Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чеплюкова, Один случай предельного распределения числа циклических вершин в случайном отображении, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 3, 76–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:54:04

Один случай предельного распределения числа циклических вершин в случайном отображении

© 2004 г. И. А. Чеплюкова

Рассматривается число циклических вершин в случайном однозначном отображении множества объема n , граф которого содержит m циклов. Получена теорема, описывающая предельное поведение этой характеристики в случае, когда $n \rightarrow \infty$, $m/\ln n \rightarrow \infty$, $m/\ln n = O(\ln n)$.

Работа выполнена при поддержке гранта НШ 1758.2003.1 Президента Российской Федерации государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации.

Рассмотрим однозначные отображения множества из n элементов в себя, граф которых содержит m компонент связности. На множестве всех таких отображений введем равномерное распределение вероятностей. В книге [1] получены предельные распределения некоторых характеристик этих случайных отображений. Мы будем придерживаться обозначений [1]. Через $\lambda^{(n,m)}$ обозначим случайную величину, равную числу циклических вершин в случайном отображении с m циклами. Предельное поведение случайной величины $\lambda^{(n,m)}$ в случае ограниченного отношения $m/\ln n$ было исследовано Ю. Л. Павловым в книге [1]. В настоящей работе мы дополним эти результаты, изучив поведение $\lambda^{(n,m)}$ при $n \rightarrow \infty$, $m/\ln n \rightarrow \infty$, $m/\ln n = O(\ln n)$.

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{\sqrt{n}}{m}, \quad \beta = \frac{m}{\ln \alpha}, \quad z = \frac{N}{\sqrt{n}}, \quad \mu = \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{\ln \ln \alpha}{\ln \alpha} \right).$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Если $n \rightarrow \infty$, $m/\ln n \rightarrow \infty$, $m/\ln^2 n \leq C < \infty$, то равномерно относительно целых N , для которых $z - \sqrt{2\mu}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале

$$\beta^\mu e^{-\beta/2} \sqrt{\pi n} \mathbf{P} \left\{ \lambda^{(n,m)} / \sqrt{n} = z \right\} = z^{2\mu} e^{-z^2/2} (1 + o(1)).$$

Замечание 1. Нетрудно проверить, что эта теорема описывает предельное распределение случайной величины $\lambda^{(n,m)}$. Действительно, согласно теореме

$$S_{n,m,A} = \sum \mathbf{P} \{ \lambda^{(n,m)} = N \} = \frac{\beta^{-\mu} e^{\beta/2}}{\sqrt{\pi n}} \sum \left(\frac{N}{\sqrt{n}} \right)^{2\mu} e^{-N^2/(2n)} (1 + o(1)),$$

где суммирование проводится по N таким, что $(\sqrt{2\mu} - A)\sqrt{n} \leq N \leq (\sqrt{2\mu} + A)\sqrt{n}$, а A — некоторая положительная постоянная. Введем переменную $t = N/\sqrt{n} - \sqrt{2\mu}$. Тогда, используя явный вид β и μ , можно показать, что при выполнении условий теоремы

$$S_{n,m,A} = \frac{\beta^{-\mu} e^{\beta/2 - \mu} (2\mu)^\mu}{\sqrt{\pi n}} \sum_{|t| \leq A} e^{-t^2} (1 + o(1)) = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{\pi n}} \sum_{|t| \leq A} e^{-t^2}.$$

Остается заметить, что суммирование по t в последней сумме осуществляется с шагом $1/\sqrt{n}$, и переходя от суммирования к интегрированию, получаем, что выбором достаточно большого A и n сумму $S_{n,m,A}$ можно сделать сколь угодно близкой к единице.

Ниже мы докажем два вспомогательных утверждения (леммы 1 и 2), с помощью которых будет доказана теорема.

Обозначим через $\lambda^{(n)}$ и $\xi^{(n)}$ соответственно число циклических точек и число циклов случайного отображения множества объема n в себя (без ограничения на число циклов). Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} = \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N \mid \xi^{(n)} = m\} = \frac{\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N, \xi^{(n)} = m\}}{\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\}}. \quad (1)$$

Для того, чтобы получить предельное распределение случайной величины $\lambda^{(n,m)}$, рассмотрим отдельно числитель и знаменатель выражения, стоящего в правой части равенства (1).

