Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Андреева, Об одном обобщении метода граничных функционалов, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 3, 85–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:16:48

Об одном обобщении метода граничных функционалов

© 2004 г. Т. В. Андреева

Метод граничных функционалов был предложен А. А. Сапоженко для решения ряда перечислительных задач. В данной статье метод обобщен на случай функциональных пар с характеристикой 3 и получена асимптотическая формула для сумм граничных функционалов по регулярным семействам подмножеств.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04-01-00359.

1. Введение

А. А. Сапоженко (см. [1, 2]) предложил метод граничных функционалов для решения перечислительных задач. Метод применим в случае, когда перечислительная задача сводится к вычислению сумм вида

$$T(X, f) = \sum_{A \subseteq X} f(A),$$

где f — граничный функционал (см. раздел 1). Пусть $\mathcal{A}(X, f)$ — семейство всех связанных подмножеств множества X . Тогда для всякого $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(X, f)$ обозначим через $S(\mathcal{B})$ семейство множеств $A \subseteq X$ таких, что каждая компонента связности множества A принадлежит семейству $\mathcal{B}$. Положим

$$S(\mathcal{B}) = \sum_{B \in \mathcal{B}} f(B).$$

Поскольку

$$T(X, f) = S(\mathcal{A}(X, f)), \quad (1)$$

задача вычисления сумм $T(X, f)$ сводится к аналогичной задаче для сумм вида $S(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(X, f)$. Идея метода состоит в том, что суммы вида (1) выражаются через достаточно просто вычисляемые суммы вида

$$\alpha^v(\mathcal{B}) = \sum_{B \in \mathcal{B}} (f(B))^v, \quad (2)$$

Метод граничных функционалов представляет собой аппарат для получения асимптотических решений перечислительных задач таких, как нахождение асимптотики числа антицепей в различных частично упорядоченных множествах.

В [2] А. А. Сапоженко предложил решение проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций на основе метода граничных функционалов. При этом рассматриваемые семейства связных множеств $\mathfrak{B}$ оказались регулярными (см. раздел 5) и такими, что мощность всякого множества из $\mathfrak{B}$ не превосходила $\Delta = 2$. В данной работе получена асимптотика сумм вида 1 для почти регулярных семейств подмножеств (см. раздел 5) при $\Delta = 3$.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, \kappa, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}_3(I)$ является почти регулярным семейством. Тогда

$$S(\mathfrak{B}) = (1 + O(2^{-(1/2) \log^2 \kappa})) \exp\{\hat{\mu}_3(\mathfrak{B})\},$$

где

$$\hat{\mu}_3(\mathfrak{B}) = \alpha^1(\mathfrak{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathfrak{B}) + \frac{1}{3}\alpha^3(\mathfrak{B}) - \alpha^1(\mathfrak{B}_{[2,3]}^{(2)}) + \alpha^1(\mathfrak{B}_{[3]}^{(1,2)}).$$

Доказательство теоремы приведено в разделе 6.

2. Определения и известные результаты

Для полноты изложения в этом разделе будут приведены определения и результаты из статьи [4]. Кроме того, будут получены оценки сумм $\tilde{S}(\mathfrak{B})$, аналогичные оценкам сумм $S(\mathfrak{B})$ (следствие 1, теорема 4).

Если X — множество, то через 2^X обозначается семейство всех его подмножеств. Произвольное отображение $f: 2^X \rightarrow (0, 1]$ называется граничным функционалом на семействе подмножеств множества X , если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1) $f(A) = 1$ тогда и только тогда, когда $A = \emptyset$;
- 2) $f(A \cup B) \geq f(A)f(B)$;
- 3) $f(A \cup B) > f(A)f(B)$ тогда и только тогда, когда существуют $u \in A$ и $v \in B$ такие, что $f(\{u, v\}) > f(\{u\})f(\{v\})$.

Пара $I = (X, f)$, где X — конечное множество, а f — граничный функционал, называется функциональной парой.

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, введем понятие множества (семейства) ранга r над X . Произвольное подмножество $A \subseteq X$ называется семейством ранга 1. Если $A_1, \dots, A_s$ — различные семейства ранга r , то $F = \{A_1, \dots, A_s\}$ называется семейством ранга $r + 1$. Семейства $A_1, \dots, A_s$ называются элементами семейства F . Множество всех семейств ранга r над X обозначается через $X^{(r)}$.

Для произвольного семейства F ранга r по индукции определены величины $|F|$ — мощность семейства F , $\|F\|$ — мультимощность семейства F , $f(F)$ — значение функционала на семействе F и множество $\langle F \rangle$ — основа семейства F . Если F — семейство ранга 1, то есть $F \subseteq X$, то $\|F\| = |F|$, где $|F|$ — число элементов множества F , $f(F)$ определяется

функциональной парой $I = (X, f)$, а $\langle F \rangle = F$. Пусть для некоторого $r \geq 1$ эти величины и множество определены, и пусть $F = \{A_1, \dots, A_s\}$ — семейство ранга $r + 1$. Тогда

$$|F| = s, \quad \|F\| = \sum_{1 \leq i \leq s} \|A_i\|, \quad f(F) = \prod_{1 \leq i \leq s} f(A_i), \quad \langle F \rangle = \bigcup_{1 \leq i \leq s} \langle A_i \rangle.$$

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара. Вершины u и v из X такие, что $f(\{u, v\}) > f(\{u\})f(\{v\})$, называются смежными (используется обозначение $u \# v$). Вершины u и v , для которых выполнено равенство $f(\{u, v\}) = f(\{u\})f(\{v\})$, называются несмежными (используется обозначение $u \parallel v$). Множества $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$ называются смежными (используется обозначение $A \# B$), если $f(A \cup B) > f(A)f(B)$. Множества A и B называются несмежными (используется обозначение $A \parallel B$), если $f(A \cup B) = f(A)f(B)$.

Граф $G_I = (X; E)$ с множеством ребер $E = \{\{u, v\}: u \# v\}$ называется графом функциональной пары $I = (X, f)$. Пусть $A \subseteq X$, $E' = \{\{u, v\} \in E: \{u, v\} \subseteq A\}$. Через $H_{G_I}(A) = (A; E')$ обозначается подграф графа G_I , порожденный множеством A .

Введем понятие связанного семейства ранга r . Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара. Для семейств ранга 1 связность определяется с помощью графа G_I функциональной пары I . Именно, непустое множество $F \subseteq X$ называется связным семейством ранга 1, если подграф $H_{G_I}(F)$ графа G_I , порожденный множеством F , связан.

Семейство $F = \{A_1, \dots, A_s\}$ ранга $r > 1$ называется связным, если каждое из A_i , $i = 1, \dots, s$, является связным семейством ранга, не превышающего $r - 1$, причем существует семейство A_i ранга $r - 1$, и $\langle F \rangle \in \mathcal{A}(I)$. Множество всех связных семейств ранга r обозначается через $\mathcal{A}^{(r)}(I)$. По определению $\mathcal{A}^{(1)}(I) = \mathcal{A}(I)$.

Для произвольного подсемейства $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$ определено семейство $\mathcal{B}^{(r)}$ связных подмножеств ранга r , порожденное множеством $\mathcal{B}$. Положим $\mathcal{B}^{(1)} = \mathcal{B}$. Если $\mathcal{B}^{(r-1)}$ определено, то

$$\mathcal{B}^{(r)} = 2^{\mathcal{B}^{(r-1)}} \cap \mathcal{A}^{(r)}(I).$$

Пусть $A \subseteq X$, множество $B \subseteq A$ называется компонентой связности множества A , если граф $H_{G_I}(B)$ является компонентой связности графа $H_{G_I}(A)$. Подсемейство B семейства F ранга r называется компонентой связности семейства F (используется обозначение $B \vdash F$), если $B \in \mathcal{A}^{(r)}(I)$ и $\langle B \rangle$ — компонента связности множества $\langle F \rangle$. Через $\eta(F)$ обозначается число компонент связности семейства F . Для функциональной пары I и натуральных j, k

$$\mathcal{A}_j(I) = \{A \in \mathcal{A}(I): |A| = j\}, \quad \mathcal{A}_k(I) = \bigcup_{j \leq k} \mathcal{A}_j(I).$$

Для натуральных r, j и $\mathcal{B} \subseteq X^{(r)}$

$$\mathcal{B}_{[j]} = \{B \in \mathcal{B}: \|B\| = j\}.$$

Если $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^{(r)}(I)$, то

$$C(\mathcal{B}) = \{F \subseteq X^{(r)}: A \vdash F \Rightarrow A \in \mathcal{B}\}, \quad C_j(\mathcal{B}) = \{F \in C(\mathcal{B}): \eta(F) = j\}.$$

Если $\mathcal{B} \subseteq X^{(r)}$, $B \in X^{(s)}$, $r, s \geq 1$, то

$$\mathcal{B}_B = \{A \in \mathcal{B}: \langle A \rangle \# \langle B \rangle\}, \quad \mathcal{B}_{\bar{B}} = \{A \in \mathcal{B}: \langle A \rangle \parallel \langle B \rangle\}.$$

Введем некоторые суммы граничных функционалов. Пусть ν, r, κ — натуральные числа и $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$ — произвольное семейство, тогда

$$\alpha^\nu(\mathfrak{B}^{(r)}) = \sum_{A \in \mathfrak{B}^{(r)}} f^\nu(A), \quad S(\mathfrak{B}) = \sum_{A \in C(\mathfrak{B})} f(A), \quad S_\kappa(\mathfrak{B}) = \sum_{A \in C_\kappa(\mathfrak{B})} f(A),$$

здесь и далее $f^\nu(A) = (f(A))^\nu$.

