Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Я. Савельев, С. В. Балакин, Совместное распределение числа единиц и числа 1-серий в двоичных марковских последовательностях, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 3, 43–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:00:08

УДК 519.2

Совместное распределение числа единиц и числа 1-серий в двоичных марковских последовательностях

© 2004 г. Л. Я. Савельев, С. В. Балакин

Описываются распределения числа единиц, числа серий из единиц в двоичной марковской последовательности и их совместное распределение. Находятся производящие функции рассматриваемых распределений. Вычисляются средние, дисперсии и ковариации. Для них даются точные и асимптотические формулы с оценками. Выводятся формулы для нормальных приближений.

Рассматриваются соответствующие операторные уравнения. В связи с ними описывается специальная модель случайных блужданий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-0946.

Введение

Первая марковская последовательность, которую описал А. А. Марков [1], была двоичной. Двоичным марковским последовательностям посвящена обширная литература. Двоичные марковские последовательности выделяются в качестве важного частного случая в большинстве работ, в которых рассматриваются марковские последовательности с конечным множеством значений [2]–[8].

Особый интерес представляют совместные распределения различных характеристик серий в двоичной марковской последовательности и первые моменты этих распределений. В статье описываются распределения числа единиц, числа серий из единиц, их первые моменты и совместное распределение. Находятся производящие функции этих распределений. Для средних значений, дисперсий и ковариаций даются точные и приближенные формулы с оценками. Выводятся формулы для нормальных приближений.

При фиксированных первом и последнем значении рассматриваемой двоичной марковской последовательности совместные распределения числа единиц и числа серий из единиц представляются произведением некоторых биномиальных распределений. Это существенно упрощает изучение распределений и описание нормальных приближений.

Естественный переход к модели случайных блужданий связан с решением операторных уравнений специального типа и условиями их корректной разрешимости.

1. Обозначения

1.1. Рассмотрим двоичную марковскую последовательность ξ случайных переменных $\xi(k)$, $k \geq 0$, с множеством значений $C = \{1, 0\}$, начальным вектором A и переходной матрицей Q :

$$A = (a, 1 - a),$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{10} \\ q_{01} & q_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 - p \\ 1 - q & q \end{pmatrix},$$

где

$$a = \mathbf{P}\{\xi(0) = 1\}, \quad 1 - a = \mathbf{P}\{\xi(0) = 0\},$$

$$q_{\alpha\beta} = \mathbf{P}\{\xi(k+1) = \beta \mid \xi(k) = \alpha\}, \quad k \geq 0.$$

Будем предполагать, что $0 < p, q < 1$.

1.2. Введем дополнительные обозначения

$$d = p + q - 1 = \det Q, \quad b = \frac{1 - q}{1 - d}, \quad c = \frac{a - b}{1 - d}.$$

Так как предполагается, что $0 < p, q < 1$, то $-1 < d < 1$.

Равенство $d = 0$ означает, что $q = 1 - p$, то есть вероятности переходов $0 \rightarrow 0$ и $1 \rightarrow 0$ одинаковы. При $a = p$, $d = 0$, $0 \leq k \leq n - 1$ получается последовательность Бернулли с параметрами (n, p) . Определитель $d = \det Q$ можно считать мерой зависимости соседних членов двоичной марковской последовательности с переходной матрицей Q .

Равенство $c = 0$ означает, что $a = b$ и последовательность ξ стационарна, то есть $\mathbf{P}\{\xi(k) = 1\} = a$ при любом k .

Равенство $p = q$ эквивалентно тому, что $b = 1/2$. В этом случае переходы $0 \rightarrow 0$ и $1 \rightarrow 1$ имеют одну и ту же вероятность p , а переходы $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$ — одну и ту же вероятность $1 - p$. Матрица Q становится эрмитовой. Естественно назвать такую последовательность ξ симметричной.

1.3. Случайные величины, равные числу единиц и числу 1-серий последовательности ξ на отрезке $[0, n]$, выражаются соответственно равенствами

$$x(n) = \xi(0) + \sum_{k=1}^n \xi(k),$$

$$y(n) = \xi(0) + \sum_{k=1}^n (1 - \xi(k-1))\xi(k).$$

Сумма в выражении для $y(n)$ равна числу переходов $0 \rightarrow 1$ в последовательности ξ на отрезке $[0, n]$, описывающих начало 1-серии. Часто вместо 1-серий рассматривают эти переходы. Последовательности $x(n)$, $n \geq 0$, и $y(n)$, $n \geq 0$, в общем случае немарковские.

Заметим также, что

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^n \xi(k-1)\xi(k).$$

Сумма в этом выражении описывает число переходов $1 \rightarrow 1$ в последовательности ξ на отрезке $[0, n]$.

2. Распределение $\xi(k)$

2.1. По индукции легко доказать, что верно следующее выражение для k -й степени Q^k матрицы Q :

$$Q^k = \begin{pmatrix} b + (1-b)d^k & 1-b-(1-b)d^k \\ b-bd^k & 1-b+bd^k \end{pmatrix}.$$

Распределение $P_k = (p_k, q_k)$ в момент k ($d^k = 1$ при $k = 0$) имеет вид

$$P_k = (b + (a-b)d^k, 1-b-(a-b)d^k),$$

где

$$\begin{aligned} p_k &= \mathbf{P}\{\xi(k) = 1\} = b + (a-b)d^k, \\ q_k &= \mathbf{P}\{\xi(k) = 0\} = 1-b-(a-b)d^k. \end{aligned}$$

Это распределение было вычислено еще А. А. Марковым [1].

2.2. Если, как предполагается, $|d| < 1$, то предельное распределение выражается равенствами

$$\begin{aligned} p_\infty &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(k) = 1\} = b, \\ q_\infty &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(k) = 0\} = 1-b. \end{aligned}$$

Таким образом, отношение b вероятности перехода $0 \rightarrow 1$ к суммарной вероятности изменения значения является и предельной вероятностью значения 1. Пусть

$$Q^\infty = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1-b & -(1-b) \\ -b & b \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица перехода через k шагов выражается равенством

$$Q^k = Q^\infty + Rd^k.$$

Матрица Q^∞ является бернуллиевой частью формулы. При достаточно большом k подпоследовательность $\xi(j_i)$, $i \geq 0$, с номерами $j_{i+1} - j_i \geq k$ можно приближенно считать бернуллиевой с параметром b .

