого $q \in Q_z$ значения $\omega'(q)$ есть те и только те состояния из $\omega(q)$, которые лежат в компоненте связности с центром в $\{(q_1^0, \dots, q_l^0)\}$. Очевидно, что ω' обладает всеми необходимыми согласно определению 6 свойствами. Следовательно, z вкладывается отображением ω' в $G_4(S)$.

По сути дела, $G_4(S)$ является той частью $G_3(S)$, в которую могут вкладываться автоматы.

Из следующей леммы и предположения, что уравнение $S(x) = h_0$ имеет решение, следует что $G_4(S)$ не пуст.

Лемма 7. Автомат z тогда и только тогда является решением уравнения $S(x) = h_0$, когда он вложим в ограниченно-недетерминированную функцию $G_4(S)$.

Доказательство. Введем следующие обозначения. Пусть Q_z — множество состояний автомата z , q_z^0 — начальное состояние автомата z , U — множество состояний $G_3(S)$.

Докажем необходимость. Пусть $S(z) = h_0$. По лемме 6 достаточно доказать, что z вложим в $G_3(S)$ с выделенной вершиной $\{(q_{s_1}^0, \dots, q_{s_l}^0)\}$. Построим требуемое для вложения отображение $\omega: Q_z \rightarrow 2^U$.

Пусть для всех $q_z \in Q_z$ значение $\omega'(q_z)$ есть множество всех состояний $S(z)$, в которых схема-шаблон может находиться в те моменты времени, когда z находится в состоянии q_z . Если таких состояний нет, то $\omega'(q_z) = \emptyset$. По предложению 5 все эти состояния схемы-шаблона являются вершинами $G_2(S)$. Значит, ω' есть отображение Q_z в множество вершин $G_3(S)$.

Для каждого $q_z \in Q_z$ определим ω равенством

$$\omega(q_z) = \{u \in U \mid u \subseteq \omega'(q_z)\}.$$

Докажем, что z вложим в $G_3(S)$ отображением ω .

Очевидно, что выделенная в $G_3(S)$ вершина $\{(q_{s_1}^0, \dots, q_{s_l}^0)\}$ входит в $\omega'(q_z^0)$, поскольку S находится в этом состоянии в начальный момент времени, когда z находится в состоянии q_z^0 . Поэтому по определению ω справедливо включение

$$\{(q_{s_1}^0, \dots, q_{s_l}^0)\} \in \omega(q_z^0).$$

Пусть q_1 и q_2 — любые два состояния автомата z такие, что из q_1 в q_2 есть переход вида e_1/e_2 . Пусть u — произвольная вершина $G_3(S)$ из $\omega(q_1)$. Нужно найти для нее такую вершину $v \in \omega(q_2)$, чтобы из u в v в $G_3(S)$ шла стрелка с меткой e_1/e_2 .

Проверим, выходит ли в $G_3(S)$ стрелка из u с меткой e_1/e_2 . Пусть q — любое состояние схемы-шаблона S из u . Согласно определению $G_3(S)$ для существования стрелки требуется выполнение условия (2). Проверим его справедливость. В случае $\chi_{\text{in}}(q, e_1) = \emptyset$ условие (2) очевидно выполняется. Неравенство $\chi_{\text{in}}(q, e_1) \neq \emptyset$ означает, что если S находится в состоянии q , то на вход свободной позиции может прийти e_1 . Автомат z находится в состоянии q_1 , в этом состоянии, получив на вход e_1 , на выходе он выдаст e_2 . Пусть в следующий момент времени S будет находиться в состоянии q' . А поскольку q и q' являются вершинами $G_2(S)$ (по лемме 5) и из q в q' идет стрелка вида $(\dots, e_2, e_1, \dots)$, по определению χ_{inout}

$$q_1 \in \chi_{\text{inout}}(q, e_1, e_2).$$

Следовательно, $\chi_{\text{inout}}(q, e_1, e_2) \neq \emptyset$. Условие (2) выполнено.

Значит, в $G_3(S)$ из u выходит стрелка с меткой e_1/e_2 и идет (по построению $G_3(S)$) в

$$v' = \bigcup_{q \in u} \chi_{\text{inout}}(q, e_1, e_2).$$

Для любой вершины q' графа $G_2(S)$, входящей в v' , существует вершина $q'' \in u$ (графа $G_2(S)$) такая, что $q' \in \chi_{\text{inout}}(q'', e_1, e_2)$. Поскольку $u \in \omega(q_1)$, то $u \subseteq \omega'(q_1)$. Таким образом $q'' \in \omega'(q_1)$, что означает, что $S(z)$ может находиться в состоянии q'' , когда z находится в состоянии q_1 . Из определения χ_{inout} следует, что (поскольку $q' \in \chi_{\text{inout}}(q'', e_1, e_2)$) существует такое $a \in E_k(n)$, подав которое в этот момент на вход $S(z)$, на входе свободной позиции мы получим e_1 , на выходе e_2 , а $S(z)$ перейдет в состояние q' . При этом z перейдет в состояние q_2 . Таким образом, $q' \in \omega'(q_2)$, а поскольку это верно для любого $q' \in v'$, то $v' \subseteq \omega'(q_2)$. Следовательно, $v' \in \omega(q_2)$. Итак, мы нашли v такое, что $v = v'$.