Приведем некоторые соотношения между суммами $\alpha^\nu(\mathfrak{B}^{(r)})$ и $S(\mathfrak{B})$, доказанные в [4]. Пусть $\mathfrak{D} = B^{(r-1)}$, тогда через $\mathfrak{D}'$ обозначим семейство $\mathfrak{B}^{(r)}$.

Лемма 1. Для любой функциональной пары $I = (X, f)$, любого натурального числа r и любого $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}^{(r)}(I)$

$$\prod_{A \in \mathfrak{B}} (1 + f(A)) = \sum_{B \in C(\mathfrak{B})} f(B) \sum_{D \in C(\mathfrak{B}'_B)} f(D).$$

Теорема 4.1 из [4] легко переносится на случай семейства ранга $r \geq 1$.

Теорема 2. Пусть r — натуральное число, функциональная пара $I = (X, f)$ и подсемейство $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}^{(r)}(I)$ таковы, что для некоторых положительных ψ и δ

$$\alpha^1(\mathfrak{B}') \leq \psi, \quad (3)$$

$$\alpha^2(\mathfrak{B}) \leq \delta. \quad (4)$$

Тогда

$$\exp\{\alpha^1(\mathfrak{B}) - \psi - \delta/2\} \leq S(\mathfrak{B}) \leq \exp\{\alpha^1(\mathfrak{B})\}.$$

Теорема 3. Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, подсемейство $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$ и положительные числа λ и ζ таковы, что

$$\alpha^1(\mathfrak{B}^{(3)}) \leq \lambda, \quad (5)$$

$$\alpha^2(\mathfrak{B}^{(2)}) \leq \zeta. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \exp\{-\alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)})\} \prod_{A \in \mathfrak{B}} (1 + f(A)) &\leq \sum_{B \in C(\mathfrak{B})} f(B) \exp\{-\alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}_B)\} \\ &\leq \exp\{-\alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}) + \lambda + \zeta/2\} \prod_{A \in \mathfrak{B}} (1 + f(A)). \end{aligned}$$

Доказательство. В силу леммы 1

$$\prod_{A \in \mathfrak{B}} (1 + f(A)) = \sum_{B \in C(\mathfrak{B})} f(B) \sum_{D \in C(\mathfrak{B}^{(2)}_B)} f(D). \quad (7)$$

Поскольку $\mathfrak{B}^{(2)}_B \subseteq \mathfrak{B}^{(2)}$, из теоремы 2 при $r = 2$, $\psi = \lambda$ и $\delta = \zeta$ следует, что

$$\exp\{\alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}_B) - \lambda - \zeta/2\} \leq \sum_{D \in C(\mathfrak{B}^{(2)}_B)} f(D) \leq \exp\{\alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}_B)\}. \quad (8)$$

Заметим что

$$\alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}_B) = \alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}) - \alpha^1(\mathfrak{B}^{(2)}_B). \quad (9)$$

Теперь из (7)–(9) следует утверждение теоремы.

Для $B \subseteq X$ положим $\pi(B) = \exp\{-\alpha^1(\mathcal{R}_B^{(2)})\}$ и

$$\tilde{S}(\mathcal{R}) = \sum_{B \in C(\mathcal{R})} f(B)\pi(B), \quad \tilde{S}_k(\mathcal{R}) = \sum_{B \in C_k(\mathcal{R})} f(B)\pi(B).$$

В данной работе будет получена асимптотика сумм $\tilde{S}(\mathcal{R})$ при выполнении условий (5), (6).

Лемма 2. Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}(I)$, $B, D \subseteq X$. Тогда

$$\pi(B)\pi(D) \leq \pi(B \cup D) \leq \pi(B). \quad (10)$$

Доказательство. Утверждение следует из определения $\pi(B)$ и из того, что

$$\alpha^1(\mathcal{R}_B^{(2)}) \leq \alpha^1(\mathcal{R}_{B \cup D}^{(2)}) = \alpha^1(\mathcal{R}_B^{(2)}) + \alpha^1(\mathcal{R}_D^{(2)}) - \alpha^1(\mathcal{R}_B^{(2)} \cap \mathcal{R}_D^{(2)}) \leq \alpha^1(\mathcal{R}_B^{(2)}) + \alpha^1(\mathcal{R}_D^{(2)}).$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть для функциональной пары $I = (X, f)$ и подсемейства $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}(I)$ выполнены условия теоремы 2, тогда

$$\exp\{\alpha^1(\mathcal{R}) - 2\psi - \delta/2\} \leq \tilde{S}(\mathcal{R}) \leq \exp\{\alpha^1(\mathcal{R})\}. \quad (11)$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 2 при $r = 1$ и того, что

$$S(\mathcal{R}) \exp\{-\alpha^1(\mathcal{R}^{(2)})\} \leq \tilde{S}(\mathcal{R}) \leq S(\mathcal{R}).$$

Теорема 4. Пусть даны функциональная пара $I = (X, f)$ и подсемейство $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}(I)$. Пусть $\alpha^1(\mathcal{R})$ достаточно велико, для положительных λ и ζ выполняются неравенства (5) и (6) и, кроме того, для положительного ξ

$$\alpha^4(\mathcal{R}) \leq \xi. \quad (12)$$

Тогда

$$\exp\{\mu(\mathcal{R}) - \xi/4\} \leq \tilde{S}(\mathcal{R}) \leq \exp\{\mu(\mathcal{R}) + \lambda + \zeta/2\}, \quad (13)$$

где

$$\mu(\mathcal{R}) = \alpha^1(\mathcal{R}) - \frac{1}{2} \alpha^2(\mathcal{R}) + \frac{1}{3} \alpha^3(\mathcal{R}) - \alpha^1(\mathcal{R}^{(2)}).$$

Доказательство. С использованием неравенства

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$

справедливого при $x > 0$, и условия (12) получаем, что

$$\begin{aligned} \prod_{A \in \mathcal{R}} (1 + f(A)) &= \exp \left\{ \sum_{A \in \mathcal{R}} \ln(1 + f(A)) \right\} \\ &\geq \exp \left\{ \sum_{A \in \mathcal{R}} \left(f(A) - \frac{1}{2} f^2(A) + \frac{1}{3} f^3(A) - \frac{1}{4} f^4(A) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \alpha^1(\mathcal{R}) - \frac{1}{2} \alpha^2(\mathcal{R}) + \frac{1}{3} \alpha^3(\mathcal{R}) - \frac{1}{4} \alpha^4(\mathcal{R}) \right\} \\ &\geq \exp \left\{ \alpha^1(\mathcal{R}) - \frac{1}{2} \alpha^2(\mathcal{R}) + \frac{1}{3} \alpha^3(\mathcal{R}) - \frac{\xi}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

С другой стороны, из неравенства

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geq \ln(1+x),$$

справедливого при $x > 0$, следует, что

$$\exp \left\{ \alpha^1(\mathcal{B}) - \frac{1}{2} \alpha^2(\mathcal{B}) + \frac{1}{3} \alpha^3(\mathcal{B}) \right\} \geq \prod_{A \in \mathcal{B}} (1 + f(A)). \quad (15)$$

Из (14), (15) и теоремы 3 вытекает (13).

3. Асимптотики $\tilde{S}(\mathcal{B})$ для ординарных функциональных пар

В [4] доказано, что условия теоремы 2 автоматически выполняются для ординарных функциональных пар (определение см. ниже). Там же получены асимптотики сумм $S(\mathcal{B})$ при $\Delta \leq 2$. В данном разделе эти результаты обобщаются на случай сумм $\tilde{S}(\mathcal{B})$ при $\Delta = 3$. Везде в дальнейшем Δ, x, q — натуральные числа, $c \geq 1$, x достаточно велико, $\log a = \log_2 a$.

Функциональная пара $I = (X, f)$ называется (Δ, x, q, c) -ординарной, если

(1) справедливо неравенство

$$|X| \leq 2^{(\Delta+1)x - 2 \log^2 x}, \quad (16)$$

(2) для всякого $v \in X$

$$f(\{v\}) \leq 2^{-x}, \quad (17)$$

(3) для любых $A \subseteq X$ и $v \in A$

$$f(A) \leq f(A \setminus \{v\}) f(\{v\}) 2^{(|A|-1)q}, \quad (18)$$

(4) для любого $v \in X$ и любого натурального числа m

$$|\mathcal{A}_{\{v\}, \hat{m}}(I)| \leq x^{cm}. \quad (19)$$

Если какие-либо из свойств (16)–(19) не выполняются для функциональной пары $I = (X, f)$, в соответствующих координатах ставятся прочерки. Например, если функциональная пара $I = (X, f)$ удовлетворяет свойствам (17) и (18), но, быть может, не удовлетворяет свойствам (16), (19), то такая пара называется $(-, x, q, -)$ -ординарной.