2.3. Нетрудно вычислить ковариацию и коэффициент корреляции для случайных переменных $\xi(j)$, $\xi(k)$, $j \leq k$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi(j)\xi(k)) &= \mathbf{P}\{\xi(j) = \xi(k) = 1\} = (b + (a-b)d^j)(b + (1-b)d^{k-j}), \\ \mathbf{D}(\xi(j)) &= p_j q_j = b(1-b) + (a-b)(1-2b-(a-b)d^j)d^j. \end{aligned}$$

Отсюда получаются простые выражения для ковариации $\text{Cov}(\xi(j), \xi(k))$ и коэффициента корреляции $K(\xi(j), \xi(k))$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi(j), \xi(k)) &= p_j q_j d^{k-j} = V(\xi(j))d^{k-j}, \\ K(\xi(j), \xi(k)) &= \sqrt{(p_j q_j)/(p_k p_k)} d^{k-j} = \sqrt{\mathbf{D}(\xi(j))/\mathbf{D}(\xi(k))} d^{k-j}. \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{D}(\xi(j)) \leq 1$ и $\mathbf{D}(\xi(k)) \rightarrow b(1-b)$, то $K(\xi(j), \xi(k)) \rightarrow 0$ при $k-j \rightarrow \infty$, если $|d| < 1$. Зависимость между переменными $\xi(j)$ и $\xi(k)$ с достаточно далекими друг от друга номерами j, k мала. Это подтверждает вывод о приближенной бернуллиевости подпоследовательности в п. 2.2.

Замечание 1. Заменяя $a = \mathbf{P}\{\xi(0) = 1\}$ на $p_k = \mathbf{P}\{\xi(k) = 1\}$, можно получить из выписанных формул для распределений, средних и дисперсий характеристик серий в последовательности $\xi(0), \dots, \xi(n)$ аналогичные формулы для последовательности $\xi(k), \dots, \xi(k+n)$. Так как $p_k \rightarrow b$ при $k \rightarrow \infty$, когда $|d| < 1$, в этом случае, заменяя a на b , можно получить приближенные формулы при больших значениях k .

3. Совместное распределение

3.1. Каждая из реализаций последовательности ξ , для которой $\xi(0) = \alpha$, $\xi(n) = \beta$, $x(n) = i$, $y(n) = j$, имеет одну и ту же вероятность

$$p_{\alpha\beta}(i, j, n) = a^\alpha (1-a)^{1-\alpha} p^{i-j} (1-p)^{j-\beta} (1-q)^{j-\alpha} q^{n-i-j+\alpha+\beta}. \quad (1)$$

В самом деле, из определений следует, что

$$p_{\alpha\beta}(i, j, n) = a^{\xi(0)} (1-a)^{1-\xi(0)} p^{\sum_{k=1}^n \xi(k-1)\xi(k)} (1-p)^{\sum_{k=1}^n \xi(k-1)(1-\xi(k))} \times (1-q)^{\sum_{k=1}^n (1-\xi(k-1))\xi(k)} q^{\sum_{k=1}^n (1-\xi(k-1))(1-\xi(k))}.$$

Как легко проверить,

$$\begin{aligned} x(n) - y(n) &= \sum_{k=1}^n \xi(k-1)\xi(k), \\ y(n) - \xi(n) &= \sum_{k=1}^n \xi(k-1)(1-\xi(k)), \\ y(n) - \xi(0) &= \sum_{k=1}^n (1-\xi(k-1))\xi(k), \\ n - x(n) - y(n) + \xi(0) + \xi(n) &= \sum_{k=1}^n (1-\xi(k-1))(1-\xi(k)). \end{aligned}$$

Поэтому

$$p_{\alpha\beta}(i, j, n) = a^{\xi(0)} (1-a)^{1-\xi(0)} p^{x(n)-y(n)} (1-p)^{y(n)-\xi(n)} \times (1-q)^{y(n)-\xi(0)} q^{n-x(n)-y(n)+\xi(0)+\xi(n)},$$

и при $\xi(0) = \alpha$, $\xi(n) = \beta$, $x(n) = i$, $y(n) = j$ получается равенство (1).

Заметим, что

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta}(i, j, n) &= 0, \quad \text{если } i > n+1 \text{ или } i < j \text{ или } j > [n/2] + 1, \\ p_{\alpha\beta}(i, 0, n) &= 0, \quad \text{если } i > 0 \end{aligned}$$

($[x]$ обозначает целую часть вещественного числа x). Выделяются вероятности для единственных полных 0-серий и 1-серий:

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta}(0, 0, n) &= (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - a)q^n, \\ p_{\alpha\beta}(n + 1, 1, n) &= \alpha\beta a p^n. \end{aligned}$$

3.2. Рассмотрим событие

$$\Omega_{\alpha\beta}(i, j, n) = \{\xi : \xi(0) = \alpha, \xi(n) = \beta, x(n) = i, y(n) = j\}.$$

Из сказанного в п. 3.1 следует, что для вероятности $P_{\alpha\beta}(i, j, n) = \mathbf{P}\{\Omega_{\alpha\beta}(i, j, n)\}$ верно равенство

$$P_{\alpha\beta}(i, j, n) = c_{\alpha\beta}(i, j, n) p_{\alpha\beta}(i, j, n), \quad (2)$$

где

$$c_{\alpha\beta}(i, j, n) = \text{card}(\Omega_{\alpha\beta}(i, j, n)).$$

Этот коэффициент легко вычислить, используя известную формулу для числа $s(m, k)$ разложений натурального числа m на k слагаемых. Для целых k, m положим

$$\binom{m}{k} = \begin{cases} m!/(k!(m-k)!), & 0 \leq k \leq m, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$s(m, k) = \binom{m-1}{k-1}.$$

При $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq [n/2] + 1$ верны равенства

$$c_{\alpha\beta}(i, j, n) = s(i, j) s(n - i + 1, j + 1 - \alpha - \beta) = \binom{i-1}{j-1} \binom{n-i}{j-\alpha-\beta} \quad (3)$$

(i единиц распределяются по j 1-сериям, и $n - i + 1$ нулей распределяются по $j + 1 - \alpha - \beta$ 0-сериям). Из (1)–(3) следует, что

$$P_{\alpha\beta}(i, j, n) = \binom{i-1}{j-1} \binom{n-i}{j-\alpha-\beta} a^\alpha (1-a)^{1-\alpha} p^{i-j} (1-p)^{j-\beta} (1-q)^{j-\alpha} q^{n-i-j+\alpha+\beta}. \quad (4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} b(k, m, x) &= \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \\ \chi_{\alpha\beta} &= (\alpha a + (1-\alpha)(1-a))(\beta(1-q) + (1-\beta)(1-p)). \end{aligned}$$

При $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq [n/2] + 1$ равенство (4) эквивалентно равенству

$$P_{\alpha\beta}(i, j, n) = \chi_{\alpha\beta} b(j-1, i-1, 1-p) b(j-\alpha-\beta, n-i, 1-q). \quad (5)$$

Замечание 2. Рассматриваемое распределение составляется из биномиальных распределений, параметрами которых служат вероятности переходов. Комбинаторные рассуждения, с помощью которых оно получено, объясняют это. Используя равенство (5) и известные асимптотические формулы для биномиального распределения, можно получать асимптотические формулы для вероятностей $P_{\alpha\beta}(i, j, n)$.

