Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Карымов, О точности аппроксимации в предельной теореме Пуассона, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 2, 148–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:34:25

О точности аппроксимации в предельной теореме Пуассона

© 2004 г. Д. Н. Карымов

Статья посвящена нахождению неравномерных оценок в теореме Пуассона. Пусть $I_1, \dots, I_n$ — индикаторы независимых случайных событий. Введем обозначения $p_k = \mathbf{P}\{I_k = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{I_k = 0\}$, $0 \leq p_k \leq 1$, $k = 1, \dots, n$. Функцию распределения суммы таких индикаторов обозначим

$$B(x) = \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n I_k \leq x \right\}.$$

Величину скачка функции распределения $B(x)$ в точке k обозначим b_k . Мы также используем обозначения

$$P_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k, \quad P_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k^2.$$

Обозначим

$$\pi_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

величины скачков пуассоновской функции распределения с параметром $\lambda \geq 0$ и через

$$\Pi_\lambda(x) = \sum_{k \leq x} \pi_k$$

соответствующую функцию распределения.

Примером полученных в работе результатов является следующая теорема.

При $\lambda = n P_1$ и $k \geq 2 + \lambda$ выполнено неравенство

$$|b_k - \pi_k| \leq \frac{n P_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{(k-2)^2} \right) e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k-2} \right)^{k-2}$$

и при $k > 1 + \lambda e$ — неравенство

$$|B(k) - \Pi_\lambda(k)| \leq \frac{n P_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{(k-1)^2} \right) \frac{k-1}{k-1-\lambda e} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k-1} \right)^{k-1}.$$

Целью данной работы является исследование точности аппроксимации в известной предельной теореме Пуассона. Наибольший интерес для нас представляют неравномерные и нижние оценки.

Пусть $I_1, \dots, I_n$ — индикаторы независимых случайных событий. Введем обозначения

$$p_k = \mathbf{P}\{I_k = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{I_k = 0\}, \quad 0 \leq p_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Распределение суммы таких индикаторов называют обобщенным биномиальным распределением, обозначим соответствующую функцию распределения через

$$B(x) = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^n I_k \leq x\right\}.$$

Заметим, что для краткости не отмечается зависимость распределения от параметров n и $p_1, \dots, p_n$. Величину скачка функции распределения $B(x)$ в точке k обозначим b_k . Мы будем также использовать обозначения

$$P_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k,$$

$$P_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k^2.$$

Обозначим через

$$\pi_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

величины скачков пуассоновской функции распределения с параметром $\lambda \geq 0$ и через

$$\Pi_\lambda(x) = \sum_{k \leq x} \pi_k$$

соответствующую функцию распределения.

Теорема Пуассона известна как в локальной, так и в интегральной форме. Классическая локальная теорема Пуассона утверждает, что если $p_1 = \dots = p_k = p$, $p \rightarrow 0$ и $np \rightarrow \lambda$ при $n \rightarrow \infty$, где $\lambda > 0$, то имеет место сходимость $b_k \rightarrow \pi_k$ для любого фиксированного $k = 0, 1, 2, \dots$, а интегральная говорит о сходимости распределений $B \rightarrow \Pi_\lambda$ в том или ином смысле. Обычно последнюю сходимость понимают как сходимость по вариации. Известно также, что условие одинаковости распределенности $p_1 = \dots = p_k = p$ можно существенно ослабить.

С точки зрения практического применения теоремы Пуассона, особенно важной является задача оценки скорости сходимости к предельному распределению. Хорошо известна работа Ю. В. Прохорова [1], привлекающая внимание к данной тематике. Одна из полученных в этой работе оценок имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k - \pi_k| \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2} p + O(p \min(1, \lambda^{-1/2})),$$

если $p_1 = \dots = p_k = p$, $\lambda = np$, $\lambda > 0$ и $n \rightarrow \infty$. Этот результат не позволяет вычислить точность аппроксимации, но показывает ее асимптотику.