В [4] доказаны следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть $I = (X, f)$ является $(-, x, q, -)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\hat{m}}(I)$ и $A \in C(\mathcal{B})$. Тогда

$$f(A) \leq 2^{-|A|(x-q(m-1)/2)}. \quad (20)$$

Лемма 4. Пусть $I = (X, f)$ является $(-, \kappa, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $B \subseteq X$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\hat{m}}(I)$. Тогда для всех натуральных v, r, j

$$\alpha^v(\mathcal{B}_{B, [j]}^{(r)}) \leq |B| 8^{(r-1)j} \kappa^{crj} 2^{-j(\kappa-q(m-1)/2)v}. \quad (21)$$

Следствие 2. Пусть $I = (X, f)$ является (Δ, κ, q, c) -ординарной функциональной парой, v, r, j — произвольные фиксированные натуральные числа, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\hat{m}}(I)$, $m \leq [\kappa/(2q)]$, а κ достаточно велико. Тогда

$$\alpha^v(\mathcal{B}_{[j]}^{(r)}) \leq 2^{-(vj-(\Delta+1)\kappa-(3/2)\log^2 \kappa)} \quad (22)$$

при $j \leq (\log \kappa)/(3cr)$ и

$$\alpha^v(\mathcal{B}_{[j]}^{(r)}) \leq 2^{-v\kappa j/2} \quad (23)$$

при $j > (\log \kappa)/(3cr)$.

Докажем результаты для $\tilde{S}(\mathcal{B})$, аналогичные результатам для $S(\mathcal{B})$.

Лемма 5. Пусть $I = (X, f)$ является (Δ, κ, q, c) -ординарной функциональной парой, $r_0 = [\kappa/(2q)]$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\hat{r}_0}(I)$ и κ достаточно велико. Тогда

$$\tilde{S}(\mathcal{B}) = (1 + O(2^{-2\log^2 \kappa})) \tilde{S}(\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{\hat{\Delta}}(I)). \quad (24)$$

Доказательство. Положим $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{\hat{\Delta}}(I)$ и $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \setminus \hat{\mathcal{B}}$. С использованием (10), (22) и (23) с $r = 1$, $v = 1$ и теоремы 2 находим, что

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\hat{\mathcal{B}}) &\leq \tilde{S}(\mathcal{B}) = \tilde{S}(\hat{\mathcal{B}} \cup \bar{\mathcal{B}}) = \sum_{B \in C(\hat{\mathcal{B}})} f(B) \sum_{D \in C(\bar{\mathcal{B}})} f(D) \pi(B \cup D) \\ &\leq \sum_{B \in C(\hat{\mathcal{B}})} f(B) \pi(B) \sum_{D \in C(\bar{\mathcal{B}})} f(D) \leq \tilde{S}(\hat{\mathcal{B}}) \exp\{\alpha^1(\bar{\mathcal{B}})\} \leq (1 + O(2^{-2\log^2 \kappa})) \tilde{S}(\hat{\mathcal{B}}). \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, \kappa, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\hat{3}}(I)$. Тогда при достаточно больших κ

$$\tilde{S}(\mathcal{B}) = (1 + O(2^{-\log^2 \kappa})) \exp\{\mu(\mathcal{B})\}, \quad (25)$$

где

$$\mu(\mathcal{B}) = \alpha^1(\mathcal{B}) - \frac{1}{2} \alpha^2(\mathcal{B}) + \frac{1}{3} \alpha^3(\mathcal{B}) - \alpha^1(\mathcal{B}^{(2)}).$$

Доказательство. Предположим сначала, что

$$\alpha^1(\mathcal{B}) \geq \kappa, \quad (26)$$

и следовательно, $\alpha^1(\mathcal{B})$ достаточно велико. Воспользуемся теоремой 4. Для этого докажем, что условия (5), (6) и (12) выполнены соответственно при $\lambda = \zeta = 2^{-\log^2 \kappa}$ и $\xi = 2^{-(3/2)\log^2 \kappa}$. Тогда (25) будет следовать из (13).

Проверим выполнение условия (5). Положим $j_0 = (\log \kappa)/(3cr)$. В силу (22) и (23) с $r = 3$ при достаточно больших κ

$$\alpha^1(\mathcal{B}^{(3)}) = \sum_{j \geq 4} \alpha^1(\mathcal{B}_{[j]}^{(3)}) \leq \sum_{4 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-4)\kappa-(3/2)\log^2 \kappa} + \sum_{j > j_0} 2^{-j\kappa/2} \leq 2^{-\log^2 \kappa}. \quad (27)$$

Отсюда вытекает (19) с $\lambda = 2^{-\log^2 x}$.

Докажем выполнение условия (6) при $\zeta = 2^{-\log^2 x}$. В силу (22) и (23) при $v = 2$, $r = 2$, $\Delta = 3$

$$\alpha^2(\mathcal{B}^{(2)}) = \sum_{j \geq 2} \alpha^2(\mathcal{B}_{[j]}^{(2)}) \leq \sum_{2 \leq j \leq j_0} 2^{-(2j-4)x - (3/2)\log^2 x} + \sum_{j > j_0} 2^{-jx} \leq 2^{-\log^2 x}. \quad (28)$$

Докажем выполнение условия (12). Оценим $\alpha^1(\mathcal{B})$ сверху. Заметим, что в силу (16)–(18) и (19) с $m = 1$ и $\Delta = 3$

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}) &= \sum_{A \in \mathcal{B}} f(A) \leq \sum_{A \in \mathcal{A}_3(I)} f(A) = \sum_{A \in \mathcal{A}_1(I)} f(A) + \sum_{A \in \mathcal{A}_2(I)} f(A) + \sum_{A \in \mathcal{A}_3(I)} f(A) \\ &\leq \sum_{v \in X} f(\{v\}) + \sum_{v \in X} \sum_{\{u\} \# \{v\}} f(\{u, v\}) + \sum_{v \in X} \sum_{\{u, w\} \# \{v\}} f(\{u, v, w\}) \\ &\leq |X|2^{-x} + |X|x^c 2^{-2x+q} + |X|x^{2c} 2^{-3x+2q} \\ &\leq 2^{3x-2\log^2 x} + x^c 2^{2x+q} + x^{2c} 2^{x+2q} \leq 2^{3x-(3/2)\log^2 x}. \end{aligned} \quad (29)$$

С использованием (29) и (17) при $\Delta = 3$ находим, что

$$\alpha^4(\mathcal{B}) \leq \alpha^1(\mathcal{B}) 2^{-3x} \leq 2^{-3x} 2^{3x-(3/2)\log^2 x} \leq 2^{-(3/2)\log^2 x}. \quad (30)$$

Отсюда следует (12) с $\xi = 2^{-(3/2)\log^2 x}$. Таким образом, условия теоремы 4 выполнены при указанных значениях параметров λ , ζ и ξ . Теперь из (13), (27)–(30) вытекает (25), а значит, утверждение доказано при условии (26).

Пусть теперь

$$\alpha^1(\mathcal{B}) < x. \quad (31)$$

Покажем, что тогда выполнены условия следствия 1 при соответствующих ψ и δ , и (25) будет следовать из (11). Проверим выполнение условия (3). Заметим, что в силу (17) и (31) при достаточно больших x

$$\alpha^1(\mathcal{B}_{[2]}^{(2)}) = \sum_{\{u\} \in \mathcal{B}} f(\{u\}) \sum_{\{v\} \in \mathcal{B}: \{v\} \# \{u\}} f(\{v\}) \leq \alpha^1(\mathcal{B}) x^c 2^{-x} \leq x^{c+1} 2^{-x}. \quad (32)$$

Аналогично с использованием (17) и (18) получаем, что

$$\alpha^1(\mathcal{B}_{[3]}^{(2)}) \leq (2^q + 1) x^{2c+1} 2^{-2x}, \quad (33)$$

$$\alpha^1(\mathcal{B}_{[4]}^{(2)}) \leq 3 \cdot 2^q x^{3c+1} 2^{-3x}. \quad (34)$$

Оценивая $\alpha^1(\mathcal{B}_{[j]}^{(2)})$ при $j > 4$ с помощью (22) и (23), с учетом (32)–(34) находим, что

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}^{(2)}) &= \sum_{j \geq 2} \alpha^1(\mathcal{B}_{[j]}^{(2)}) \leq x^{c+1} 2^{-x} + (2^q + 1) x^{2c+1} 2^{-2x} + 3 \cdot 2^q x^{3c+1} 2^{-3x} \\ &\quad + \sum_{5 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-4)x - (3/2)\log^2 x} + \sum_{j > j_0} 2^{-jx/2} \leq 2 \cdot 2^{-x} x^{c+1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда вытекает (3) с $\psi = 2 \cdot 2^{-x} x^{c+1}$.

Проверим выполнение условия (4). Для любого $A \in \mathcal{A}_3(I)$ из (20) следует, что

$$f(A) \leq 2^{-|A|(x-q)} \leq 2^{-x+q},$$

поэтому

$$f^2(A) \leq f(A)2^{-x+q}.$$

С учетом (31) получаем, что

$$\alpha^2(\mathcal{B}) = \sum_{A \in \mathcal{B}} f^2(A) \leq \alpha^1(\mathcal{B})2^{-x+q} \leq x2^{-x+q}.$$

Отсюда вытекает справедливость условия (4) с $\delta = x2^{-x+q}$. В силу (11) с учетом (3), (4) и (35) получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\mathcal{B}) &= (1 + O(2^{-x} x^{c+1})) \exp\{\alpha^1(\mathcal{B})\} \\ &= (1 + O(2^{-x} x^{c+1})) \exp\left\{\alpha^1(\mathcal{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathcal{B}) + \frac{1}{3}\alpha^3(\mathcal{B}) - \alpha^1(\mathcal{B}^{(2)})\right\}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано при условии (31).

Замечание 1. Из доказательства теоремы ясно, что при $\alpha^1(\mathcal{B}) < x$ выполнены условия теоремы 2 с $r = 1$, следовательно,

$$S(\mathcal{B}) = (1 + O(2^{-\log^2 x})) \exp\{\mu(\mathcal{B})\}.$$

Поэтому везде в дальнейшем считаем, что $\alpha^1(\mathcal{B}) \geq x$, то есть достаточно велико.