3.3. Рассмотрим событие

$$\Omega(i, j, n) = \{\xi : x(n) = i, y(n) = j\} = \bigcup_{\alpha, \beta} \Omega_{\alpha\beta}(i, j, n).$$

Из сказанного в 3.2 следует, что при $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq [n/2] + 1$ для вероятности $P(i, j, n) = \mathbf{P}\{\Omega(i, j, n)\}$ верны равенства

$$P(i, j, n) = \sum_{\alpha, \beta} P_{\alpha\beta}(i, j, n) = b(j-1, i-1, 1-p) \sum_{\alpha, \beta} \chi_{\alpha\beta} b(j-\alpha-\beta, n-i, 1-q). \quad (6)$$

Выделяются вероятности для единственных полных 0-серии и 1-серии

$$P(0, 0, n) = (1-a)q^n, \quad P(n+1, 1, n) = ap^n. \quad (7)$$

3.4. Для последовательности Бернулли ($a = p = 1 - q$) верны равенства

$$P_{\alpha\beta}(i, j, n) = \binom{i-1}{j-1} \binom{n-i}{j-\alpha-\beta} (1-p)^{n-i+1},$$

$$P(i, j, n) = \binom{i-1}{j-1} \binom{n-i+2}{j} p^i (1-p)^{n-i+1}.$$

4. Производящие функции

4.1. Используя формулу полной вероятности и марковское свойство, получаем систему уравнений для вероятностей $P_{\alpha\beta}(i, j, n)$:

$$P_{\alpha 1}(i, j, n) = P_{\alpha 1}(i-1, j, n-1)p + P_{\alpha 0}(i-1, j-1, n-1)(1-q),$$

$$P_{\alpha 0}(i, j, n) = P_{\alpha 1}(i, j, n-1)(1-p) + P_{\alpha 0}(i, j, n-1), \quad (8)$$

где $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq j \leq [n/2] + 1$. Кроме того (граничные условия):

$$P_{\alpha\beta}(i, j, 0) = \begin{cases} \alpha\beta a, & i = j = 1, \\ (1-\alpha)(1-\beta)(1-a), & i = j = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$P_{\alpha\beta}(i, 0, n) = 0, \quad i \geq 1,$$

$$P_{\alpha\beta}(0, j, n) = 0, \quad j \geq 1,$$

$$P_{\alpha\beta}(0, 0, n) = (1-\alpha)(1-\beta)(1-a)q^n, \quad n \geq 0,$$

$$P_{\alpha\beta}(n+1, 1, n) = \alpha\beta ap^n, \quad n \geq 0,$$

$$P_{\alpha\beta}(i, j, n) = 0, \quad i > n+1 \vee i < j \vee j > [n/2] + 1.$$

4.2. Рассмотрим производящие функции $h_{\alpha\beta}$ для вероятностей $P_{\alpha\beta}(i, j, n)$:

$$h_{\alpha\beta}(s, t, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P_{\alpha\beta}(i, j, n) s^i t^j v^n, \quad |s|, |t| \leq 1, \quad |v| < 1.$$

Используя систему (8) и граничные условия, по аналогии с [17] получаем систему уравнений

$$(1 - psv)h_{\alpha 1} - (1 - q)stvh_{\alpha 0} = \alpha ast, \quad (9)$$

$$-(1 - p)vh_{\alpha 1} + (1 - qv)h_{\alpha 0} = (1 - \alpha)(1 - a). \quad (10)$$

Решая систему (10), находим, что

$$\begin{aligned} h_{11}(s, t, v) &= \frac{ast(1 - qv)}{1 - (q + ps)v + (pq - (1 - p)(1 - q)t)sv^2}, \\ h_{10}(s, t, v) &= \frac{a(1 - p)stv}{1 - (q + ps)v + (pq - (1 - p)(1 - q)t)sv^2}, \\ h_{01}(s, t, v) &= \frac{(1 - a)(1 - q)stv}{1 - (q + ps)v + (pq - (1 - p)(1 - q)t)sv^2}, \\ h_{00}(s, t, v) &= \frac{1 - a - (1 - a)psv}{1 - (q + ps)v + (pq - (1 - p)(1 - q)t)sv^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

4.3. Из формул (11) получается формула для производящей функции h вероятностей $P(i, j, n)$. Так как

$$P(i, j, n) = \sum_{\alpha, \beta} P_{\alpha\beta}(i, j, n),$$

суммирование (11) дает

$$h(s, t, v) = \frac{1 - a + ast - ((1 - a)p + (ad - (1 - a)(1 - q))t)sv}{1 - (q + ps)v + (pq - (1 - p)(1 - q)t)sv^2}. \quad (12)$$

Замечание 3. Формулы для производящих функций распределений случайных переменных $x(n)$, $y(n)$ и их совместного распределения можно получить как частные случаи общей формулы для производящих функций совместного распределения числа единиц, числа 1-серий и максимумов длин 1-серий и 0-серий, которая была выведена в [5]. Там указаны некоторые формулы и для самого такого совместного распределения.

5. Распределение числа единиц

5.1. Пусть

$$P(i, \cdot, n) = \sum_{j=0}^{i \wedge ([n/2]+1)} P(i, j, n).$$

Из (6) следует, что при $1 \leq i \leq n$ верно равенство

$$P(i, \cdot, n) = \sum_{j=1}^{i \wedge ([n/2]+1)} \left(b(j-1, i-1, 1-p) \sum_{\alpha, \beta} \chi_{\alpha\beta} b(j-\alpha-\beta, n-i, 1-q) \right). \quad (13)$$

5.2. Производящая функция f для распределения $P(i, \cdot, n)$ выражается равенствами

$$f(s, v) = h(s, 1, v) = \frac{1 - a + as - dsv}{1 - (q + ps)v + dsv^2}. \quad (14)$$

5.3. Для последовательности Бернулли ($a = p = 1 - q$) из (13) получается известное равенство (см. [9])

$$P(i, \cdot, n) = \binom{n+1}{i} p^i (1-p)^{n-i+1}.$$

Аналогичный результат дает разложение в ряд по v и по s производящей функции

$$f(s, v) = \frac{1 - p + ps}{1 - (1 - p + ps)v}.$$

6. Распределение числа 1-серий

6.1. Пусть

$$P(\cdot, j, n) = \sum_{i=0}^{n+1} P(i, j, n).$$

Из (6) следует, что при $2 \leq j \leq [n/2] + 1$ верно равенство

$$P(\cdot, j, n) = \sum_{i=1}^n \left(b(j-1, i-1, 1-p) \sum_{\alpha, \beta} \chi_{\alpha\beta} b(j-\alpha-\beta, n-i, 1-q) \right). \quad (15)$$