В работе И. П. Цареградского [2] при условии

$$p_1 = \dots = p_k = p, \quad \lambda = np, \quad \lambda > 0, \quad 0 < p \leq 1/2$$

имеется оценка

$$|B(k) - \Pi_\lambda(k)| \leq 3 \frac{p}{1-p},$$

а в работе С. Я. Шоргина [3] доказано, что

$$|B(k) - \Pi_\lambda(k)| \leq 2,81 \frac{P_2}{P_1},$$

обе оценки равномерны по $k = 0, 1, 2, \dots$

Л. Ле Кам [4] доказал при $\lambda = nP_1$ оценку для метрики полной вариации, из которой следует такая равномерная оценка

$$|b_k - \pi_k| \leq nP_2.$$

В течение довольно долгого времени существовало два класса оценок при $\lambda = nP_1$. Одни имели вид

$$|b_k - \pi_k| \leq C_1 \frac{P_2}{P_1},$$

а другие

$$|b_k - \pi_k| \leq C_2 n P_2,$$

так что результат приходилось записывать в виде минимума

$$|b_k - \pi_k| \leq \min(C_1 P_2 / P_1, C_2 n P_2).$$

В 1984 году в [5] удалось объединить эти оценки, доказав, что при $\lambda = nP_1$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n |b_k - \pi_k| \leq \frac{P_2}{P_1} (1 - e^{-nP_1}).$$

Легко видеть, что величина в правой части последнего неравенства не превосходит $\min(P_2/P_1, nP_2)$. По-видимому, эта оценка является пока наилучшей. О методах доказательства подобных оценок можно прочесть в работах [6] и [7].

Как будет продемонстрировано ниже, при больших значениях k эти оценки можно улучшить, то есть можно получить так называемые неравномерные оценки.

Например, так как оба распределения имеют экспоненциальные моменты для любого показателя $a \geq 0$, имеют место следующие неравенства

$$\begin{aligned} |b_k| &\leq e^{-ak} \sum_{l=0}^{\infty} b_l e^{al} \\ &= e^{-ak} \mathbf{E} \exp \left\{ a \sum_{l=1}^n I_l \right\} = \prod_{l=1}^n (1 - p_l + p_l e^a) e^{-ak}, \\ |\pi_k| &\leq e^{-ak} \sum_{l=0}^{\infty} \pi_l e^{al} \\ &= e^{-ak} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} e^{al} = \exp\{\lambda(e^a - 1)\} e^{-ak}. \end{aligned}$$

Отсюда для случая $\lambda = nP_1$ сразу следует неравномерная оценка

$$\begin{aligned} |b_k - \pi_k| &\leq \left(\prod_{l=1}^n (1 + p_l(e^a - 1)) + \exp\{\lambda(e^a - 1)\} \right) e^{-ak} \\ &\leq 2 \exp\{\lambda(e^a - 1)\} e^{-ak}, \end{aligned}$$

которая не учитывает сближение распределений при росте n , но, тем не менее, оказывается лучше приведенных выше оценок при достаточно больших значениях аргумента k .

В книге А. А. Боровкова [8] при условии

$$p_1 = \dots = p_k = p, \quad \lambda = np, \quad \lambda > 0$$

имеется неравномерная оценка

$$b_k - \pi_k = \pi_k \left(\frac{k - (k - \lambda)^2}{2n} + O\left(\frac{k^3 + \lambda^3}{n^2}\right) \right),$$

но она сформулирована в терминах $O(\cdot)$, что ограничивает возможность ее применения.

Цель данной работы — найти оценку, которая объединяла бы лучшие качества нескольких предыдущих: при фиксированном k оценка должна стремиться к нулю, если $\max_k p_k \rightarrow 0$ и $nP_1 \rightarrow \lambda$, $\lambda > 0$, при $n \rightarrow \infty$; и при фиксированных n , $p_1, \dots, p_n$ и λ оценка должна иметь экспоненциальное убывание по k .

Отправной точкой стала следующая теорема.

Теорема 1. Для любого $a \geq 0$ при $\lambda = nP_1$ и всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство

$$|b_k - \pi_k| \leq e^{-ak} \frac{nP_2}{2} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\}.$$

Для любого $a > 0$ при $\lambda = nP_1$ и всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство

$$|B(k) - \Pi_\lambda(k)| \leq \frac{e^{-a(k+1)} nP_2}{2(1 - e^{-a})} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\}.$$

Для любых $a > b \geq 0$ при $\lambda = nP_1$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k - \pi_k| e^{bk} \leq \frac{nP_2}{2(1 - e^{b-a})} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\}.$$

Полагая $a = 0$ в первом утверждении теоремы, получаем известную по результатам Л. Ле Кама оценку.