Положим для краткости

$$\mathcal{B}_{[2,3]}^{(2)} = \mathcal{B}_{[2]}^{(2)} \cup \mathcal{B}_{[3]}^{(2)},$$

а также

$$\mu_3(\mathcal{B}) = \alpha^1(\mathcal{B}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathcal{B}) + \frac{1}{3}\alpha^3(\mathcal{B}) - \alpha^1(\mathcal{B}_{[2,3]}^{(2)}).$$

Следствие 3. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, x, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_3(I)$. Тогда при достаточно больших x

$$\tilde{S}(\mathcal{B}) = (1 + O(2^{-\log^2 x})) \exp\{\mu_3(\mathcal{B})\}. \quad (36)$$

Доказательство. Положим $j_0 = 1/(3cr)$. В силу (22) и (23) с $r = 2$ и $\Delta = 3$ при достаточно больших x

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}^{(2)}) - \alpha^1(\mathcal{B}_{[2,3]}^{(2)}) &= \sum_{j \geq 4} \alpha^1(\mathcal{B}_{[j]}^{(2)}) \\ &\leq \sum_{4 \leq j \leq j_0} 2^{-(j-4)x - (3/2)\log^2 x} + \sum_{j > j_0} 2^{-jx/2} \leq 2^{1-(3/2)\log^2 x}. \end{aligned} \quad (37)$$

Теперь (36) следует из (24) и (37).

Следствие 4. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, x, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $r_0 = \lceil x/(2q) \rceil$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\hat{r}_0}(I)$, $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_3(I)$. Тогда при достаточно больших x

$$\tilde{S}(\mathcal{B}) = (1 + O(2^{-\log^2 x})) \exp\{\mu_3(\hat{\mathcal{B}})\}.$$

Утверждение вытекает из леммы 5 при $\Delta = 3$ и из (36).

4. Ограниченные последовательности

В предыдущем разделе была получена асимптотика сумм $\tilde{S}(\mathfrak{R})$. В следующих разделах будет найдена оценка $\pi(B)$ и установлена связь между суммами $\tilde{S}(\mathfrak{R})$ и $S(\mathfrak{R})$.

В [3] было введено понятие α_n -ограниченной последовательности. Если последовательность является ограниченной, то сумма последовательности приближается суммой типичных членов последовательности. В данном разделе доказывается, что последовательность $\tilde{S}_k(\mathfrak{R})$ является $\alpha^1(\mathfrak{R})$ -ограниченной.

Последовательность $\{\sigma_{n,j}\}_{n,j=0}^{\infty}$ называется α_n -ограниченной, если при любом j выполняется неравенство

$$(j+1)\sigma_{n,j+1} \leq \sigma_{n,j}\alpha_n.$$

Для α_n -ограниченных последовательностей справедливы следующие утверждения, доказанные в [3].

Теорема 6. Пусть последовательность $\{\sigma_{n,j}\}_{n,j=0}^{\infty}$ является α_n -ограниченной,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty, \quad \theta_n = \alpha_n + \omega_n \sqrt{\alpha_n}, \quad \sigma_n = \sum_{j \geq 0} \sigma_{n,j}, \quad \alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j},$$

$$\beta_n = \min_{j \leq \theta_n} \{\alpha_{n,j}\}, \quad \tau_n = \beta_n - \omega_n \sqrt{\beta_n}, \quad \tilde{\sigma}_n = \sum_{\tau_n \leq j \leq \theta_n} \sigma_{n,j}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{\sigma}_n = \sigma_n(1 - \varepsilon_n),$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

При этом $\varepsilon_n = O(e^{-\omega_n^2/4})$, если $\omega_n \leq \sqrt{\alpha_n}$, и $\varepsilon_n = O(\omega_n^{-1} e^{-\omega_n^2/2})$, если $\omega_n = o((\alpha_n)^{1/6})$.

Следствие 5. Пусть выполнены условия теоремы 6 и $\omega_n = o((\alpha_n)^{1/6})$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_n = \tilde{\sigma}_n(1 + O(\omega_n^{-1} e^{-\omega_n^2/2})).$$

Пусть функционал $\pi: 2^X \rightarrow (0, 1]$ удовлетворяет условию (10). В дальнейшем для краткости полагаем

$$\sigma = \tilde{S}(\mathfrak{R}) = \sum_{A \in C(\mathfrak{R})} f(A)\pi(A), \quad \sigma_k = \tilde{S}_k(\mathfrak{R}) = \sum_{A \in C_k(\mathfrak{R})} f(A)\pi(A).$$

Лемма 6. Для любой функциональной пары $I = (X, f)$ и любого целого числа $k \geq 0$

$$(k+1) \sum_{A \in C_{k+1}(\mathfrak{R})} f(A)\pi(A) = \sum_{B \in C_k(\mathfrak{R})} f(B) \sum_{D \in \mathfrak{R}_{\bar{B}}} f(D)\pi(B \cup D). \quad (38)$$

Доказательство. Правая часть (38) равна сумме произведений $f(B)f(D)\pi(B \cup D)$ по всем упорядоченным парам (B, D) таким, что $B \in C_k(\mathfrak{R})$, $D \in \mathfrak{R}_{\bar{B}}$. Для каждой такой пары множество $A = B \cup D$ принадлежит семейству $C_{k+1}(\mathfrak{R})$. При этом

$$f(A)\pi(A) = f(B \cup D)\pi(B \cup D) = f(B)f(D)\pi(B \cup D).$$

Таким образом, каждая пара (B, D) определяет множество $A \in C_{k+1}(\mathfrak{R})$, причем каждое множество A порождается $k+1$ раз. Отсюда следует (38).

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, $A \subseteq X$, $\mathcal{N} \subseteq 2^X$. Через $\eta_{\mathcal{N}}(A)$ обозначим число компонент множества A , принадлежащих семейству $\mathcal{N}$. Если k — натуральное число, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$, то положим

$$C_k(\mathcal{B} \mid \mathcal{N}) = \{A \in C(\mathcal{B}) : \eta_{\mathcal{N}}(A) = k\}.$$

Для натуральных $\tau \leq \theta$ положим для краткости

$$C_{[\tau, \theta]}(\mathcal{B} \mid \mathcal{N}) = \bigcup_{\tau \leq j \leq \theta} C_j(\mathcal{B} \mid \mathcal{N}).$$

Лемма 7. Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$. Пусть $\alpha_1 = \alpha^1(\mathcal{B}_1)$ достаточно велико. Пусть также

$$\theta_1 = \alpha_1 + \alpha_1^{9/14}, \quad \beta_1 = \min_{j \leq \theta_1} \{(j+1)\tilde{S}_{j+1}(\mathcal{B}_1)/\tilde{S}_j(\mathcal{B}_1)\}, \quad \tau_1 = \beta_1 - \alpha_1^{1/7} \sqrt{\beta_1}.$$

Тогда

$$\tilde{S}(\mathcal{B}) = (1 + O(\alpha_1^{-1/7} e^{-\alpha_1^{2/7}/2})) \sum_{B \in C_{[\tau_1, \theta_1]}(\mathcal{B} \mid \mathcal{B}_1)} f(B) \pi(B). \quad (39)$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся следствием 5. Положим $\sigma_k(\mathcal{B}_1) = \sum_{B \in C_k(\mathcal{B} \mid \mathcal{B}_1)} f(B) \pi(B)$. Покажем, что последовательность $\{\sigma_k(\mathcal{B}_1)\}_{k=1}^{\infty}$ является α_1 -ограниченной. В самом деле, аналогично тому, как было получено (38), с использованием (10) получаем, что

$$\begin{aligned} (k+1) \sum_{B \in C_{k+1}(\mathcal{B} \mid \mathcal{B}_1)} f(B) \pi(B) &= \sum_{B \in C_k(\mathcal{B} \mid \mathcal{B}_1)} f(B) \sum_{C \in \mathcal{B}_{1\bar{B}}} f(C) \pi(B \cup C) \\ &\leq \sum_{B \in C_k(\mathcal{B} \mid \mathcal{B}_1)} f(B) \pi(B) \sum_{C \in \mathcal{B}_{1\bar{B}}} f(C) \\ &\leq \alpha^1(\mathcal{B}_1) \sum_{B \in C_k(\mathcal{B} \mid \mathcal{B}_1)} f(B) \pi(B). \end{aligned}$$

Отсюда следует (39).