При $j = 1$ добавляется полная 1-серия (7) и равенство имеет вид

$$P(\cdot, 1, n) = ap^n + (a(1-p) + (1-a)(1-q))p^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} ((n-i)(1-a)(1-p)(1-q) + (1-a)(1-q)q + a(1-p)q)p^{i-1}q^{n-i-1}. \quad (16)$$

6.2. Производящая функция g для распределения $P(\cdot, j, n)$ выражается равенствами

$$g(t, v) = h(1, t, v) = \frac{1 - a + at - (1-a)pv + (1-ap-q)tv}{1 - (p+q)v + pqv^2 - (1-p)(1-q)tv^2}. \quad (17)$$

6.3. Для последовательности Бернулли ($a = p = 1 - q$) из (15) и (16) при $1 \leq j \leq [n/2] + 1$ получается равенство

$$P(\cdot, j, n) = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{i-1}{j-1} \binom{n-i+2}{j} p^i (1-p)^{n-i+1}.$$

Производящая функция g имеет вид

$$g(t, v) = \frac{1 - p(1-t) - p(1-p)(1-t)v}{1 - v + p(1-p)(1-t)v^2}.$$

7. Среднее число единиц

7.1. Среднее значение $\mathbf{E}(x(n))$ случайной величины $x(n)$ выражается равенствами

$$\mathbf{E}(x(n)) = \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(\xi(k)) = \sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n (b + (a-b)d^k).$$

Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, находим, что

$$\mathbf{E}(x(n)) = (n+1)b + c(1-d^{n+1}). \quad (18)$$

Слагаемое $(n+1)b$ является биномиальной частью формулы (18). Если $a = p$ и $d = 0$, то $c = 0$, $b = 1 - q = p$, марковская последовательность становится бернуллиевой и $\mathbf{E}(x(n)) = (n+1)p$. Слагаемое $c(1-d^{n+1})$ является аддитивной поправкой на марковскую зависимость случайных переменных $\xi(k)$. То же равенство для средних можно получить, дифференцируя по s производящую функцию $f(s, v)$, заданную равенством (14), и разлагая производную в точке $t = 1$ в ряд по v .

7.2. Так как по предположению $|d| < 1$, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(x(n)) \sim (n+1)b + c \sim nb.$$

Это соответствует представлению о рассматриваемой двоичной марковской последовательности $\xi(1), \dots, \xi(n)$ как об асимптотически бернуллиевой с параметрами n и b . А так как $n^m d^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ при любом $m > 0$, при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\mathbf{E}(x(n)) = (n+1)b + c + O(d^n) = (n+1)b + c + o(n^{-m}).$$

Легко проверить также, что

$$|\mathbf{E}(x(n)) - ((n+1)b + c)| \leq |d|^{n+1}/(1-d), \quad |\mathbf{E}(x(n)) - nb| \leq 1/(1-d).$$

Правые части этих неравенств могут быть большими при значениях d , близких к 1.

8. Дисперсия числа единиц

8.1. Последовательно дифференцируя равенство (14) и разлагая вторую производную при $s = 1$ в ряд по v , после некоторых преобразований получаем равенства

$$f'_s(1, v) = \frac{a + (1-a-q)v}{(1-dv)(1-v)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)b + c(1-d^{n+1}))v^n = \sum_{n=0}^{\infty} f'_{(n)}(1)v^n,$$

$$f''_{ss}(1, v) = f'_s(1, v) \frac{2(p-dv)v}{(1-v)(1-dv)} = 2f'_s(1, v) \sum_{n=1}^{\infty} (b + (1-b)d^n)v^n = \sum_{n=1}^{\infty} f''_{(n)}(1)v^n.$$

Вычисляя коэффициенты $f'_{(n)}(1)$, $f''_{(n)}(1)$ полученных рядов, находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(x(n)) &= f''_{(n)}(1) + f'_{(n)}(1) - (f'_{(n)}(1))^2 = 2 \sum_{m=1}^n [(n-m+1)b + c(1-d^{n-m+1}) \\ &\quad \times (b + (1-b)d^m)] + (n+1)b + c(1-d^{n+1}) - ((n+1)b + c(1-d^{n+1}))^2. \end{aligned}$$

Суммируя и выделяя главную часть, получаем формулу для дисперсии

$$\mathbf{D}(x(n)) = a(1-a) + nb(1-b)\gamma + A + R(n), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1+d}{1-d}, & A &= -\left(c^2(2-d) - c(1-2b)\frac{3-d}{1-d} + 2b(1-b)\frac{d}{(1-d)^2}\right)d, \\ B &= -2c(1-2b)d, & C &= \left(2c^2 - c(1-b)\frac{3-d}{1-d} + 2b(1-b)\frac{d}{(1-d)^2}\right)d, \\ D &= -c^2d^2, & R(n) &= Bnd^n + Cd^n + Dd^{2n}. \end{aligned}$$

8.2. Заметим, что при $n \rightarrow \infty$

$$R(n) = \left(B + \frac{C}{n} + \frac{D}{n}d^n\right)nd^n = O(nd^n).$$

По предположению $|d| < 1$ и $n^m d^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ при любом $m > 0$, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(x(n)) &= a(1-a) + nb(1-b)\gamma + A + O(nd^n) \\ &= a(1-a) + nb(1-b)\gamma + A + o(n^{-m}), \\ \mathbf{D}(x(n)) &\sim a(1-a) + nb(1-b)\gamma + A \sim nb(1-b)\gamma. \end{aligned}$$

Слагаемые $a(1-a) + nb(1-b)\gamma$ составляют биномиальную часть формулы (19) с коэффициентом искажения γ , учитывающим зависимость между случайными переменными $\xi(k)$. Слагаемые $A + Bnd^n + Cd^n + Dd^{2n}$ являются аддитивной поправкой на их зависимость и нестационарность.

8.3. Для стационарной последовательности ($a = b$, $c = 0$) формулы (18), (19) дают следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x(n)) &= t(n+1)b, \\ \mathbf{D}(x(n)) &= (n+1)b(1-b)\gamma - \frac{2b(1-b)d}{(1-d)^2}(1-d^{n+1}). \end{aligned}$$

Замечание 4. Главные члены nb и $nb(1-b)\gamma$ формул для средних и дисперсий были выведены А. А. Марковым и использованы им в предельной теореме [1]. Другие члены формулы (19) могут играть существенную роль при значениях d , близких к 1. Кроме того, они позволяют оценить точность нормального приближения и скорость сходимости к нему.