Обозначим через x_N случайную величину, равную числу циклов в случайной подстановке степени N . Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m \mid \lambda^{(n)} = N\} = \mathbf{P}\{x_N = m\}.$$

Поэтому, учитывая, что

$$\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N, \xi^{(n)} = m\} = \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m \mid \lambda^{(n)} = N\},$$

находим, что для числителя правой части соотношения (1) верно равенство

$$\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N, \xi^{(n)} = m\} = \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}. \quad (2)$$

В [2] приведено полное описание предельного поведения случайной величины x_N . Согласно этим результатам (теорема 4.2.6) при $N \rightarrow \infty$, $m/\ln N \rightarrow \infty$, $N/m \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{x_N = m\} = \frac{(-\ln(1-x))^m}{m! x^N \sigma \sqrt{2\pi m}} (1 + o(1)), \quad (3)$$

где

$$x = 1 - \left(\frac{N}{m} \ln \frac{N}{m} \right)^{-1}, \quad \sigma = \frac{N}{m} \sqrt{\ln \frac{N}{m}}. \quad (4)$$

Для вероятности $\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N, \xi^{(n)} = m\}$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Если $N \rightarrow \infty$, $N/m \rightarrow \infty$, $\bar{\beta} = m/\ln(N/m) \rightarrow \infty$, $m/\ln^2(N/m) \leq C < \infty$, то равномерно относительно $z = N/\sqrt{n} \leq n^{1/6}$

$$\frac{\sqrt{2\pi \bar{\beta}} (m-1)! n}{e^{\bar{\beta}} (-\ln(1-x))^{m-1}} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N, \xi^{(n)} = m\} = e^{-z^2/2} (1 + o(1)),$$

где x определено в (4).

Доказательство. Известно (см. [3]), что равномерно относительно $N/\sqrt{n} \leq n^{1/6}$

$$\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} = \frac{N}{n} \exp \left\{ -\frac{N^2}{2n} \right\} (1 + o(1)). \quad (5)$$

Согласно условию леммы $m/\ln(N/m) \rightarrow \infty$, следовательно, при выполнении неравенства $m/\ln^2(N/m) \leq C < \infty$ отношение $m/\ln N$ стремится к бесконечности. Поэтому справедливо соотношение (3). Кроме того, нетрудно показать, что

$$\ln x^N = N \ln \left(1 - \left(\frac{N}{m} \ln \frac{N}{m} \right)^{-1} \right) = -\frac{m}{\ln(N/m)} + o(1). \quad (6)$$

Поэтому утверждение леммы 1 следует из (2)–(6).

Докажем вспомогательную лемму для знаменателя правой части равенства (1).

Лемма 2. Пусть $n \rightarrow \infty$, $m/\ln(\sqrt{n}/m) \rightarrow \infty$, $m/\ln^2(\sqrt{n}/m) \leq C < \infty$. Тогда

$$\frac{(m-1)! \sqrt{2\beta n}}{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta/2} \beta \mu} \mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\} = e^{-\gamma} (1 + o(1)),$$

где

$$x_1 = 1 - \frac{1}{\alpha \ln \alpha}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{n}}{m}, \quad \beta = \frac{m}{\ln \alpha}, \quad \gamma = \frac{\beta}{8 \ln \alpha} \ln^2(2\mu), \quad \mu = \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{\ln \ln \alpha}{\ln \alpha} \right). \quad (7)$$

Доказательство. Используя (2), находим, что

$$\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\} = \sum_{N=m}^n \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N, \xi^{(n)} = m\} = \sum_{N=m}^n \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\}. \quad (8)$$