Теорема 7. Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара. Пусть семейства $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(I)$ и $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$ таковы, что $\alpha_1 = \alpha^1(\mathcal{B}_1)$ и $\alpha_2 = \alpha^1(\mathcal{B}_2)$ достаточно велики. Пусть также

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha_1 + \alpha_1^{9/14}, \quad \beta_1 = \min_{j \leq \theta_1} \{(j+1)\tilde{S}_{j+1}(\mathcal{B}_1)/\tilde{S}_j(\mathcal{B}_1)\}, \quad \tau_1 = \beta_1 - \alpha_1^{1/7} \sqrt{\beta_1}, \\ \theta_2 &= \alpha_2 + \alpha_2^{9/14}, \quad \beta_2 = \min_{j \leq \theta_2} \{(j+1)\tilde{S}_{j+1}(\mathcal{B}_2)/\tilde{S}_j(\mathcal{B}_2)\}, \quad \tau_2 = \beta_2 - \alpha_2^{1/7} \sqrt{\beta_2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tilde{S}(\mathcal{B}) = (1 + O(\alpha_1^{-1/7} e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + \alpha_2^{-1/7} e^{-\alpha_2^{2/7}/2})) \sum_{B \in C_{[\tau_1, \theta_1]}(\mathcal{B} \mid \mathcal{B}_1) \cap C_{[\tau_2, \theta_2]}(\mathcal{B} \mid \mathcal{B}_2)} f(B) \pi(B). \quad (40)$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся следствием 5. Заметим, что

$$\sum_{B \in C_{[\tau_1, \theta_1]}(\mathfrak{B}|B_1)} f(B) = \sum_{A \in C(\mathfrak{B}_2)} f(A) \sum_{C \in C_{[\tau_1, \theta_1]}(\mathfrak{B}_1 \bar{A})} f(C) \pi(A \cup C).$$

Положим

$$\sigma_k(\mathfrak{B}_2) = \sum_{A \in C_k(\mathfrak{B}_2)} f(A) \sum_{C \in C_{[\tau_1, \theta_1]}(\mathfrak{B}_1 \bar{A})} f(C) \pi(A \cup C).$$

Покажем, что последовательность $\{\sigma_k(\mathfrak{B}_2)\}_{k=1}^{\infty}$ является α_2 -ограниченной. Аналогично тому, как было получено (38), с использованием (10) находим, что

$$\begin{aligned} (k+1) \sum_{A \in C_{k+1}(\mathfrak{B}_2)} f(A) \sum_{C \in C_{[\tau_1, \theta_1]}(\mathfrak{B}_1 \bar{A})} f(C) \pi(A \cup C) \\ = \sum_{A \in C_k(\mathfrak{B}_2)} f(A) \sum_{B \in \mathfrak{B}_2 \bar{A}} f(B) \sum_{C \in C_{[\tau_1, \theta_1]}(\mathfrak{B}_1 \overline{A \cup B})} f(C) \pi(A \cup B \cup C) \\ \leq \sum_{A \in C_k(\mathfrak{B}_2)} f(A) \sum_{B \in \mathfrak{B}_2} f(B) \sum_{C \in C_{[\tau_1, \theta_1]}(\mathfrak{B}_1 \bar{A})} f(C) \pi(A \cup C) \\ = \alpha^1(\mathfrak{B}_2) \sum_{A \in C_k(\mathfrak{B}_2)} f(A) \sum_{C \in C_{[\tau_1, \theta_1]}(\mathfrak{B}_1 \bar{A})} f(C) \pi(A \cup C). \end{aligned}$$

Отсюда и из (39) следует (40).

5. Оценки $\tilde{S}(\mathfrak{B})$ для d -связных множеств

В данном разделе получена оценка $\pi(B)$ для множеств, d -компоненты которых имеют мощность, большую 1 (лемма 12). Это позволит при оценке $\pi(B)$ ограничиться рассмотрением только тех множеств, компоненты которых имеют мощность 1 и находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга.

Пусть $\rho_G(u, v)$ — расстояние в графе G между вершинами u и v . Последовательность $(w_0, w_1, \dots, w_k)$ называется d -цепью длины k , соединяющей u и v , если $u = w_0$, $v = w_k$ и $\rho_G(w_{i-1}, w_i) \leq d$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Подмножество $A \subseteq X$ называется d -связным, если для любых u, v из A существует d -цепь, состоящая из элементов множества A и соединяющая u и v .

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара. Множество всех d -связных подмножеств вершин графа G_I обозначается через $\mathcal{A}^d(I)$. Положим

$$\mathcal{A}_k^d(I) = \{A \in \mathcal{A}^d(I) : |A| = k\}, \quad \mathcal{A}_k^d(I) = \bigcup_{i \leq k} \mathcal{A}_i^d(I).$$

Подмножество $B \subseteq A$ называется d -компонентой множества A (используется обозначение $B \vdash_d A$), если $B \in \mathcal{A}^d(I)$, но для любого $D \in \mathcal{A}^d(I)$ неверно, что $B \subset D \subseteq A$. Если $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{A}^d(I)$, то положим

$$\begin{aligned} C^d(\mathfrak{D}) &= \{A \subseteq X : B \vdash_d A \Rightarrow B \in \mathfrak{D}\}, \\ \alpha^{1,d}(\mathfrak{D}) &= \sum_{B \in \mathfrak{D}} f(B), \quad \tilde{S}^d(\mathfrak{D}) = \sum_{B \in C^d(\mathfrak{D})} f(B) \pi(B). \end{aligned}$$

Через $\eta^d(A)$ обозначается число d -компонент множества A . Для $\mathcal{D} \subseteq A^d(I)$ положим

$$C_k^d(\mathcal{D}) = \{A \in C^d(\mathcal{D}) : \eta^d(A) = k\}.$$

Для $\mathcal{B} \subseteq A(I)$ положим

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{(d,1)} &= C(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}^d(I), \\ \mathcal{B}_{(-,\Delta)}^{(d,1)} &= \{A \in \mathcal{B}^{(d,1)} : B \vdash A \Rightarrow B \in \mathcal{B}, |B| = \Delta\}, \\ \mathcal{B}_{(-,\hat{\Delta})}^{(d,1)} &= \{A \in \mathcal{B}^{(d,1)} : B \vdash A \Rightarrow B \in \mathcal{B}, |B| \leq \Delta\}, \\ \mathcal{B}_{(k,-)}^{(d,1)} &= \{A \in \mathcal{B}^{(d,1)} : |A| = k\}, \\ \mathcal{B}_{(\hat{k},-)}^{(d,1)} &= \bigcup_{j \leq k} \mathcal{B}_{(j,-)}^{(d,1)}, \\ \mathcal{B}_{(\bar{k},-)}^{(d,1)} &= \mathcal{B}^{(d,1)} \setminus \mathcal{B}_{(\hat{k},-)}^{(d,1)}, \\ \mathcal{B}_{(k,\Delta)}^{(d,1)} &= \mathcal{B}_{(-,\Delta)}^{(d,1)} \cap \mathcal{B}_{(k,-)}^{(d,1)}.\end{aligned}$$

Для $v \in X$ положим

$$\mathcal{A}_{\{v\},j}^d(I) = \{A \in \mathcal{A}^d(I) : |A| = j, A \# \{v\}\}.$$

Лемма 8. Пусть функциональная пара $I = (X, f)$ такова, что для всякого $v \in X$, всякого натурального t и некоторого натурального c

$$|\mathcal{A}_{\{v\},\hat{m}}^d(I)| \leq \kappa^{cm}.$$

Тогда для всех натуральных d и j

$$|\mathcal{A}_{\{v\},j}^d(I)| \leq \kappa^{cdj}.$$

Доказательство. Заметим, что $B \in \mathcal{A}_{\{v\},j}^d(I)$ означает, что существует вершина $u \in B$ такая, что $u \# v$, то есть $\rho_{G_I}(u, v) = 1$, и что множество B является d -связным. Для выбора множества $B \in \mathcal{A}_{\{v\},j}^d(I)$ достаточно указать вершину $u \in X$ такую, что $\rho_{G_I}(u, v) = 1$, и d -связное множество B такое, что $u \in B$.

Пусть $n_d(\{u\}, a)$ — число всех d -связных множеств $A \subseteq X$ таких, что $|A| = a$ и $u \in A$. Каждая вершина $u \in X$ соединена в графе G_I с вершинами из множества $\mathcal{A}_{\{u\},1}$, а по условию число таких вершин не превышает κ^c . Таким образом, граф G_I удовлетворяет условиям леммы 6.1 из [4] с $\sigma = \kappa^c$, и следовательно,

$$n_d(\{u\}, a) \leq (4\kappa^{cd})^{a-1}.$$

Для заданной вершины $v \in X$ вершину $u \in X$ такую, что $\rho_{G_I}(u, v)$, можно выбрать не более, чем κ^c способами, следовательно, при достаточно больших κ

$$|\mathcal{A}_{\{v\},j}^d(I)| \leq (4\kappa^{cd})^{j-1} \kappa^c \leq \kappa^{cdj}.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть $I = (X, f)$ является (Δ, κ, q, c) -ординарной функциональной парой, d — натуральное число, $r_0 = \lceil \kappa/(2q) \rceil$, $\mathcal{B} \subseteq A_{\hat{r}_0}(I)$. Тогда

$$\alpha^{1,d}(\mathcal{B}_{(\hat{\Delta},-)}^{(d,1)}) \leq 2^{-\log^2 \kappa}. \quad (41)$$

Доказательство. При $j \geq \Delta + 1$ из леммы 8 и (20) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha^{1,d}(\mathcal{R}_{(j,-)}^{(d,1)}) &= \alpha^{1,d}(\mathcal{R}_{(j,\hat{r}_0)}^{(d,1)}) = \sum_{B \in C(\mathcal{R}) \cap \mathcal{A}_j^d(I)} f(B) \\ &\leq \sum_{v \in X} \sum_{B \in C(\mathcal{R}) \cap \mathcal{A}_{\{v\},j}^d(I)} f(B) \leq \sum_{v \in X} |\mathcal{A}_{\{v\},j}^d(I)| 2^{-j(\kappa - q(r_0 - 1)/2)} \\ &\leq |X| \chi^{cdj} 2^{-j\kappa + qjr_0/2} \leq 2^{-\kappa(j - \Delta - 1) - 2 \log^2 \kappa} \chi^{cdj} 2^{qjr_0/2}. \end{aligned}$$