8.4. Оценим погрешность приближения $\mathbf{D}(x(n))$ ее членами $a(1-a) + nb(1-b)\gamma + A$ и $nb(1-b)\gamma$, используя равенство (19). Как нетрудно проверить, при $|d| < 1$ верны неравенства

$$|A| \leq \frac{5}{2(1-d)^2}, \quad |B| \leq \frac{2}{(1-d)^2}, \quad |C| \leq \frac{3}{2(1-d)^2}, \quad |D| \leq \frac{1}{(1-d)^2},$$

откуда

$$|\mathbf{D}(x(n)) - (a(1-a) + nb(1-b)\gamma + A)| \leq \frac{3}{n} \frac{1}{(1-d)^2},$$

$$|\mathbf{D}(x(n)) - nb(1-b)\gamma| \leq \frac{1}{4} + \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{n}\right) \frac{1}{(1-d)^2}.$$

Последние неравенства верны, когда

$$n \geq 2 + \frac{9}{4 \ln^2 |d|}$$

или $n \geq 2$ при $d = 0$. Неравенство $n \geq 2$ обеспечивает выполнение неравенства $2 + 3/(2n) + 1/n^2 \leq 3$, а неравенство $n \geq 9/(4 \ln^2 |d|)$ вместе с неравенством $\ln n \leq (3/4)\sqrt{n}$ влекут неравенство $|nd^n| \leq 1/n$ при $0 < |d| < 1$:

$$n \geq \frac{9}{4 \ln^2 |d|} \Rightarrow -\ln |d| \geq \frac{3\sqrt{n}}{2n} \Rightarrow -\ln |d| \geq \frac{2 \ln n}{n} \Rightarrow \frac{1}{|d|^n} \geq n^2 \Rightarrow n|d|^n \leq \frac{1}{n}.$$

Замечание 5. Если $d \rightarrow 1$ и рассматриваемые переменные $\xi(k)$ сильно зависимы, то $1/(1-d)^2 \rightarrow \infty$ и предлагаемые для дисперсии оценки теряют смысл. Но в этом случае также $\gamma \rightarrow \infty$. Если $d \rightarrow 0$ и рассматриваемые переменные $\xi(k)$ слабо зависимы, то $1/(1-d)^2 \rightarrow 1$ и предлагаемые для дисперсии оценки упрощаются. В этом случае $\gamma \rightarrow 1$. Если $d < 0$, то знаменателями в оценках можно пренебречь.

Из полученных для абсолютных погрешностей оценок выводятся оценки для относительных погрешностей. Они имеют порядок $1/n$.

При больших значениях n указанные приближения можно эффективно использовать для вычислений. Оценки и примеры показывают, что

$$\bar{\mathbf{E}}(x(n)) = b + nb + c, \quad \bar{\mathbf{D}}(x(n)) = a(1-a) + nb(1-b)\gamma + A$$

хорошо приближают $\mathbf{E}(x(n))$ и $\mathbf{D}(x(n))$ даже при сравнительно небольших значениях n .

9. Среднее число 1-серий

9.1. Дифференцирование равенства (17) по t и разложение в ряд по степеням v дают равенство

$$g'_t(1, v) = \frac{(1-pv)(a + (1-a-q)v)}{(1-v)^2(1-dv)} = a + (1-(1-a)q)v$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(a + (1-a)(1-q)n - \sum_{m=0}^{n-2} (1-q)(1-q-a(1-d)(m+1)d^{n-m-2}) \right) v^n.$$

Среднее число 1-серий выражается формулой

$$\mathbf{E}(y(n)) = a + nb(1-p) - (a-b)b(1-d^n). \quad (20)$$

9.2. По предположению $|d| < 1$, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(y(n)) \sim a + nb(1 - p) - (a - b)b.$$

А так как $n^m d^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ при любом $m > 0$, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(y(n)) = a + nb(1 - p) - (a - b)b + O(d^n) = a + nb(1 - p) - (a - b)b + o(n^{-m}).$$

Легко проверить также, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(y(n)) - (a + nb(1 - p) - (a - b)b)| &\leq \frac{|d|^n}{(1 - d)^2}, \\ |\mathbf{E}(y(n)) - nb(1 - p)| &\leq 1 + \frac{1 - d^n}{(1 - d)^2}, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(y(n)) - (a + nb(1 - p) - (a - b)b)| &\leq |d|^n, \\ |\mathbf{E}(y(n)) - nb(1 - p)| &\leq 2 - d^n. \end{aligned}$$

Первой группой оценок целесообразно пользоваться, когда $d < 0$, второй при $d > 0$.

10. Дисперсия числа 1-серий

10.1. Дифференцирование равенства (17) дает равенство

$$g''_{it}(1, v) = 2(1 - p)(1 - q) \frac{a + (1 - a - ap - q)v - (1 - a - q)pv^2}{(1 - v)^3(1 - dv)^2} v^2.$$

Разлагая правую часть равенства в ряд по степеням v , вычисляя коэффициенты $g''_{(n)}(1)$, используя для дисперсии числа 1-серий формулу

$$\mathbf{D}(y(n)) = g''_{(n)}(1) + \mathbf{E}(y(n)) - \mathbf{E}(y(n))^2,$$

после некоторых преобразований приходим к равенству

$$\mathbf{D}(y(n)) = a(1 - a) + nb(1 - b)\bar{\gamma} + \bar{A} + \bar{R}(n), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= p(b - q) + q(1 - b), \\ \bar{A} &= b((a - b)^2(2 - b) - (a - b)(1 - 2b)(3 - 2b) - 2(1 - b)b^2), \\ \bar{B} &= -2(a - b)b^2(1 - q)(1 + d), \\ \bar{C} &= b(-2(a - b)^2(1 - b) + (a - b)(1 - 2b)(3 - 2b) + 2(1 - b)b^2), \\ \bar{D} &= -(a - b)^2b^2, \\ \bar{R}(n) &= \bar{B}nd^{n-1} + \bar{C}d^n + \bar{D}d^{2n}. \end{aligned}$$

10.2. Заметим, что при $n > 0$

$$\bar{R}(n) = \left(\bar{B} + \frac{\bar{C}d}{n} + \frac{\bar{D}d^{n+1}}{n} \right) nd^{n-1} = O(nd^{n-1}).$$

Как нетрудно проверить,

$$|\bar{A}| \leq 2/5, \quad |\bar{B}| \leq 27/128, \quad |\bar{C}| \leq 1, \quad |\bar{D}| \leq 1, \quad t|\bar{B} + \frac{\bar{C}d}{n} + \frac{\bar{D}d^{n+1}}{n}| \leq \frac{27}{128} + \frac{2}{n}.$$

10.3. Для стационарной последовательности ($a = b$) формулы (20), (21) дают равенства

$$\mathbf{E}(y(n)) = b + nb(1 - p),$$

$$\mathbf{D}(y(n)) = (1 - b)b(1 + n\bar{y} - 2b^2(1 - d^n)).$$

В случае последовательности Бернулли, когда $a = b = p = 1 - q$ и $d = 0$, эти равенства при $n \geq 1$ приобретают вид ([6])

$$\mathbf{E}(y(n)) = p(1 + n(1 - p)),$$

$$\mathbf{D}(y(n)) = p(1 - p)(1 - 2p^2 + n(1 - 3p + 3p^2)).$$

Замечание 6. В [12] аналогичные выражения для средних и дисперсий указаны как следствия общих комбинаторных формул для конечных цепей Маркова из [10], [11]. Для вывода нужных выражений можно использовать также общие результаты, доказанные в книге [13].