Разобьем область суммирования на девять частей:

$$\begin{aligned} N_1 &= \{N: m \leq N < \varepsilon \sqrt{n}/m\}, \\ N_2 &= \{N: \varepsilon \sqrt{n}/m \leq N < \varepsilon \sqrt{n}\}, \\ N_3 &= \{N: \varepsilon \sqrt{n} \leq N < \beta^{1/2-\delta} \sqrt{n}\}, \\ N_4 &= \{N: \beta^{1/2-\delta} \sqrt{n} \leq N < (\sqrt{2\mu} - A) \sqrt{n}\}, \\ N_5 &= \{N: (\sqrt{2\mu} - A) \sqrt{n} \leq N \leq (\sqrt{2\mu} + A) \sqrt{n}\}, \\ N_6 &= \{N: (\sqrt{2\mu} + A) \sqrt{n} < N < 2\sqrt{2\mu n}\}, \\ N_7 &= \{N: 2\sqrt{2\mu n} \leq N < \beta^{1/2+\delta} \sqrt{n}\}, \\ N_8 &= \{N: \beta^{1/2+\delta} \sqrt{n} \leq N < n^{2/3}\}, \\ N_9 &= \{N: n^{2/3} \leq N \leq n\}, \end{aligned}$$

где β и μ определены в (7), а выбор постоянных ε , δ и A будет ясен из дальнейшего. Через S_i обозначим суммы, соответствующие области суммирования N_i , $i = 1, \dots, 9$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi^{(n)} = m\} = \sum_{i=1}^9 S_i. \quad (9)$$

Ниже мы увидим, что основной вклад в сумму, стоящую в правой части равенства (9), дает слагаемое S_5 . Из (3)–(8) находим, что

$$\begin{aligned} S_5 &= \sum_{N_5} \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \mathbf{P}\{x_N = m\} = \sum_{N_5} \frac{N}{n} \exp \left\{ -\frac{N^2}{2n} \right\} \frac{(-\ln(1-x))^m}{m! x^N \sigma \sqrt{2\pi m}} (1 + o(1)) \\ &= \frac{(1 + o(1))(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi \beta}} \sum_{N_5} \left(\frac{\ln(N/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right)^{m-1/2} \exp \left\{ -\frac{N^2}{2n} \right\} \\ &\quad \times \left(\left(1 + \frac{\ln \ln(N/m)}{\ln(N/m)} \right) / \left(1 + \frac{\ln \ln(\sqrt{n}/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right) \right)^{m-1} \frac{\exp \{m/\ln(N/m)\}}{\exp \{m/\ln(\sqrt{n}/m)\}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Положим $y = N/\sqrt{n}$. Тогда в условиях леммы, учитывая, что $y < \ln(\sqrt{n}/m)$, нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} &\ln \left(\left(1 + \frac{\ln \ln(N/m)}{\ln(N/m)} \right) / \left(1 + \frac{\ln \ln(\sqrt{n}/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right) \right)^{m-1} \\ &= m \ln \left(\left(1 + \frac{\ln \ln(y\sqrt{n}/m)}{\ln(y\sqrt{n}/m)} \right) / \left(1 + \frac{\ln \ln(\sqrt{n}/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right) \right) + o(1) \\ &= \frac{m \ln y}{\ln^2 \alpha} - \frac{m(\ln \ln \alpha) \ln y}{\ln^2 \alpha} + o(1) \end{aligned} \quad (11)$$

и

$$\ln \left(\frac{\ln(N/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right)^{m-1/2} = \ln \left(1 + \frac{\ln y}{\ln \alpha} \right)^m (1 + o(1)) = \frac{m \ln y}{\ln \alpha} - \frac{m \ln^2 y}{2 \ln^2 \alpha} + o(1). \quad (12)$$

Кроме того, полагая $\bar{\beta} = m/\ln(N/m)$, легко показать, что

$$\frac{e^{\bar{\beta}}}{e^{\beta}} = \exp \left\{ -\frac{m \ln y}{\ln^2 \alpha} \right\} (1 + o(1)). \quad (13)$$

Из (10)–(13) следует, что

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi \beta}} \sum e^{-y^2/2} y^{2\mu} \exp \left\{ -\frac{m \ln^2 y}{2 \ln^2 \alpha} \right\} (1 + o(1)) \\ &= \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta-\gamma}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi \beta}} \sum y^{2\mu} e^{-y^2/2} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (14)$$