Положим $j_0 = 1/(3cd)$. Аналогично тому, как были получены (22), (23) (см. следствие 5.6 в работе [4]), находим, что

$$\begin{aligned} \alpha^{1,d}(\mathcal{R}_{(\Delta,-)}^{(d,1)}) &= \sum_{\Delta+1 \leq j} \alpha^{1,d}(\mathcal{R}_{(j,-)}^{(d,1)}) \\ &\leq \sum_{\Delta+1 \leq j \leq j_0} 2^{-\kappa(j - \Delta - 1) - (3/2) \log^2 \kappa} + \sum_{j_0 \leq j} 2^{-\kappa j/2} \leq 2^{-\log^2 \kappa}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть $I = (X, f)$ является (Δ, κ, q, c) -ординарной функциональной парой, $r_0 = \lceil \kappa/(2q) \rceil$, $\mathcal{R} \subseteq A_{r_0}(I)$, d — натуральное число. Тогда

$$\tilde{S}(\mathcal{R}) = (1 + O(2^{-\log^2 \kappa})) \tilde{S}^d(\mathcal{R}_{(\hat{\Delta}, \hat{\Delta})}^{(d,1)}).$$

Доказательство. Поскольку

$$C(\mathcal{R}) = C^d(C(\mathcal{R}) \cap \mathcal{A}^d(I)) = C^d(\mathcal{R}^{(d,1)}),$$

то

$$\tilde{S}(\mathcal{R}) = \tilde{S}^d(\mathcal{R}^{(d,1)}).$$

Аналогично тому, как это сделано при доказательстве леммы 5, из (41) получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{S}^d(\mathcal{R}_{(\hat{\Delta}, \hat{\Delta})}^{(d,1)}) &\leq \tilde{S}(\mathcal{R}) = \tilde{S}^d(\mathcal{R}^{(d,1)}) = \tilde{S}^d(\mathcal{R}_{(\hat{\Delta}, \hat{\Delta})}^{(d,1)} \cup \mathcal{R}_{(\hat{\Delta}, -)}^{(d,1)}) \\ &\leq \tilde{S}^d(\mathcal{R}_{(\hat{\Delta}, \hat{\Delta})}^{(d,1)}) \exp\{\alpha^{1,d}(\mathcal{R}_{(\hat{\Delta}, -)}^{(d,1)})\} \leq (1 + O(2^{-\log^2 \kappa})) \tilde{S}^d(\mathcal{R}_{(\hat{\Delta}, \hat{\Delta})}^{(d,1)}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для $\mathcal{D} \subseteq A^d(I)$, целого j и $B \subseteq \mathcal{D}$ положим

$$\sigma_j^d = \tilde{S}_j^d(\mathcal{D}) = \sum_{B \in C_j^d(\mathcal{D})} f(B) \pi(B),$$

$$\mathcal{D}_{[j]} = \{B \in \mathcal{D} : |B| = j\}, \quad \mathcal{D}_B = \{C \in \mathcal{D} : (B \cup C) \in \mathcal{A}^d(I)\}.$$

Лемма 11. Пусть $I = (X, f)$ является $(-, \kappa, -, c)$ -ординарной функциональной парой, t, d — натуральные числа,

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}(I), \quad \mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}_{(i,-)}^{(d,1)}, \quad \alpha = \alpha^{1,d}(\mathcal{D}), \quad \theta = \alpha + \alpha^{9/14}, \quad \beta = \min_{j \leq \theta} \{(j+1)\sigma_{j+1}^d / \sigma_j^d\},$$

Тогда существует положительное число ε_1 такое, что

$$\beta \geq \alpha(1 - \varepsilon_1 2^{-\kappa} \chi^{cd}).$$

Доказательство. Оценим $(j+1)\sigma_{j+1}^d/\sigma_j^d$ при $j \leq \theta$. Аналогично тому, как было получено (38), из (10) находим, что

$$\begin{aligned} (j+1) \sum_{B \in C_{j+1}^d(\mathcal{D})} f(B)\pi(B) &= \sum_{B \in C_j^d(\mathcal{D})} f(B) \sum_{D \in \mathcal{D}_{\bar{B}}} f(D)\pi(B \cup D) \\ &\geq \sum_{B \in C_j^d(\mathcal{D})} f(B)\pi(B) \sum_{D \in \mathcal{D}_{\bar{B}}} f(D)\pi(D). \end{aligned} \quad (42)$$

Заметим, что если $D \in \mathcal{D}_{\bar{B}} \subseteq \mathcal{R}_{\langle \hat{t}, - \rangle}^{(d,1)}$, то $|D| \leq t$. Воспользуемся (21) с $m = t$, $r = 2$ и $\nu = 1$:

$$\alpha^1(\mathcal{R}_D^{(2)}) = \sum_{j \geq 2} \alpha^1(\mathcal{R}_{D, \{j\}}^{(2)}) \leq |D| \sum_{j \geq 2} 2^{-jx+jqt/2+3j} \chi^{2jc} \leq 2t 2^{-2x+qt+6} \chi^{4c}.$$

Следовательно,

$$\pi(D) \geq \exp\{-t 2^{-2x+qt+7} \chi^{4c}\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{B \in C_j^d(\mathcal{D})} f(B)\pi(B) \sum_{D \in \mathcal{D}_{\bar{B}}} f(D)\pi(D) &= (1 + O(2^{-2x} \chi^{4c})) \sum_{B \in C_j^d(\mathcal{D})} f(B)\pi(B) \alpha^{1,d}(\mathcal{D}_{\bar{B}}) \\ &= \left(\sum_{B \in C_j^d(\mathcal{D})} f(B)\pi(B) \alpha^{1,d}(\mathcal{D}) - \sum_{B \in C_j^d(\mathcal{D})} f(B)\pi(B) \alpha^{1,d}(\mathcal{D}_B) \right) (1 + O(2^{-2x} \chi^{4c})) \end{aligned} \quad (43)$$

Оценим $\alpha^{1,d}(\mathcal{D}_B)$ при $B \in C_j^d(\mathcal{D})$. Множество B состоит не более, чем из θ d -компонент, каждая компонента имеет мощность, не превосходящую t . Поскольку $\alpha > 1$, то $\theta \leq 2\alpha$, и следовательно, $|B| \leq t\theta \leq 2t \alpha^{1,d}(\mathcal{D})$. Аналогично (21) с $m = t$, $r = 1$ и $\nu = 1$

$$\begin{aligned} \alpha^{1,d}(\mathcal{D}_B) &= \sum_{j \geq 1} \alpha^{1,d}(\mathcal{D}_{B, \{j\}}) \leq |B| \sum_{j \geq 1} \chi^{cdj} 2^{-jx+jqt/2} \\ &\leq 2|B| 2^{-x+qt/2} \chi^{cd} \leq 4t 2^{-x+qt/2} \chi^{cd} \alpha^{1,d}(\mathcal{D}). \end{aligned} \quad (44)$$

При $j \leq \theta$ для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ из (42)–(44) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{(j+1)\sigma_{j+1}}{\sigma_j} &\geq \left(\alpha^{1,d}(\mathcal{D}) - \sum_{B \in C_j^d(\mathcal{D})} f(B)\pi(B) \alpha^{1,d}(\mathcal{D}_B) \right) / \sum_{B \in C_j^d(\mathcal{D})} f(B)\pi(B) \\ &\quad \times (1 + O(2^{-2x} \chi^{4c})) \\ &\geq \alpha^{1,d}(\mathcal{D}) (1 - \varepsilon_1 2^{-x} \chi^{cd}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 6. Пусть $I = (X, f)$ является $(-, \chi, -, c)$ -ординарной функциональной парой, t, d — натуральные числа,

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}(I), \quad \mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}_{\langle \hat{t}, - \rangle}^{(d,1)}, \quad \alpha = \alpha^{1,d}(\mathcal{D}), \quad \theta = \alpha + \alpha^{9/14}, \quad \beta = \min_{j \leq \theta} \{(j+1)\sigma_{j+1}^d/\sigma_j^d\}.$$

Пусть $\tau = \beta - \alpha^{1/7} \sqrt{\beta}$, тогда существует положительное число ε_2 такое, что

$$(\alpha - \alpha^{9/14})(1 - \varepsilon_2 2^{-x} x^{cd}) \leq \tau \leq (\alpha - \alpha^{9/14}).$$

Доказательство. Заметим, что функция $x - \alpha^{1/7} \sqrt{x}$ возрастает при $x \geq \alpha^{2/7}$ и $\alpha \geq 1$. В силу леммы 11 найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$\tau = \beta - \alpha^{1/7} \geq \alpha(1 - \varepsilon_1 2^{-x} x^{cd}) - \alpha^{9/4} \sqrt{1 - \varepsilon_1 2^{-x} x^{cd}}. \quad (45)$$

С использованием неравенства $\sqrt{1-y} \leq 1-y/2$ нетрудно проверить, что при $\alpha \geq 1$

$$\alpha^{9/4} \sqrt{1 - \varepsilon_1 2^{-x} x^{cd}} \geq (\alpha - \alpha^{9/14})(1 - \varepsilon_2 2^{-x} x^{cd}),$$

где $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1/2$. Отсюда и из (45) следует утверждение.