11. Ковариации

11.1. Найдем $\mathbf{E}(x(n)y(n))$. Для этого продифференцируем производящую функцию $h(s, t, v)$ по s и t , взяв значение производной в точке $s = 1, t = 1$:

$$h''_{st}(1, 1, v) = \frac{(a + (1 - a - q)v)(1 - (1 + d)v + (2pq - d)v^2)}{(1 - v)^3(1 - dv)^2}.$$

Разлагая полученное выражение в ряд по степеням v , получаем равенства

$$\begin{aligned} h''_{st}(1, 1, v) &= (a + (1 - q - a(p + q + 1))v + (qd - p + a(1 + 2pq))v^2 \\ &+ (1 - a - q)(2pq - d)v^3) \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1)d^k v^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 2)(n + 1)}{2} v^n = \sum_{n=0}^{\infty} h''_{(n)}(1, 1)v^n. \end{aligned}$$

После некоторых преобразований находим, что

$$h''_{(n)}(1, 1) = \mathbf{E}(x(n)y(n)) = n^2 b^2(1 - p) + \hat{A}n + \hat{B} + \hat{R}(n), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{A} &= b(2(a-b)(1-b) + 1 - b(1-b)(1+d)), \\ \hat{B} &= a + c(d - 2b(1-b)(1+d)) + 2b^2(1-b)\frac{d}{1-d}, \\ \hat{C} &= 2(a-b)b(1-b), \\ \hat{D} &= -c(d - 2b(1-b)(1+d)) - 2b^2(1-b)\frac{d}{1-d}, \\ \hat{R}(n) &= \hat{C}nd^n + \hat{D}d^n.\end{aligned}$$

11.2. Заметим, что при $n \geq 1$

$$\hat{R}(n) = (\hat{C} + \hat{D}/n)nd^n = O(nd^n).$$

Как нетрудно проверить,

$$|\hat{C}| \leq 8/27, \quad |\hat{D}| \leq 1/(1-d), \quad |\hat{C} + \hat{D}/n| \leq 8/27 + 1/((1-d)n).$$

11.3. Для стационарной последовательности ($a = b$) коэффициенты в выражении (22) существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= b(1 - b(1-b)(1+d)), \\ \hat{B} &= b \left(1 + 2b(1-b)\frac{d}{1-d} \right), \\ \hat{R}(n) &= -2b^2(1-b)\frac{d^{n+1}}{1-d}.\end{aligned}$$

В случае последовательности Бернулли, когда $a = b = p$ и $d = 0$, эти равенства принимают вид

$$\hat{A} = p(1 - p(1-p)), \quad \hat{B} = p, \quad \hat{R}(n) = 0.$$

11.4. Вычислим ковариацию $\text{Cov}(x(n), y(n))$ числа 1-событий и 1-серий. Подставляя в формулу

$$\text{Cov}(x(n), y(n)) = \mathbf{E}(x(n)y(n)) - \mathbf{E}(x(n))\mathbf{E}(y(n))$$

найденные значения $\mathbf{E}(x(n)y(n))$, $\mathbf{E}(x(n))$, $\mathbf{E}(y(n))$, после некоторых преобразований получаем равенство

$$\text{Cov}(x(n), y(n)) = nb(1-b)(1-2b) + C_0 + RC(n),$$

где

$$\begin{aligned}C_0 &= (1-b)(c(1-a-2b-bd) + b + 2b^2d/(1-d)), \\ C_1 &= cb(2q - pq - p^2), \\ C_2 &= -c(a(b - (1-b)d) - 2b(1-b) + (1-2b)d) - 2b^2(1-b)d/(1-d), \\ C_3 &= (a-b)cbd, \\ RC(n) &= C_1nd^n + C_2d^n + C_3d^{2n}.\end{aligned}$$

11.5. Заметим, что

$$RC(n) = \left(C_1 + \frac{C_2}{n} + \frac{C_3}{n} d^n \right) nd^n = O(nd^n).$$

Как нетрудно проверить,

$$|C_1| \leq 1, \quad |C_2| \leq \frac{3}{1-d}, \quad |C_3| \leq \frac{1}{1-d}, \quad \left| C_1 + \frac{C_2}{n} + \frac{C_3}{n} d^n \right| \leq 1 + \frac{4}{n(1-d)}.$$

11.6. Для стационарной последовательности ($a = b$) коэффициенты в выражении для ковариации существенно упрощаются:

$$C_0 = b(1-b) \frac{1 - (1-2b)d}{1-d}, \quad RC(n) = -2b^2(1-b) \frac{d^{n+1}}{1-d}.$$

В случае последовательности Бернулли, когда $a = b = p$ и $d = 0$, эти равенства принимают вид

$$C_0 = p(1-p), \quad RC(n) = 0.$$

В симметричном случае, когда $p = q$ и $b = 1/2$,

$$\text{Cov}(x(n), y(n)) = C_0 + C_1 nd^n + C_2 d^n + C_3 d^{2n},$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{2 - (1-2a)(1-2a-2p)}{16(1-p)}, \\ C_1 &= \frac{(2a-1)p}{4}, \\ C_2 &= \frac{(1-a)(2a(1-p)-p)}{4(1-p)}, \\ C_3 &= -\frac{(1-2a)^2(1-2p)}{16(1-p)}. \end{aligned}$$

Замечание 7. Таким образом, в несимметричном и симметричном случаях соответственно

$$\text{Cov}(x(n), y(n)) = O(n), \quad \text{Cov}(x(n), y(n)) = O(1).$$

11.7. Вычислим коэффициент корреляции $K(x(n), y(n))$ случайных величин $x(n), y(n)$. Подставляя в формулу

$$K(x(n), y(n)) = \frac{\text{Cov}(x(n), y(n))}{\sqrt{\mathbf{D}(x(n))\mathbf{D}(y(n))}}$$

найденные значения $\text{Cov}(x(n), y(n)), \mathbf{D}(x(n)), \mathbf{D}(y(n))$, после некоторых преобразований получаем, что

$$K(x(n), y(n)) = \frac{1}{b(1-b)\sqrt{(p+q)(pb^2+q(1-b)^2)}}(b(1-b)(1-2b) + RK(n)),$$

и $|RK(n)| \leq \bar{r}/n$ при

$$n \geq 6\sqrt{3} \left(\frac{(\bar{r})^{3/4}}{\sqrt[3]{(\bar{r})^{33/20} - 1/30}} \right)^5,$$