Следствие 1. При $\lambda = nP_1$ и всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство

$$|b_k - \pi_k| \leq nP_2.$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство основано на хорошо известной формуле обращения

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \sum_{l=0}^{\infty} b_l e^{itl} dt.$$

Заметим, что это формула основана на теоремах из математического и функционального анализа, которые не требуют выполнения условия

$$\sum_k b_k = 1.$$

Таким образом, мы вправе подставить в эту формулу величины $b_k e^{ak}$ вместо b_k . Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ak} e^{itk} &= \mathbf{E} \exp \left\{ (a + it) \sum_{k=1}^n I_k \right\} \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{E} \exp \{ (a + it) I_k \} \\ &= \prod_{k=1}^n (1 + p_k (e^{a+it} - 1)). \end{aligned}$$

Имеет место формула обращения

$$\begin{aligned} b_k e^{ak} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \sum_{l=0}^{\infty} b_l e^{al} e^{itl} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \prod_{k=1}^n (1 + p_k (e^{a+it} - 1)) dt. \end{aligned}$$

Аналогично, для пуассоновского распределения рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k e^{ak} e^{itk} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{ak} e^{itk} \\ &= \exp \{ \lambda (e^{a+it} - 1) \}. \end{aligned}$$

Имеет место формула обращения

$$\begin{aligned} \pi_k e^{ak} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \sum_{l=0}^{\infty} \pi_l e^{al} e^{itl} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \exp \{ \lambda (e^{a+it} - 1) \} dt. \end{aligned}$$

Из полученных формул обращения следует, что

$$\begin{aligned} |b_k - \pi_k| &= \frac{e^{-ak}}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \left(\prod_{k=1}^n (1 + p_k(e^{a+it} - 1)) - \exp\{\lambda(e^{a+it} - 1)\} \right) dt \right| \\ &\leq \frac{e^{-ak}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \prod_{k=1}^n (1 + p_k(e^{a+it} - 1)) - \exp\{\lambda(e^{a+it} - 1)\} \right| dt. \end{aligned}$$

Оценим подинтегральную функцию

$$\begin{aligned} &\left| \prod_{k=1}^n (1 + p_k(e^{a+it} - 1)) - \exp\{\lambda(e^{a+it} - 1)\} \right| \\ &= \left| \prod_{k=1}^n (1 + p_k(e^{a+it} - 1)) - \prod_{k=1}^n \exp\{p_k(e^{a+it} - 1)\} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |1 + p_k(e^{a+it} - 1) - \exp\{p_k(e^{a+it} - 1)\}| \\ &\quad \times \prod_{l=1}^{k-1} |1 + p_l(e^{a+it} - 1)| \prod_{l=k+1}^n |\exp\{p_l(e^{a+it} - 1)\}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |1 + p_k(e^{a+it} - 1) - \exp\{p_k(e^{a+it} - 1)\}| \\ &\quad \times \prod_{l=1}^{k-1} (1 + p_l(e^a - 1)) \prod_{l=k+1}^n \exp\{p_l(e^a - 1)\} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |1 + p_k(e^{a+it} - 1) - \exp\{p_k(e^{a+it} - 1)\}| \prod_{l \neq k} \exp\{p_l(e^a - 1)\}. \end{aligned}$$

Для любого комплексного числа z справедливо неравенство

$$|e^z - 1 - z| \leq \frac{|z|^2}{2} \max\{1, |e^z|\},$$

поэтому

$$\begin{aligned} |1 + p_k(e^{a+it} - 1) - \exp\{p_k(e^{a+it} - 1)\}| &\leq \frac{p_k^2}{2} |e^{a+it} - 1|^2 \max\{1, |\exp\{p_k(e^{a+it} - 1)\}|\} \\ &\leq \frac{p_k^2}{2} |e^{a+it} - 1|^2 \exp\{p_k(e^a - 1)\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 & \left| \prod_{k=1}^n (1 + p_k(e^{a+it} - 1)) - \exp\{\lambda(e^{a+it} - 1)\} \right| \\
 & \leq \sum_{k=1}^n |1 + p_k(e^{a+it} - 1) - \exp\{p_k(e^{a+it} - 1)\}| \prod_{l \neq k} \exp\{p_l(e^a - 1)\} \\
 & \leq \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{2} |e^{a+it} - 1|^2 \exp\{p_k(e^a - 1)\} \prod_{l \neq k} \exp\{p_l(e^a - 1)\} \\
 & = |e^{a+it} - 1|^2 \prod_{k=1}^n \exp\{p_k(e^a - 1)\} \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{2} \\
 & = \frac{n P_2}{2} |e^{a+it} - 1|^2 \exp\{n P_1(e^a - 1)\}
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 |b_k - \pi_k| & \leq \frac{e^{-ak}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \prod_{k=1}^n (1 + p_k(e^{a+it} - 1)) - \exp\{\lambda(e^{a+it} - 1)\} \right| dt \\
 & \leq \frac{e^{-ak}}{2\pi} \frac{n P_2}{2} \exp\{n P_1(e^a - 1)\} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{a+it} - 1|^2 dt.
 \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{a+it} - 1|^2 dt = 2\pi(e^{2a} + 1).$$