Лемма 12. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, x, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_3(I)$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}_{(3,3)}^{(d,1)} \setminus \mathcal{B}_{(1,1)}^{(d,1)}$. Пусть $\alpha = \alpha^{1,d}(\mathcal{D})$, $\theta = \alpha + \alpha^{9/14}$. Пусть также $B \in C_{[1,\theta]}^d(\mathcal{D})$. Тогда при достаточно больших x

$$1 - 2^{-(1/2) \log^2 x} \leq \pi(B) = \exp\{-\alpha(\mathcal{B}_B^{(2)})\} \leq 1.$$

Доказательство. Второе неравенство очевидно. Докажем первое неравенство. Из включения $B \in C_{[1,\theta]}^d(\mathcal{D})$ следует, что B состоит не более, чем из θ d -компонент, и каждая компонента содержит не более трех элементов. Поскольку $\alpha > 1$, то $\theta \leq 2\alpha$, следовательно, $|B| \leq 3\theta \leq 6\alpha$.

Воспользуемся (21) с $m = 3$, $r = 2$, $v = 1$

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}_B^{(2)}) &= \sum_{j \geq 2} \alpha^1(\mathcal{B}_{B, [j]}^{(2)}) \leq |B| \sum_{j \geq 2} 2^{-jx+jq+3j} x^{2cj} \\ &\leq 2|B| 2^{-2x+2q+6} x^{4c} \leq 3\alpha^{1,d}(\mathcal{D}) 2^{-2x+2q+8} x^{4c}. \end{aligned} \quad (46)$$

Оценим $\alpha^{1,d}(\mathcal{D})$. Из определения семейства $\mathcal{D}$ следует, что оно состоит из множеств, мощность которых не меньше 2 и не больше 3. Справедлива оценка

$$\alpha^{1,d}(\mathcal{D}) = \sum_{A \in \mathcal{D}} f(A) \leq \sum_{A \in \mathcal{A}_2^d(I)} f(A) + \sum_{A \in \mathcal{A}_3^d(I)} f(A).$$

Отсюда, аналогично (29) получаем, что

$$\alpha^{1,d}(\mathcal{D}) \leq x^{cd} 2^{2x-\log^2 x+q} + x^{2cd} 2^{x-\log^2 x+2q} \leq 2 \cdot 2^{2x-\log^2 x} x^{cd}. \quad (47)$$

Из (46) и (47) вытекает, что $\alpha^1(\mathcal{B}_B^{(2)}) \leq 6 \cdot 2^{2x-\log^2 x} 2^{-2x+2q+8} x^{4cd} \leq 2^{-(1/2) \log^2 x}$. Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, $A \subseteq X$, $\mathcal{M} \subseteq 2^X$. Через $\eta_{\mathcal{M}}^d(A)$ обозначим число d -компонент множества A , принадлежащих семейству $\mathcal{M}$. Если k — натуральное число, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}^d(I)$, то положим

$$C_k^d(\mathcal{D} \mid \mathcal{M}) = \{A \in C(\mathcal{D}) : \eta_{\mathcal{M}}^d(A) = k\}.$$

Для натуральных $\tau \leq \theta$ положим для краткости

$$C_{[\tau,\theta]}^d(\mathcal{D} \mid \mathcal{M}) = \bigcup_{\tau \leq j \leq \theta} C_j^d(\mathcal{D} \mid \mathcal{M}).$$

Теорема 8. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, \kappa, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}_3(I)$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}_{(\hat{3}, \hat{3})}^{(d, 1)}$, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{B}_{(1, 1)}^{(d, 1)}$, $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{D}_1$. Пусть $B \in C(\mathfrak{B})$, $B = B_1 \cup B_2$, где $B_1 \in C^d(\mathfrak{D}_1)$, $B_2 \in C^d(\mathfrak{D}) \setminus C^d(\mathfrak{D}_1)$. Пусть

$$\alpha_1 = \alpha^{1, d}(\mathfrak{D}_1), \quad \theta_1 = \alpha_1 + \alpha_1^{9/14}, \quad \tau_1 = (\alpha_1 - \alpha_1^{9/14})(1 - \varepsilon_1 2^{-\kappa} \kappa^{cd}),$$

$$\alpha_2 = \alpha^{1, d}(\mathfrak{D}_2), \quad \theta_2 = \alpha_2 + \alpha_2^{9/14}, \quad \tau_2 = (\alpha_2 - \alpha_2^{9/14})(1 - \varepsilon_2 2^{-\kappa} \kappa^{cd}),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Пусть также

$$\tilde{C}^d(\mathfrak{B}) = C_{[\tau_1, \theta_1]}^d(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{D}_1) \cap C_{[\tau_2, \theta_2]}^d(\mathfrak{D} \mid \mathfrak{D}_2).$$

Тогда при достаточно больших κ

$$\tilde{S}(\mathfrak{B}) = (1 + O(\alpha_1^{-1/7} e^{-\alpha_1^{2/7}/2} + \alpha_2^{-1/7} e^{-\alpha_2^{2/7}/2})) \sum_{B \in \tilde{C}^d(\mathfrak{B})} f(B) \pi(B_1).$$

Доказательство. Заметим, что при $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{A}_3(I)$

$$C(\mathfrak{B}) = C^d\left(\mathfrak{B}_{(-, \hat{3})}^{(d, 1)}\right)$$

Из (10) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{B \in C^d(\mathfrak{D})} f(B) \pi(B_1) &\geq \tilde{S}^d(\mathfrak{D}) = \sum_{B \in C^d(\mathfrak{D})} f(B) \pi(B_1 \cup B_2) \\ &\geq \sum_{B \in C^d(\mathfrak{D})} f(B) \pi(B_1) \pi(B_2) \geq \sum_{B \in \tilde{C}^d(\mathfrak{B})} f(B) \pi(B_1) \pi(B_2). \end{aligned}$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 7 и лемм 10 и 12.

6. Оценки $S(\mathfrak{B})$ для почти регулярных множеств

В этом разделе будет установлена связь между суммами $\tilde{S}(\mathfrak{B})$ и $S(\mathfrak{B})$ для почти регулярных семейств связных множеств.

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, семейство $\mathfrak{B} \subseteq A(I)$ назовем регулярным, если для любых $\{u\}, \{v\} \in \mathfrak{B}$ справедливо равенство

$$\alpha^1(\mathfrak{B}_{\{v\}, [2]}^{(2)}) = \alpha^1(\mathfrak{B}_{\{u\}, [2]}^{(2)}).$$

Семейство $\mathfrak{B} \subseteq A(I)$ назовем почти регулярным, если для любых $\{u\}, \{v\} \in \mathfrak{B}$ выполняется соотношение

$$\alpha^1(\mathfrak{B}_{\{v\}, [2]}^{(2)}) = (1 + O(2^{-\log^2 \kappa})) \alpha^1(\mathfrak{B}_{\{u\}, [2]}^{(2)}).$$

Для $\mathfrak{B} \subseteq A(I)$ положим

$$\mathfrak{B}_{[3]}^{(1, 2)} = \{ \{ \{v\}, l\{\{u\}, \{w\}\} \} : \{v\} \in \mathfrak{B}, \{u, w\} \in \mathfrak{B}_{\{v\}} \}.$$

Лемма 13. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, \kappa, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_1(I)$ является почти регулярным семейством. Пусть

$$\alpha = \alpha^{1,d}(\mathcal{B}_{(1,1)}^{(d,1)}), \quad \theta = \alpha + \alpha^{9/14}, \quad \tau = (\alpha - \alpha^{9/14})(1 - \varepsilon 2^{-\kappa} \chi^{cd}), \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть также $d \geq 4$, $B \in C_{[\tau, \theta]}^d(\mathcal{B}_{(1,1)}^{(d,1)})$. Тогда при достаточно больших κ

$$\alpha^1(\mathcal{B}_B^{(2)}) = (1 + O(2^{-\log^2 \kappa}))\alpha^1(\mathcal{B}_{[3]}^{(1,2)}).$$

Доказательство. Заметим, что в силу (16)

$$\alpha^{1,d}(\mathcal{B}_{(1,1)}^{(d,1)}) = \alpha^1(\mathcal{B}) = \sum_{\{v\} \in \mathcal{B}} f(\{v\}) \leq |\mathcal{B}| 2^{-\kappa} \leq |X| 2^{-\kappa} \leq 2^{3\kappa - 2\log^2 \kappa} \quad (48)$$

Покажем, что при $B \in C_{[\tau, \theta]}^d(\mathcal{B}_{(1,1)}^{(d,1)})$

$$\alpha^1(\mathcal{B}_B^{(2)}) = (1 + O(2^{-\log^2 \kappa}))\alpha^1(\mathcal{B}_{B,[2]}^{(2)}). \quad (49)$$

В силу (48) и (17)

$$|B| \leq \theta \leq 2\alpha = 2 \cdot 2^{3\kappa - 2\log^2 \kappa}.$$

С использованием (16) и (21) при $m = 1$, $r = 2$ и $v = 1$ получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}_B^{(2)}) - \alpha^1(\mathcal{B}_{B,[2]}^{(2)}) &= \sum_{j \geq 3} \alpha^1(\mathcal{B}_{B,[j]}^{(2)}) \leq |B| \sum_{j \geq 3} 2^{-j\kappa + 3j} \chi^{2cj} \\ &\leq 2 \cdot 2^{3\kappa - 2\log^2 \kappa} \sum_{j \geq 3} 2^{-j\kappa + 3j} \chi^{2cj} \leq 2^{-\log^2 \kappa}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (49). Далее, по формуле включения–исключения