где

$$\bar{r} = \left(\frac{r_0}{2} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \right) (5/2 + r_1 + r_2 + r_1 r_2),$$

$$r_0 = |C_0 + RC(n)| \leq \frac{1}{3(1-d)} + n|d|^n + \frac{3|d|^n}{1-d} + \frac{d^{2n}}{1-d},$$

$$r_1 = \left| \frac{a(1-a) + A + R(n)}{b(1-b)\gamma} \right| \leq \frac{6}{b(1-b)(1-d^2)} + \frac{2n|d|^{n+1} + 4|d|^{n+1} + d^{2n+2}}{b(1-b)(1-d^2)},$$

$$r_2 = \left| \frac{a(1-a) + \bar{A} + \bar{R}(n)}{b(1-b)\bar{\gamma}} \right| \leq \frac{3}{5b(1-b)\bar{\gamma}} + \frac{(27/128)n|d|^{n-1} + |d|^n + d^{2n}}{b(1-b)\bar{\gamma}}.$$

Замечание 8. Таким образом, в симметричном случае

$$K(x(n), y(n)) = O(1/n).$$

В длинных двоичных марковских последовательностях с симметричным распределением число единиц и число 1-серий асимптотически некоррелированы. Это соответствует представлению о рассматриваемой марковской последовательности $\xi(1), \dots, \xi(n)$ как об асимптотически бернуллиевой.

12. Нормальное приближение

12.1. Равенство (5) для совместного распределения случайных переменных $x(n), y(n)$ позволяет получить достаточно простую формулу для его нормального приближения. Будем использовать приближенные формулы для биномиального распределения, указанные в теореме 1.1.12 в [14] и [15]. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \sigma(n, p) &= \sqrt{np(1-p)}, & x &= x(k, n, p) = (k - np)/\sigma(n, p), \\ \Delta(x, n, p) &= \frac{(1-2p)(3x-x^3)}{6\sigma(n, p)}, & \varepsilon(x, n, p) &= C \frac{1+x^6}{\sigma^2(n, p)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(n, p)} e^{-x^2/2}, \\ u &= x(j-1, i-1, 1-p), & v &= v(\alpha, \beta) = x(j-\alpha-\beta, n-i, 1-q). \end{aligned}$$

В этих обозначениях

$$b(k, n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(n, p)} e^{-x^2/2} (1 + \Delta(x, n, p)) + \varepsilon(x, n, p), \quad (23)$$

когда $n \rightarrow \infty, (1+x^6)/\sigma^2(n, p) \rightarrow 0$.

Для всех x из данного отрезка вещественной прямой при $\sigma(n, p) \geq 25$ верно неравенство

$$|\varepsilon(x, n, p)| \leq \frac{0,15 + 0,25|1-2p|}{\sigma^3(n, p)} + e^{-3\sigma(n, p)/2}.$$

Используя равенства (23) и (5) получаем, что при $n \rightarrow \infty$, $(1 + x^6)/\sigma^2(n, p) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(i, j, n) &= \chi_{\alpha\beta} b(j-1, i-1, 1-p) b(j-\alpha-\beta, n-i, 1-q) \\ &= \frac{\chi_{\alpha\beta}}{2\pi\sigma(i-1, p)\sigma(n-i, q)} e^{-(u^2+v^2)/2} (1 + \Delta(u, v, n, i, p, q)) \\ &\quad + \varepsilon(u, v, n, i, p, q), \end{aligned}$$

где

$$\Delta(u, v, n, i, p, q) = \Delta(u, i-1, p) + \Delta(v, n-i, q) + \Delta(u, i-1, p)\Delta(v, n-i, q),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(u, v, n, i, p, q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(n-i, q)} e^{-v^2/2} (1 + \Delta(v, n-i, q)) \varepsilon(u, i-1, p) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(i-1, p)} e^{-u^2/2} (1 + \Delta(u, i-1, p)) \\ &\quad \times \varepsilon(v, n-i, q) + \varepsilon(u, i-1, p) \varepsilon(v, n-i, q). \end{aligned}$$

Для всех x из данного отрезка вещественной прямой верно неравенство

$$\begin{aligned} |\varepsilon(u, v, n, i, p, q)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3(i-1, p)\sigma^3(n-i, q)} (B(q, n-i)A(p) + B(p, i-1)A(q) \\ &\quad + \sqrt{2\pi}A(p)A(q)) + (B(q, n-i) + \sqrt{2\pi}A(q)) \frac{e^{-3\sigma(i-1, p)/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma^3(n-i, q)} \\ &\quad + (B(p, i-1) + \sqrt{2\pi}A(p)) \frac{e^{-3\sigma(n-i, q)/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma^3(i-1, p)} \\ &\quad + e^{-3(\sigma(i-1, p) + \sigma(n-i, q))/2}, \end{aligned}$$

где

$$A(x) = 0,15 + 0,25|1 - 2x|, \quad B(x, y) = 2x^2(1-x)^2 + \frac{1}{3}|1 - 2x|y.$$

Более простая и грубая оценка имеет вид

$$\begin{aligned} |\varepsilon(u, v, n, i, p, q)| &\leq \frac{2(n+3)}{15\sqrt{2\pi}\sigma^3(i-1, p)\sigma^3(n-i, q)} \\ &\quad + \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{3}(n-i)\right) \frac{e^{-3\sigma(i-1, p)/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma^3(n-i, q)} \\ &\quad + \left(\frac{5}{6} + \frac{i}{3}\right) \frac{e^{-3\sigma(n-i, q)/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma^3(i-1, p)} + e^{-3(\sigma(i-1, p) + \sigma(n-i, q))/2}. \end{aligned}$$

Оставляя только главные члены и разлагая на нормальные множители, находим, что

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(i, j, n) &\sim \frac{(\alpha a + (1-\alpha)(1-a))}{\sqrt{2\pi}\sigma(i-1, p)} \exp\left(-\frac{(j-1-(i-1)(1-p))^2}{2\sigma^2(i-1, p)}\right) \\ &\quad \times \frac{(\beta(1-q) + (1-\beta)(1-p))}{\sqrt{2\pi}\sigma(n-i, q)} \exp\left(-\frac{(j-\alpha-\beta-(n-i)(1-q))^2}{2\sigma^2(n-i, q)}\right) \quad (24) \end{aligned}$$

при $i \rightarrow \infty$, $(1+u^6)/\sigma^2(i-1, p) \rightarrow 0$, $n-i \rightarrow \infty$, $(1+v^6)/\sigma^2(n-i, q) \rightarrow 0$. Асимптотическая формула (24) сразу следует из формулы (5) и классической теоремы Муавра-Лапласа.

12.2. Нормальные приближения для распределения числа единиц в марковских последовательностях описаны во многих работах. Интегральная предельная теорема для двоичной последовательности была доказана А. А. Марковым в [1]. Интегральная и локальная предельные теоремы для марковской последовательности с конечным множеством значений были доказаны А. Н. Колмогоровым в [16].