Из полученных оценок следует, что

$$|b_k - \pi_k| \leq e^{-ak} \frac{n P_2}{2} (e^{2a} + 1) \exp\{n P_1(e^a - 1)\},$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Оценка для разности функций распределения получается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |B(k) - \Pi_{\lambda}(k)| & = |B(k+1) - b_{k+1} - \Pi_{\lambda}(k+1) + \pi_{k+1}| \\
 & \leq |B(k+1) - \Pi_{\lambda}(k+1)| + |b_{k+1} - \pi_{k+1}| \\
 & \leq \dots \\
 & \leq \sum_{l=k+1}^{\infty} |b_l - \pi_l| + |B(\infty) - \Pi_{\lambda}(\infty)| \\
 & = \sum_{l=k+1}^{\infty} |b_l - \pi_l|.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из только что полученной оценки следует второе утверждение теоремы. Третье утверждение очевидно следует из первого.

Зададимся вопросом о том, при каких значениях k неравномерная оценка для разности $|b_k - \pi_k|$ из теоремы 1 заведомо лучше любой равномерной. Для ответа на этот вопрос нам понадобится одна нижняя оценка, которая представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ и $\lambda = nP_1$ выполнено неравенство

$$\max_{0 \leq k < \infty} |b_k - \pi_k| \geq \frac{nP_2}{2} \prod_{l=1}^n (1 - p_l).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} |b_0 - \pi_0| &= \left| \prod_{k=1}^n (1 - p_k) - e^{-\lambda} \right| = \left| \prod_{k=1}^n (1 - p_k) - \prod_{k=1}^n e^{-p_k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n (1 - p_k - e^{-p_k}) \prod_{l=1}^{k-1} (1 - p_l) \prod_{l=k+1}^n e^{-p_l} \right| \\ &= \sum_{k=1}^n (e^{-p_k} - 1 + p_k) \prod_{l=1}^{k-1} (1 - p_l) \prod_{l=k+1}^n e^{-p_l}. \end{aligned}$$

Для любого $0 \leq p \leq 1$

$$\begin{aligned} e^{-p} - 1 + p &= \int_0^p (1 - e^{-x}) dx = \int_0^p \int_0^x e^{-y} dy dx \\ &\geq e^{-p} \int_0^p \int_0^x dy dx = \frac{p^2}{2} e^{-p}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |b_0 - \pi_0| &= \sum_{k=1}^n (e^{-p_k} - 1 + p_k) \prod_{l=1}^{k-1} (1 - p_l) \prod_{l=k+1}^n e^{-p_l} \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{2} e^{-p_k} \prod_{l=1}^{k-1} (1 - p_l) \prod_{l=k+1}^n e^{-p_l} \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{2} \prod_{l=1}^n (1 - p_l) = \frac{nP_2}{2} \prod_{l=1}^n (1 - p_l). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что при дополнительном ограничении $p_1 = \dots = p_k = p$ аналогичный результат можно найти в [8].

Теорема 3. При

$$\lambda = nP_1, \quad k \geq \lambda e + \ln(e^2 + 1) - \ln(b_0/\pi_0)$$

выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |b_k - \pi_k| &\leq e^{-k} \frac{nP_2}{2} (e^2 + 1) \exp\{nP_1(e - 1)\} \\ &\leq C(\lambda, n, p_1, \dots, p_n) \end{aligned}$$

для любой величины $C(\lambda, n, p_1, \dots, p_n)$ такой, что

$$\max_{0 \leq k < \infty} |b_k - \pi_k| \leq C(\lambda, n, p_1, \dots, p_n),$$

то есть при указанных k и $a = 1$ неравномерная оценка из теоремы 1 заведомо лучше любой равномерной оценки.

Заметим, что обычно мы пользуемся оценками для скорости сходимости в ситуации $b_k \rightarrow \pi_k$, то есть при $\ln(b_0/\pi_0) \rightarrow 0$.