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{B}_{B,[2]}^{(2)}) &= \alpha^1\left(\bigcup_{A \subseteq B} \mathcal{B}_{A,[2]}\right) = \sum_{\{u\} \subseteq B} \alpha^1(\mathcal{B}_{\{u\},[2]}^{(2)}) - \sum_{\{u,v\} \subseteq B} \alpha^1(\mathcal{B}_{\{u\},[2]}^{(2)} \cap \mathcal{B}_{\{v\},[2]}^{(2)}) \\ &\quad + \sum_{\{u,v,w\} \subseteq B} \alpha^1(\mathcal{B}_{\{u\},[2]}^{(2)} \cap \mathcal{B}_{\{v\},[2]}^{(2)} \cap \mathcal{B}_{\{w\},[2]}^{(2)}) - \dots \quad (50) \end{aligned}$$

Пусть $H \in \mathcal{B}_{B,[2]}^{(2)}$, это значит, что существует вершина $v \in B$ такая, что $H \# \{v\}$. Если множество B удовлетворяет условию леммы, то оно состоит из компонент (точек), расстояние между которыми не меньше d , тогда при $d \geq 4$ для любой вершины $u \in B$, отличной от v , справедливо соотношение $H \parallel \{u\}$. Следовательно, $\mathcal{B}_{\{v\},[2]}^{(2)} \cap \mathcal{B}_{\{u\},[2]}^{(2)} = \emptyset$, таким образом, все слагаемые, кроме первого, равняются нулю. Теперь из регулярности $\mathcal{B}$ для произвольного $\{v_0\} \in \mathcal{B}$ получаем, что

$$\alpha^1(\mathcal{B}_{B,[2]}^{(2)}) = \sum_{\{v\} \subseteq B} \alpha^1(\mathcal{B}_{\{v\},[2]}^{(2)}) = (1 + O(2^{-\log^2 \kappa}))|B|\alpha^1(\mathcal{B}_{\{v_0\},[2]}^{(2)}).$$

Поскольку $B \in C_{[\tau, \theta]}^d(\mathcal{B}_{(1,1)}^{(d,1)})$, в силу (48)

$$|B| = \alpha^1(\mathcal{B})(1 + O(\alpha^{-5/14})) = \alpha^1(\mathcal{B})(1 + O(2^{-15\kappa/14})).$$

Следовательно,

$$\alpha^1(\mathcal{R}_{B,[2]}^{(2)}) = (1 + O(2^{-\log^2 x}))\alpha^1(\mathcal{R})\alpha^1(\mathcal{R}_{\{v_0\},[2]}^{(2)}). \quad (51)$$

Из (49), (51), определения семейства $\mathcal{R}_{[3]}^{(1,2)}$ и регулярности $\mathcal{R}$ следует, что

$$\begin{aligned} \alpha^1(\mathcal{R}_B^{(2)}) &= (1 + O(2^{-\log^2 x}))\alpha^1(\mathcal{R})\alpha^1(\mathcal{R}_{\{v_0\},[2]}^{(2)}) \\ &= (1 + O(2^{-\log^2 x})) \sum_{\{v\} \in \mathcal{R}} f(\{v\})\alpha^1(\mathcal{R}_{\{v\},[2]}^{(2)}) \\ &= (1 + O(2^{-\log^2 x})) \sum_{\{v\} \in \mathcal{R}} f(\{v\}) \sum_{\{u,w\} \in \mathcal{R}_{\{v\}}} f(\{u\})f(\{w\}) \\ &= (1 + O(2^{-\log^2 x}))\alpha^1(\mathcal{R}_{[3]}^{(1,2)}). \end{aligned} \quad (52)$$

Лемма доказана.

Теорема 9. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, x, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_3(I)$ является почти регулярным семейством. Тогда

$$S(\mathcal{R}) = (1 + O(2^{-(1/2)\log^2 x})) \exp\{\hat{\mu}_3(\mathcal{R})\},$$

где

$$\hat{\mu}_3(\mathcal{R}) = \alpha^1(\mathcal{R}) - \frac{1}{2}\alpha^2(\mathcal{R}) + \frac{1}{3}\alpha^3(\mathcal{R}) - \alpha^1(\mathcal{R}_{[2,3]}^{(2)}) + \alpha^1(\mathcal{R}_{[3]}^{(1,2)}).$$

Утверждение вытекает из следствия 4, теоремы 8 и леммы 13.

Пусть $I = (X, f)$ — функциональная пара, семейства $\mathcal{R} \subseteq A(I)$ и $\mathcal{D} \subseteq A(I)$ назовем взаимно регулярными, если они являются почти регулярными, $\mathcal{R} \cap \mathcal{D} = \emptyset$, а также для любых $\{u\}, \{v\} \in \mathcal{R}$

$$\alpha^1((\mathcal{R} \cup \mathcal{D})_{\{v\},[2]}^{(2)}) = (1 + O(2^{-\log^2 x}))\alpha^1((\mathcal{R} \cup \mathcal{D})_{\{u\},[2]}^{(2)}),$$

а для любых $\{u\}, \{v\} \in \mathcal{D}$

$$\alpha^1((\mathcal{R} \cup \mathcal{D})_{\{v\},[2]}^{(2)}) = (1 + O(2^{-\log^2 x}))\alpha^1((\mathcal{R} \cup \mathcal{D})_{\{u\},[2]}^{(2)}).$$

Лемма 14. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, x, q, c)$ -ординарной функциональной парой, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_1(I)$ и $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_1(I)$ являются взаимно регулярными семействами. Пусть

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha^{1,d}(\mathcal{R}_{(1,1)}^{(d,1)}), & \alpha_2 &= \alpha^{1,d}(\mathcal{D}_{(1,1)}^{(d,1)}), \\ \theta_1 &= \alpha_1 + \alpha_1^{9/14}, & \theta_2 &= \alpha_2 + \alpha_2^{9/14}, \\ \tau_1 &= (\alpha_1 - \alpha_1^{9/14})(1 - \varepsilon_1 2^{-x} x^{cd}), & \tau_2 &= (\alpha_2 - \alpha_2^{9/14})(1 - \varepsilon_2 2^{-x} x^{cd}), \end{aligned}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Пусть также $d \geq 4$,

$$B \in C_{[\tau_1, \theta_1]}^d((\mathcal{R} \cup \mathcal{D})_{(1,1)}^{(d,1)} \mid \mathcal{R}_{(1,1)}^{(d,1)}) \cap C_{[\tau_2, \theta_2]}^d((\mathcal{R} \cup \mathcal{D})_{(1,1)}^{(d,1)} \mid \mathcal{D}_{(1,1)}^{(d,1)}).$$

Тогда при достаточно больших x

$$\alpha^1((\mathcal{R} \cup \mathcal{D})_B^{(2)}) = (1 + O(2^{-\log^2 x}))\alpha^1((\mathcal{R} \cup \mathcal{D})_{[3]}^{(1,2)}).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 13. Заметим, что

$$\alpha^1(\mathcal{R} \cup D) = \alpha^1(\mathcal{R}) + \alpha^1(\mathcal{D}) = \alpha^{1,d}(\mathcal{R}_{(1,1)}^{(d,1)}) + \alpha^{1,d}(\mathcal{D}_{(1,1)}^{(d,1)}). \quad (53)$$

Положим $B = B_1 \cup B_2$, где $B_1 \in C_{[\tau_1, \theta_1]}^d(\mathcal{R}_{(1,1)}^{(d,1)})$, $B_2 \in C_{[\tau_2, \theta_2]}^d(\mathcal{D}_{(1,1)}^{(d,1)})$. Аналогично (51) и (52), из взаимной регулярности $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}$ для произвольных $\{v_0\} \in \mathcal{R}$, $\{u_0\} \in \mathcal{D}$ следует, что

$$\begin{aligned} \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{B, [2]}^{(2)}) &= \sum_{\{v\} \subseteq B_1} \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{\{v\}, [2]}^{(2)}) + \sum_{\{u\} \subseteq B_2} \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{\{u\}, [2]}^{(2)}) \\ &= (1 + O(2^{-\log^2 x}))(|B_1| \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{\{v_0\}, [2]}^{(2)}) + |B_2| \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{\{u_0\}, [2]}^{(2)})) \\ &= (1 + O(2^{-\log^2 x}))(\alpha^1(\mathcal{R}) \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{\{v_0\}, [2]}^{(2)}) + \alpha^1(\mathcal{D}) \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{\{u_0\}, [2]}^{(2)})) \\ &= \left(\sum_{\{v\} \in \mathcal{R}} f(\{v\}) \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{\{v\}, [2]}^{(2)}) + \sum_{\{u\} \in \mathcal{D}} f(\{u\}) \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{\{u\}, [2]}^{(2)}) \right) \\ &\quad \times (1 + O(2^{-\log^2 x})) = \alpha^1((\mathcal{R} \cup D)_{[3]}^{(1,2)})(1 + O(2^{-\log^2 x})). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 10. Пусть $I = (X, f)$ является $(3, x, q, c)$ -ординарной функциональной парой, семейства $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_3(I)$ и $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_3(I)$ являются взаимно регулярными. Тогда

$$S(\mathcal{R} \cup D) = (1 + O(2^{-(1/2) \log^2 x})) \exp\{\hat{\mu}_3(\mathcal{R} \cup D)\}.$$

Утверждение вытекает из следствия 4, теоремы 8 и леммы 14.

Список литературы

1. Сапоженко А. А., О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах. *Дискретная математика* (1989) **1**, №1, 74–93.
2. Сапоженко А. А., О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах. *Дискретная математика* (1989) **1**, №2, 110–128.
3. Сапоженко А. А., О предельных распределениях случайных величин, порожденных ограниченными последовательностями. *Дискретный анализ* (1994) **27**, 166–176.
4. Сапоженко А. А., Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. *Матем. вопросы кибернетики* (2000) **9**, 161–220.

Статья поступила 10.11.2003.