Предельные теоремы для распределения числа 1-серий в двоичных марковских последовательностях можно вывести из локальной теоремы для чисел переходов в марковской последовательности с конечным множеством значений, доказанной в [10].

В двоичном случае формулировки и доказательства теорем существенно упрощаются.

13. Случайные блуждания

13.1. Рассмотрим последовательность случайных векторов $(x(n), y(n), \xi(n))$. Она является марковской со счетным множеством значений $C = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \{0, 1\}$, начальным распределением $\bar{P} = (\bar{p}_\sigma)$ и переходной матрицей $\bar{Q} = (\bar{q}_{\gamma\Delta})$, $\gamma, \Delta \in C$. Из определений следует, что

$$\begin{aligned}\bar{p}_{(0,0,0)} &= 1 - a, & \bar{p}_{(1,1,1)} &= a, \\ \bar{q}_{(i,j,0),(i,j,0)} &= q, & \bar{q}_{(i,j,0),(i+1,j+1,1)} &= 1 - q, \\ \bar{q}_{(i,j,1),(i+1,j,1)} &= p, & \bar{q}_{(i,j,1),(i,j,0)} &= 1 - p,\end{aligned}$$

все остальные начальные и переходные вероятности равны 0.

13.2. Последовательность векторов $(x(n), y(n), \xi(n))$ описывает случайное блуждание по целочисленной пространственной решетке в бесконечном прямоугольнике $C = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \times \{0, 1\}$. Находясь в момент $n > 0$ в точке $(i, j, 0)$, частица в момент $n + 1$ может с вероятностью q остаться в этой точке, а с вероятностью $1 - q$ подняться по диагонали в точку $(i + 1, j + 1, 1)$. Находясь в момент $n > 0$ в точке $(i, j, 1)$, частица в момент $n + 1$ может с вероятностью p переместиться в точку $(i + 1, j, 1)$, а с вероятностью $1 - p$ упасть в точку $(i, j, 0)$. Таким образом, частица может оставаться на месте или перемещаться из данной вершины каждого единичного куба в другую по указанным правилам. Выйдя из точки, частица в нее уже не возвращается.

14. Операторные уравнения

14.1. Рассматриваемое случайное блуждание определяется системой рекуррентных уравнений и эквивалентным ей матричным уравнением специального вида. Составим операторное уравнение для распределения

$$\bar{p}(n) = (p(i, j, k, n)), \quad (i, j, k) \in C, \quad p(i, j, k, n) = \mathbf{P}\{x(n) = i, y(n) = j, \xi(n) = k\}$$

случайного вектора $(x(n), y(n), \xi(n))$. Из определений следует, что

$$p(0, 0, 0, 0) = 1 - a, \quad p(1, 1, 1, 0) = a, \quad \bar{p}(n + 1) = \bar{p}(n)\bar{Q}, \quad n \geq 0.$$

Рассмотрим банахово пространство $L^1 = L^1(C)$ суммируемых числовых функций на множестве C . Ясно, что $\bar{p}(n) \in L^1$ и норма $|\bar{p}(n)| = 1$. Матрица $\bar{Q}$ представляет ограниченный линейный оператор в $L^1(C)$ и имеет норму 1. Такие операторы и линейные операторные уравнения подробно рассматривались в [18].

14.2. Пусть

$$\hat{p}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)u^n, \quad |u| < 1.$$

Так как $|\bar{p}(n)| = 1$, векторный ряд $\bar{p}(n)u^n$ абсолютно суммируем при $|u| < 1$ и функция $\hat{p}$ определена внутри единичного круга. Умножая равенство для $\bar{p}(n)$ на u^n и суммируя, получаем операторное уравнение для $\hat{p}$:

$$\begin{aligned} \hat{p}(u) - \bar{p}(0) &= \hat{p}(u)\bar{Q}u, \\ \hat{p}(u)(I - \bar{Q}u) &= \bar{p}(0). \end{aligned}$$

Здесь I обозначает единичную $|C| \times |C|$ матрицу, которая представляет тождественное преобразование множества C . Так как $|\bar{Q}u| = |\bar{Q}||u| < 1$, полученное уравнение корректно и его решение представляется рядом Неймана

$$\hat{p}(u) = \bar{p}(0)(I - \bar{Q}u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(0)\bar{Q}^n u^n.$$

Это соответствует равенству

$$\bar{p}(n) = \bar{p}(0)\bar{Q}^n,$$

вытекающему из марковского свойства.

Дело сводится к исследованию степеней блочной матрицы $\bar{Q}$ или обратной матрицы $(I - \bar{Q}u)^{-1}$.

Список литературы

1. Марков А. А., *Исчисление вероятностей*. Императорская Академия Наук, Санкт-Петербург, 1913.
2. Колмогоров А. Н., *Теория вероятностей и математическая статистика*. Наука, Москва, 1986.
3. Сарымсаков Т. А., *Основы теории процессов Маркова*. Гостехиздат, Москва, 1954.
4. Сираждинов С. Х., *Предельные теоремы для цепей Маркова*. Изд-во АН УзССР, Ташкент, 1955.
5. Савельев Л. Я., Случайные соответствия, двоичные матрицы и серии. *Дискретная математика* (1999) **11**, №4, 3–26.
6. Mood A. M., The distribution theory of runs. *Ann. Math. Stat.* (1940) **11**, №4, 367–392.
7. Hirano K., Aki S., On the number of occurrences of success runs of length k in a two-state Markov chain. *Statist. Sinica* (1992) **3**, 313–320.
8. Uchida M., On number of occurrences of success runs of specified length in a higher-order two-state Markov chain. *Ann. Inst. Statist. Math.* (1998) **50**, №3, 587–601.
9. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1. Мир, Москва, 1984.
10. Смирнов Н. В., Сарманов О. В., Захаров В. К., Локальная предельная теорема для чисел переходов в цепи Маркова и ее применения. *Докл. АН СССР* (1966) **167**, №6, 1238–1241.
11. Сарманов О. В., Захаров В. К., Комбинаторная задача Н. В. Смирнова. *Докл. АН СССР* (1967) **176**, №3, 530–532.
12. Захаров В. К., Сарманов О. В., О законе распределения числа серий в однородной цепи Маркова. *Докл. АН СССР* (1968) **179**, №3, 526–528.

13. Романовский В. И., *Дискретные цепи Маркова*. Гостехиздат, Москва, 1949.
14. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
15. Гамкредидзе Н. Г., Муавра–Лапласа теорема. В кн.: *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. Большая Российская энциклопедия, Москва, 1999.
16. Колмогоров А. Н., Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова. *Известия АН СССР. Сер. матем.* (1949) 13, 281–300.
17. Савельев Л. Я., Серии в марковских последовательностях. *Сиб. матем. ж.* (1991) 32, №4, 116–132.
18. Савельев Л. Я., Марковские матричные операторы. Деп. ВИНТИ, №457-В 95, 1995.

Статья поступила 12.10.2003.