Доказательство. Так как $C(\lambda, n, p_1, \dots, p_n) \geq nP_2b_0/2$, достаточно показать, что

$$\begin{aligned} e^{-k} \frac{nP_2}{2} (e^2 + 1) \exp\{nP_1(e - 1)\} &\leq \frac{nP_2}{2} b_0, \\ e^{-k} (e^2 + 1) \exp\{nP_1e\} \pi_0 &\leq b_0, \\ -k + \ln(e^2 + 1) + nP_1e &\leq \ln(b_0/\pi_0), \end{aligned}$$

а это одно из условий теоремы.

Теорема доказана.

Вернемся к оценке

$$|b_k - \pi_k| \leq e^{-ak} \frac{nP_2}{2} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\}$$

из теоремы 1 и рассмотрим правую часть неравенства как функцию от a при фиксированном k .

Задача о выборе оптимального значения a , при котором величина

$$e^{-ak} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\}$$

будет минимальна, является довольно трудной, поэтому мы ограничим себя поиском некоторого приближения к оптимальному значению. Заметим, что

$$e^{-ak} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\} = e^{-ak} e^{2a} \exp\{nP_1(e^a - 1)\} + e^{-ak} \exp\{nP_1(e^a - 1)\}$$

и в правой части равенства первое слагаемое больше или равно второму. Найдем такое a , при котором первое слагаемое минимально. Величина

$$e^{-ak} e^{2a} \exp\{nP_1(e^a - 1)\} = \exp\{-ak + 2a + nP_1(e^a - 1)\}$$

достигает минимума, когда достигает минимума величина $2a + nP_1(e^a - 1) - ak$. Очевидно, что это имеет место при

$$\frac{d}{da} (2a + nP_1(e^a - 1) - ak) = 2 - k + nP_1e^a = 0,$$

то есть при $a = \ln((k - 2)/(nP_1))$.

Разумеется, нельзя забывать про условие $a \geq 0$, которое накладывает некоторые ограничения на допустимые значения параметра k . Итак, подставляя такое близкое к оптимальному значение a , мы получаем следующий результат.

Теорема 4. Если $\lambda = nP_1$, то при $k \geq 2 + \lambda$

$$|b_k - \pi_k| \leq \frac{nP_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{(k-2)^2} \right) e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k-2} \right)^{k-2}$$

и при $k > 1 + \lambda e$

$$|B(k) - \Pi_\lambda(k)| \leq \frac{nP_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{(k-1)^2} \right) \frac{k-1}{k-1-\lambda e} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k-1} \right)^{k-1}.$$

Доказательство. Возьмем

$$a = \ln((k-2)/\lambda)$$

при указанных в условиях k . Тогда по теореме 1

$$\begin{aligned} |b_k - \pi_k| &\leq e^{-ak} \frac{nP_2}{2} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\} \\ &= \frac{nP_2}{2} (1 + e^{-2a}) \exp\{2a - ak + \lambda(e^a - 1)\} \\ &= \frac{nP_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{(k-2)^2} \right) \exp\{(2-k) \ln((k-2)/\lambda) + k - 2 - \lambda\} \\ &= \frac{nP_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{(k-2)^2} \right) e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k-2} \right)^{k-2}. \end{aligned}$$

Отсюда легко следует оценка для $|B(k-1) - \Pi_\lambda(k-1)|$.

Теорема доказана.

Заметим, что в оценке

$$|b_k - \pi_k| \leq \frac{nP_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{(k-2)^2} \right) e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k-2} \right)^{k-2}$$

из теоремы 4, за скорость убывания правой части при $k \rightarrow \infty$ отвечает множитель $(\lambda e/(k-2))^{k-2}$. Легко заметить, что показатель степени в этом выражении нельзя заменить величиной, большей $k-1/2$. Действительно, $b_k = 0$ при $k > n$, и

$$|b_k - \pi_k| = \pi_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k} \right)^k (1 + o(1)).$$

Главный сомножитель, отвечающий за убывание $|b_k - \pi_k|$ при $k > n$, это множитель $k^{-k-1/2}$. В нашей оценке при $p_1 = \dots = p_n = \lambda/n$ это $n^{-1}(k-2)^{-k+2}$. Таким образом, если взять k , близкое к n , то разность между показателями окажется равной $3/2$. Как показывает следующая теорема, если $n \rightarrow \infty$ и $p_1 = \dots = p_n = \lambda/n$, то при $k = n+1$ наша оценка отличается от значения $|b_k - \pi_k|$ лишь на множитель $\sqrt{\pi/2} n^{3/2} (1 + o(1))$.

Положим

$$u_k = \frac{nP_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{(k-2)^2} \right) e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k-2} \right)^{k-2}$$

и рассмотрим отношение $u_k/|b_k - \pi_k|$.

