Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ролдугин, Письмо в редакцию, *Дискрет. матем.*,
2019, том 31, выпуск 4, 128

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1600>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:15:47

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Уважаемая редакция! В моей статье «Верхняя оценка одной комбинаторной суммы» (Дискретная математика, **29:1** (2017), 80–94) при помощи метода Лапласа выведена верхняя оценка суммы $U_d(x) = \sum_{r \geq 0} \binom{d-r+1}{r} \cdot x^r$. Однако, как совершенно справедливо заметил д.ф.м.н. В. А. Воблый, точное значение данной суммы уже вычислено ранее методом производящих функций; например, его можно найти в работе "Интегралы и ряды. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. -М.: Наука, ГРФМЛ, 1981". Автор выражает благодарность за это указание. Вместе с тем отметим, что использованные рассуждения небольшими техническими преобразованиями распространяются на суммы более сложного вида, применение к которым метода производящих функций представляется затруднительным. Например, для суммы $U_{d,\alpha}(x) = \sum_{r \geq 0} \binom{d-r+1}{r}^\alpha \cdot x^r$ при произвольном вещественном $\alpha > 0$ верна теорема, аналогичная теореме 1 из рассматриваемой статьи. При фиксированных $x > 0$ и натуральном d обозначим: $y = x^{1/\alpha}$, $\lambda_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4y+1}}$; остальные обозначения сохраняются из текста статьи.

Теорема 1. При $d > \max \left\{ \lambda_0^{-3}, \left(\frac{2}{1-2\lambda_0} \right)^{-3}, 399 \right\}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} U_{d,\alpha}(x) \leq & \left(e \cdot \sqrt{d} \right)^{\alpha \sqrt{a}} \cdot (1+x)^{\sqrt{a} \cdot \max(0, \alpha-1)} + \\ & + x^{\frac{d}{2} \sqrt{a}} \cdot \left(\frac{e}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{d}}{2} + 1 \right) \right)^{\alpha \cdot (2\sqrt{a}+1)} \cdot (\sqrt{x}+1)^{2\sqrt{a}+1} 2^{(2\sqrt{a}+1) \max(0, \alpha-1)} + \\ & + \left(\frac{\left(1 + \frac{0,1}{d}\right)}{\sqrt{2\pi d}} \cdot \|\phi_1\| \right)^\alpha \cdot \left(\sqrt{2\pi d} \frac{\sqrt{\|f''\|}}{10,392} + 2 \right) \left(0,5 + \sqrt{y+0,25} \right)^{\alpha d} + \\ & + \left(\frac{\left(1 + \frac{4,5}{\sqrt{d}}\right) \cdot d^{3/4}}{2^{5/2} \cdot \sqrt{2\pi d}} \cdot \left(0,5 + \sqrt{y+0,25} \right)^d \cdot e^{-5,196d^{1/3}} \right)^\alpha \cdot \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Элементарными преобразованиями из этой теоремы следует, что при фиксированных $x > 0$, $\alpha > 0$ и $d \rightarrow \infty$ верно

$$U_{d,\alpha}(x) = O \left(\left(0,5 + \sqrt{x^{1/\alpha} + 0,25} \right)^{\alpha d} \right).$$

Учитывая, что α может быть не целым, явной рекуррентной формулы для $U_{d,\alpha}(x)$ (такой, какая существует для $U_d(x)$) нет, поэтому не ясно, можно ли применить в данном случае метод производящих функций.

П. В. Ролдугин