где суммирование осуществляется по области $\{y: \sqrt{2\mu} - A \leq y \leq \sqrt{2\mu} + A\}$. Деля замену переменной $t = y - \sqrt{2\mu}$ и учитывая, что $|t| \leq A$ и $\beta/\ln \alpha \leq C < \infty$, можно получить, что

$$S_5 = \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta/2-\gamma} \beta^{\mu}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi \beta}} \sum_{-A \leq t \leq A} e^{-t^2} (1 + o(1)).$$

Переходя от суммированию к интегрированию и используя тот факт, что суммирование в последней сумме осуществляется с шагом $1/\sqrt{n}$, находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$S_5 = \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta/2-\gamma}}{(m-1)! \sqrt{2\pi \beta n}} \beta^{\mu} \int_{-A}^A e^{-t^2} dy (1 + o(1)). \quad (15)$$

При выборе достаточно большого A интеграл, стоящий в правой части равенства (15), можно сделать сколь угодно мало отличающимся от

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-t^2\} dt = \sqrt{\pi}.$$

Отсюда получаем, что

$$S_5 = \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta/2-\gamma} \beta^\mu}{(m-1)! \sqrt{2\beta n}} (1+o(1)). \quad (16)$$

Оценим сумму S_1 . Известно (см., например, [3]), что $\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \leq N/n$, а при доказательстве леммы 5.3.12 в [1] показано, что

$$\mathbf{P}\{x_N = m\} \leq ((m-1)! N)^{-1} (1 + \ln N)^{m-1}.$$

Отсюда и из (8) следует, что

$$S_1 \leq \sum_{N < \varepsilon \sqrt{n}/m} \frac{1}{(m-1)! n} (1 + \ln N)^{m-1} \leq \frac{\varepsilon}{(m-1)! \sqrt{n}} (1 + \ln \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{m})^{m-1}. \quad (17)$$

Возьмем $\varepsilon \leq 1/e$, тогда выполняется неравенство $(1 + \ln(\varepsilon \sqrt{n}/m)) \leq \ln(\sqrt{n}/m)$ и из (16) и (17) нетрудно получить, что $S_1 = o(S_5)$.

Рассмотрим слагаемое S_2 . Из (3)–(6) находим, что

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \frac{(\ln(\varepsilon \sqrt{n}/m) \ln(\varepsilon \sqrt{n}/m))^{m-1}}{n(m-1)! \sqrt{2\pi m}} \exp \left\{ \frac{m}{\ln(\varepsilon \sqrt{n}/m)} \right\} \sum_{N_2} \left(\ln \frac{N}{m} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\ln \ln(N/m)}{\ln(N/m)} \right) \\ &\leq C_1 \frac{(\ln(\varepsilon \sqrt{n}/m) \ln(\varepsilon \sqrt{n}/m))^{m-1}}{(m-1)! \sqrt{2\pi n m}} \exp \left\{ \frac{m}{\ln(\varepsilon \sqrt{n}/m)} \right\} \sqrt{\ln \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{m}}, \end{aligned} \quad (18)$$

здесь и далее $C_1, C_2, \dots$ обозначают некоторые положительные постоянные. Поскольку при больших x функция $f(x) = (\ln(x \ln x))^{m-1} \exp\{m/\ln x\}$ возрастает, из (16) и (18) следует, что $S_2 = o(S_5)$.

Оценим S_3 . Из (3)–(8) легко получить, что

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^\beta}{n(m-1)! \sqrt{2\pi\beta}} \sum_{N_3} \exp \left\{ -\frac{N^2}{2n} \right\} \left(\frac{\ln(N/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right)^{m-1/2} \\ &\quad \times \left(\left(1 + \frac{\ln \ln(N/m)}{\ln(N/m)} \right) / \left(1 + \frac{\ln \ln(\sqrt{n}/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right) \right)^{m-1} \frac{e^{\bar{\beta}}}{e^\beta} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда и из (11)–(13), учитывая, что $y = N/\sqrt{n} < \beta^{1/2-\delta}$, нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} S_3 &\leq C_2 \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^\beta}{(m-1)! \sqrt{2\pi\beta n}} \\ &\quad \times \sum_{\varepsilon \leq y < \beta^{1/2-\delta}} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{m \ln y}{\ln(\sqrt{n}/m)} \left(1 - \frac{\ln \ln(\sqrt{n}/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right) \right\} \\ &\leq C_3 \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^\beta}{(m-1)! \sqrt{2\pi\beta n}} \exp \left\{ \frac{m \ln \beta^{1/2-\delta}}{\ln(\sqrt{n}/m)} \left(1 - \frac{\ln \ln(\sqrt{n}/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right) \right\} \sum_{y \geq \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-y^2/2}, \end{aligned}$$