Теорема 5. При $k \rightarrow \infty$, $k > n$, $\lambda = nP_1$ справедливо соотношение

$$\frac{u_k}{|b_k - \pi_k|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{P_2 k^{5/2}}{(P_1)^2 n} (1 + O(k^{-1/2})).$$

Доказательство. По формуле Стирлинга

$$\begin{aligned} |b_k - \pi_k| &= \pi_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^k e^k}{\sqrt{2\pi k k^k}} e^{-\lambda} (1 + O(k^{-1/2})). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{nP_2}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{(k-2)^2} \right) e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k-2} \right)^{k-2} \\ &= \frac{nP_2}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda e}{k-2} \right)^{k-2} (1 + O(k^{-1})) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{u_k}{|b_k - \pi_k|} &= \sqrt{\pi/2} n P_2 \frac{k^{5/2}}{\lambda^2 e^2} \left(\frac{k}{k-2} \right)^{k-2} (1 + O(k^{-1/2})) \\ &= \sqrt{\pi/2} n P_2 \frac{k^{5/2}}{\lambda^2 e^2} \left(1 + \frac{2}{k-2} \right)^{k-2} (1 + O(k^{-1/2})) \\ &= \sqrt{\pi/2} n P_2 \frac{k^{5/2}}{\lambda^2} (1 + O(k^{-1/2})). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В общем случае в теореме Пуассона равенство $\lambda = nP_1$ может не выполняться. Тем же методом, что мы использовали выше, можно находить оценки и при $\lambda \neq nP_1$. Приведем лишь формулировки соответствующих результатов.

Теорема 6. Для любого $a \geq 0$ и всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |b_k - \pi_k| &\leq e^{-ak} \left(\frac{nP_2}{2} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\} \right. \\ &\quad \left. + |nP_1 - \lambda| \sqrt{e^{2a} + 1} \exp\{\max\{nP_1, \lambda\}(e^a - 1)\} \right). \end{aligned}$$

Для любого $a > 0$ и всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |B(k) - \Pi_\lambda(k)| &\leq \frac{e^{-a(k+1)}}{1 - e^{-a}} \left(\frac{nP_2}{2} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\} \right. \\ &\quad \left. + |nP_1 - \lambda| \sqrt{e^{2a} + 1} \exp\{\max\{nP_1, \lambda\}(e^a - 1)\} \right). \end{aligned}$$

Для любого $a > b \geq 0$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |b_k - \pi_k| e^{bk} &\leq \frac{1}{1 - e^{b-a}} e^{-ak} \left(\frac{nP_2}{2} (e^{2a} + 1) \exp\{nP_1(e^a - 1)\} \right. \\ &\quad \left. + |nP_1 - \lambda| \sqrt{e^{2a} + 1} \exp\{\max\{nP_1, \lambda\}(e^a - 1)\} \right). \end{aligned}$$

Автор выражает искреннюю благодарность В. В. Сенатову за поставленную задачу и за постоянный интерес к работе.

Список литературы

1. Прохоров Ю. В., Асимптотическое поведение биномиального распределения. *Успехи математических наук* (1953) 8, №3, 135–142.
2. Цареградский И. П., О равномерном приближении биномиального распределения неограниченно делимыми законами. *Теория вероятностей и ее применения* (1958) 3, №4, 470–474.
3. Шоргин С. Я., Аппроксимация обобщенного биномиального распределения. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) 22, №4, 867–871.
4. Le Cam L., Remarques sur le théorème limite central dans les espaces localement convexes. In: *Les Probabilités sur les Structures Algébriques (Actes Colloq. Internat. CNRS, №186, Clermont-Ferrand, 1969)*. Éditions Centre Nat. Recherche Sci., Paris, 1970, pp. 233–249.
5. Barbour A. D., Hall P. On the rate of Poisson convergence. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* (1984) 95, 473–480.
6. Михайлов В. Г., Явные оценки в предельных теоремах для сумм случайных индикаторов. *Обзорное прикладной и промышленной математики* (1994) 1, №4, 580–617.
7. Barbour A. D., Topics in Poisson approximation. In: *Stochastic Processes: Theory and Methods (Shanbhag D. N. et al., Eds.)*. North-Holland/Elsevier, Amsterdam, 2001, pp. 79–115.
8. Боровков А. А., *Теория вероятностей*. Едиториал УРСС, Москва, 2003.

Статья поступила 13.04.2004.