Докажем достаточность. Пусть z вложим в $G_4(S)$ отображением ω . Нужно доказать что $S(z) = h_0$. Введем функцию $\Omega: Q_z \rightarrow U$, полагая для $q_z \in Q_z$

$$\Omega(q_z) = \bigcup_{u \in \omega(q_z)} u,$$

Докажем, что в любой момент времени, если z находится в состоянии q_z , то S находится в состоянии $q \in \Omega(q_z)$. В каждом состоянии из множества $\Omega(q_z)$ схема выдает на выходе 0 (поскольку они являются вершинами $G_2(S)$), поэтому $S(z)$ будет равен h_0 .

Доказывать будем индукцией по длине входного слова в алфавите $E_k(n)$. В начальный момент времени (длина входного слова равна нулю) S находится в состоянии $(q_1^0, \dots, q_l^0)$, автомат z — в состоянии q_z^0 и $\{(q_1^0, \dots, q_l^0)\}$ — начальное состояние $G_4(S)$. Автомат z вложим в $G_4(S)$ относительно отображения ω , поэтому $\{(q_1^0, \dots, q_l^0)\} \in \omega(q_z^0)$. Следовательно, $(q_1^0, \dots, q_l^0) \in \Omega(q_z^0)$. Базис индукции доказан.

Пусть утверждение доказано для всех слов длины n , $n \geq 0$. Докажем его для всех слов длины $n + 1$. Возьмем произвольное слово $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$ длины $n + 1$. Пусть после слова $a_1 \dots a_n$ автомат z оказался в состоянии q_z а S — в состоянии q . По предположению индукции $q \in \Omega(q_z)$. Пусть после этого на вход схемы подается a_{n+1} , а на вход z — $e_1 \in E_k(m)$. В следующий момент времени z перейдет в какое-то другое состояние q'_z по дуге с меткой e_1/e_2 , а S перейдет в какое-то другое состояние q' по дуге с меткой $(a_{n+1}, e_2, e_1, \dots)$. Пусть $u \in \omega(q_z)$ — такое состояние $G_4(S)$, что $q \in u$. Поскольку z вложим в $G_4(S)$ отображением ω , то в $G_4(S)$ из u идет стрелка с меткой e_1/e_2 в $u' \in \omega(q'_z)$. В то же время

$$u' = \bigcup_{\forall q \in u} \chi_{\text{inout}}(q, e_1, e_2),$$

Рис. 4.

и так как $q' \in \chi_{\text{inout}}(q, e_1, e_2)$, то $q' \in u'$. Отсюда следует, что $q' \in \Omega(q'_2)$.

Шаг индукции завершен и лемма доказана.

Тем самым доказана и теорема 3.

Легко показать, что все рассуждения и утверждения остаются истинными и в случае, когда у свободной позиции не один, а несколько выходов.

6. Обратная задача

Выше было доказано, что множество решений произвольного автоматного уравнения является вложимым в некоторую о.-нд. функцию. Верно и обратное утверждение.

Теорема 4. Для любой о.-нд. функции g существует такое автоматное уравнение $S(x) = h_0$, множество решений которого вложимо в g .

Доказательство. Пусть A — алфавит входных сверхслов о.-нд. функции g , B — алфавит выходных сверхслов. Возьмем диаграмму Мура для g . Заменяем в ней все метки вида a/b на $(a, b)/0$. Поскольку для каждой вершины в диаграмме Мура о.-нд. функции существует не более одной исходящей стрелки с меткой a/b , полученная диаграмма будет диаграммой частичного детерминированного автомата с входным алфавитом $A \times B$ и выходом $\{0, 1\}$. Сделаем полученную диаграмму полностью определенной (а не частично). Для этого добавим вершину v и проведем все недостающие стрелки из всех состояний в v так, чтобы автомат стал полностью определенным. Выходное значение на этих стрелках равно 1. Обозначим этот автомат G . Тогда у схемы, изображенной на рисунке 4, множество решений будет вложимо в g .

Автор выражает благодарность П. А. Пантелееву, внимательно просмотревшему статью и внесшему ряд полезных замечаний по тексту.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Яблонский С. В. *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.
3. Евтушенко Н., Вилла Т., Петренко А., Брайтон Р., Санджованни-Винцентелли А., *Решение уравнений в логическом синтезе*. Спектр, Томск, 1999.

Статья поступила 10.11.2003.