где суммирование по y в последней сумме осуществляется с шагом $1/\sqrt{n}$. Заменяя суммирование интегрированием, получаем, что

$$S_3 \leq C_4 \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta}}{(m-1)! \sqrt{2\pi\beta n}} \beta^{\mu} \exp\{-\delta\beta \ln \beta\}.$$

Отсюда и из (16) следует, что $S_3 = o(S_5)$.

Оценим сумму S_4 . Положим $y = N/\sqrt{n}$. Аналогично тому, как было получено равенство (14), можно показать, что для S_4 справедливо равенство

$$S_4 = \frac{(1+o(1))(-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi\beta}} e^{\beta-\gamma} \sum_{\beta^{1/2-\delta} \leq y < \sqrt{2\mu}-A} e^{-y^2/2} y^{2\mu} \exp\left\{-\frac{m \ln^2 y}{2 \ln^2(\sqrt{n}/m)} + \gamma\right\}.$$

Пусть $t = y - \sqrt{2\mu}$, тогда последнее равенство примет вид

$$S_4 = \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi\beta}} e^{\beta-\gamma} \sum_{\beta^{1/2-\delta} - \sqrt{2\mu} \leq t < -A} \exp\left\{-\frac{1}{2}(t + \sqrt{2\mu})^2\right\} \times (t + \sqrt{2\mu})^{2\mu} \exp\left\{-\frac{m \ln^2(t + \sqrt{2\mu})}{2 \ln^2(\sqrt{n}/m)} + \gamma\right\} (1+o(1)). \quad (19)$$

Поскольку $|t| < \sqrt{2\mu}$, нетрудно видеть, что при выполнении условий леммы 2 выполняется неравенство

$$\exp\left\{-\frac{m \ln^2(t + \sqrt{2\mu})}{2 \ln^2(\sqrt{n}/m)} + \gamma\right\} < e^{|t|}.$$

Отсюда и из (19) следует, что

$$S_4 \leq C_5 \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi\beta}} e^{\beta-\gamma} e^{-\beta/2} \beta^{\mu} \sum_{t < -A} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} - t\right\}.$$

Переходя к интегрированию в последнем выражении, получаем, что

$$S_4 \leq C_6 \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! \sqrt{2\pi n\beta}} e^{\frac{\beta}{2}-\gamma} \beta^{\mu} \int_{-\infty}^{-A} \exp\left\{-\frac{t^2}{2} - t\right\} dt. \quad (20)$$

Теперь из соотношений (16) и (20) следует, что $S_4 = o(S_5)$.

Аналогично тому, как было получено равенство (14) для S_5 , нетрудно найти, что для слагаемого S_6 справедлива оценка

$$S_6 \leq C_7 \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta-\gamma}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi\beta}} \sum_{\sqrt{2\mu}+A < y < 2\sqrt{2\mu}} e^{-y^2/2} y^{2\mu} \leq C_8 \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta/2-\gamma}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi\beta}} \beta^{\mu} \sum_{A < t < \sqrt{2\mu}} e^{-t^2}, \quad (21)$$

где $y = N/\sqrt{n}$, а $t = y - \sqrt{2\mu}$. Суммирование по t в последней сумме неравенства (21) осуществляется с шагом $1/\sqrt{n}$. Заменяя суммирование интегрированием, получаем, что

$$S_6 \leq C_9 \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta/2-\gamma}}{(m-1)! \sqrt{2\pi n\beta}} \beta^\mu \int_A^\infty e^{-t^2} dt.$$

Отсюда и из (16) следует, что $S_6 = o(S_5)$.

Рассмотрим сумму S_7 . Используя соотношения (3)–(8) и (11)–(13), нетрудно показать, что для S_7 выполнено неравенство

$$S_7 \leq C_{10} \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta-\gamma}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi\beta}} \sum_{2\sqrt{2\mu} \leq y \leq \beta^{1/2+\delta}} e^{-y^2/2} y^{2\mu}.$$

Поскольку функция $f(y) = e^{-y^2/2} y^{2\mu}$ убывает, для S_7 справедлива оценка

$$S_7 \leq C_{10} \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^{\beta/2-\gamma}}{(m-1)! \sqrt{2\pi n\beta}} (2\sqrt{2\mu})^{2\mu} e^{-4\mu} \beta^{1/2-\delta}.$$

Отсюда и из (16), учитывая, что

$$\frac{(8\mu)^\mu \beta^{1/2+\delta} \exp\{-4\mu\}}{(2\mu)^\mu \exp\{-\mu\}} \rightarrow 0,$$

получаем, что $S_7 = o(S_5)$.

Оценим слагаемое S_8 . Из (3)–(8) следует, что

$$S_8 = \frac{(1+o(1))(-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi\beta}} e^\beta \sum_{N_8} \left(\frac{\ln(N/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right)^{m-1/2} \\ \times \left(\left(1 + \frac{\ln \ln(N/m)}{\ln(N/m)} \right) / \left(1 + \frac{\ln \ln(\sqrt{n}/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right) \right)^{m-1} \frac{e^{\bar{\beta}}}{e^\beta} e^{-N^2/(2n)},$$

где $\bar{\beta} = m/\ln(N/m)$. Пусть $y = N/\sqrt{n}$. Поскольку для всех N из области N_8 выполнено неравенство $e^{\bar{\beta}} < e^\beta$ и функция $f(x) = \ln \ln x / \ln x$ при $x \rightarrow \infty$ убывает, нетрудно найти, что

$$S_8 \leq C_{11} \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! n \sqrt{2\pi\beta}} e^\beta \sum_{\beta^{1/2+\delta} \leq y < n^{1/6}} \left(\frac{\ln(y\sqrt{n}/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right)^m e^{-y^2/2}. \quad (22)$$

При $y < n^{1/6}$ справедливо неравенство $\ln y / \ln \alpha < 1$, следовательно,

$$m \ln \left(1 + \frac{\ln y}{\ln \alpha} \right) < \frac{m \ln y}{\ln \alpha}.$$

Тогда из (22) получаем, что

$$S_8 \leq C_{12} \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! \sqrt{2\pi n\beta}} e^\beta \sum_{\beta^{1/2+\delta} \leq y < n^{1/6}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-y^2/2} y^\beta. \quad (23)$$

Рассмотрим сумму

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\beta^{1/2+\delta} \leq y \leq n^{1/6}} e^{-y^2/2} y^\beta. \quad (24)$$

Положим $t = y - \beta^{1/2+\delta}$. Тогда

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{0 \leq t \leq n^{1/6} - \beta^{1/2+\delta}} (t + \beta^{1/2+\delta})^\beta \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t + \beta^{1/2+\delta})^2 \right\},$$

где суммирование осуществляется с шагом $1/\sqrt{n}$. Функция

$$f(t) = (t + \beta^{1/2+\delta})^\beta \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t + \beta^{1/2+\delta})^2 \right\}$$

на рассматриваемом промежутке убывает, тогда как для k -го слагаемого суммы Σ справедливо двойное неравенство

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)/\sqrt{n}}^{k/\sqrt{n}} f(t) dt &< \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{k-1}{\sqrt{n}} + \beta^{1/2+\delta} \right)^\beta \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{k-1}{\sqrt{n}} + \beta^{1/2+\delta} \right)^2 \right\} \\ &< \int_{(k-2)/\sqrt{n}}^{(k-1)/\sqrt{n}} f(t) dt. \end{aligned}$$

Просуммировав по k все эти неравенства, получаем, что

$$\Sigma = \int_0^{n^{1/6} - \beta^{1/2+\delta}} f(t) dt (1 + o(1)). \quad (25)$$

Из (23)–(25) находим, что

$$\begin{aligned} S_8 &\leq C_{13} \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! \sqrt{2\pi n\beta}} e^\beta \int_{\beta^{1/2+\delta}}^\infty e^{-y^2/2} y^\beta dy \\ &\leq C_{14} \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! \sqrt{2\pi n\beta}} e^\beta \int_{\beta^{1/2+\delta}}^\infty \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \left(\frac{2\beta \ln y}{y^2} + 1 \right) \right\} dy. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку $y > \beta^{1/2+\delta}$, величина $2\beta \ln y / y^2$ стремится к 0. Поэтому, в силу сходимости последнего интеграла, из (16) и (26) следует, что $S_8 = o(S_5)$.

Осталось оценить последнюю сумму S_9 . Известно (см., например, [3]), что с ростом N при $N > n^{2/3}$ вероятность $\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\}$ уменьшается, поэтому из (5) получаем, что при $N \geq n^{2/3}$

$$\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} \leq \mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = n^{2/3}\} \leq C_{15} n^{-1/3} \exp\{-n^{1/3}/2\}.$$

Отсюда и из (3)–(6) нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} S_9 &\leq C_{16} \frac{n^{-1/3} \exp\{-n^{1/3}/2\} (-\ln(1-x_1))^{m-1} e^\beta}{(m-1)! \sqrt{\beta}} \sum_{N_9} \left(\frac{\ln((N/m) \ln(N/m))}{\ln(\alpha \ln \alpha)} \right)^{m-1} \frac{1}{N} \\ &\leq C_{17} \frac{n^{-1/3} \exp\{-n^{1/3}/2\} (-\ln(1-x_1))^{m-1}}{(m-1)! \sqrt{\beta}} e^\beta \sum_{N_9} \left(\frac{\ln(N/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right)^{m-1} \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку по условию доказываемой леммы $m/\ln^2 \alpha \leq C < \infty$, для любых N из области N_9 справедливы неравенства

$$\frac{\ln(N/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \leq \frac{\ln(n/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} = 1 + \frac{\ln \sqrt{n}}{\ln(\sqrt{n}/m)} \leq 1 + \left(1 - \frac{\ln(C \ln^2(\sqrt{n}/m))}{\ln \sqrt{n}}\right)^{-1} < e. \quad (28)$$

Из (27) и (28) получаем, что

$$S_9 \leq C_{18} \frac{(-\ln(1-x_1))^{m-1} e^\beta}{(m-1)! \sqrt{\beta n}} \frac{e^m \sqrt{n}}{\exp\{n^{1/3}/2\}}. \quad (29)$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условий леммы 2

$$\frac{\sqrt{n} e^m}{\exp\{n^{1/3}/2\}} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (16) и (29) следует, что $S_9 = o(S_5)$.

Из полученных оценок для сумм $S_1 - S_9$ вытекает утверждение леммы 2.

Доказательство теоремы 1. Учитывая, что условия $m/\ln^2(\sqrt{n}/m) \leq \tilde{C} < \infty$ и $m/\ln^2 n \leq C < \infty$ эквивалентны, из равенства (1) и лемм 1 и 2 нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda^{(n,m)} = N\} &= \frac{e^{\bar{\beta}}}{e^{\bar{\beta}}} \sqrt{\frac{\bar{\beta}}{\beta}} \left(\frac{\ln(1-x)}{\ln(1-x_1)} \right)^{m-1} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{\pi n}} \beta^{-\mu} e^{\beta/2+\gamma} (1+o(1)) \\ &= \frac{e^{\bar{\beta}}}{e^{\beta}} \left(\frac{\ln(N/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)} \right)^{m-1/2} \left(\left(1 + \frac{\ln \ln(N/m)}{\ln(N/m)}\right) / \left(1 + \frac{\ln \ln(\sqrt{n}/m)}{\ln(\sqrt{n}/m)}\right) \right)^{m-1} \\ &\quad \times \frac{e^{-N^2/(2n)}}{\sqrt{\pi n}} \beta^{-\mu} e^{\beta/2+\gamma} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда и из (11)–(13) следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Павлов Ю. Л., *Случайные леса*. Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, 1996.
2. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Наука, Москва, 2000.
3. Сачков В. Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.

Статья поступила 30.06.2003.