Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Козлитин, Полиномиальные преобразования ГЕО-кольца простой характеристики, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 3, 105–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 05:53:03

Полиномиальные преобразования ГЕО-кольца простой характеристики

© 2004 г. О. А. Козлитин

Описаны полиномиальные и биективные полиномиальные преобразования конечного цепного не обязательно коммутативного кольца S , характеристика которого есть простое число. При дополнительном ограничении на индекс нильпотентности e кольца S найдено число (биективных) полиномиальных преобразований. Показано, что если кольцо S некоммутативно, то среди полиномиальных преобразований S нет транзитивных. Полученные результаты свидетельствуют о том, что при некоторых ограничениях на индекс нильпотентности e число (биективных) полиномиальных преобразований некоммутативного кольца S существенно больше числа описанных ранее (биективных) полиномиальных преобразований цепного коммутативного кольца той же мощности и характеристики.

Работа выполнена при поддержке гранта НШ 2358.2003.9 Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ.

1. Введение

Пусть S — конечное кольцо с единицей 1. Для $a \in S$ обозначим через $\hat{a}$ преобразование кольца S , тождественно равное константе a . Если R есть подкольцо S , то множество преобразований $\hat{a}$ по всем $a \in R$ обозначим через $\hat{R}$. В частности, $\hat{S}$ есть множество преобразований-констант кольца S .

Если $k = |S|$, то функции, заданные на S и принимающие значения в S , суть k -значные функции. Напомним понятие замыкания системы k -значных функций.

Рассмотрим так называемые функции-проекции e_i^n ,

$$e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i, \quad i, n \in \mathbb{N}, \quad i \leq n.$$

Множество всех проекций обозначим через E . Замыканием $\bar{G}$ системы k -значных функций G называется минимальный по включению класс функций, удовлетворяющий следующим условиям.

(1) $G \cup E \subseteq \bar{G}$.

(2) Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n), g_1, g_2, \dots, g_n \in \bar{G}$, то $f(g_1, g_2, \dots, g_n) \in \bar{G}$.

(3) Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{G}$, то все функции, полученные из f добавлением или изъятием фиктивного переменного, также принадлежат $\bar{G}$.

Полиномиальными называются преобразования кольца S , лежащие в замыкании системы k -значных функций $\hat{S} \cup \{+, \cdot\}$. Множество полиномиальных преобразований S будем обозначать через $P(S)$. Биективные полиномиальные преобразования назовем также полиномиальными подстановками. Множество полиномиальных подстановок обозначим через $B(S)$.

Целью данной работы является описание множеств $P(S)$ и $B(S)$ в ситуации, когда S есть кольцо Галуа–Эйзенштейна–Оре (конечное цепное кольцо, ГЕО-кольцо) простой характеристики p . Согласно [2] такое кольцо изоморфно $F_q[z, \sigma]/z^e$, где F_q есть поле из $q = p^t$ элементов, e и t — натуральные числа, σ — автоморфизм поля F_q , $F_q[z, \sigma]$ есть кольцо многочленов Оре, то есть кольцо многочленов над F_q , где сложение обычное, а умножение определяется равенством

$$z\alpha = \sigma(\alpha)z$$

для всех $\alpha \in F_q$.

В коммутативном случае указанная задача решена в [4]. Чтобы обобщить эти результаты на некоммутативный случай, охарактеризуем множество $P(S)$ в терминах теории колец.

Пусть Σ — множество всех преобразований кольца S . Наделим Σ структурой кольца: введем на Σ операции сложения и умножения. Для любых $f_1, f_2 \in \Sigma$, $a \in S$ положим

$$(f_1 + f_2)(a) = f_1(a) + f_2(a), \quad (f_1 \cdot f_2)(a) = f_1(a) \cdot f_2(a).$$

Очевидно, что $(\Sigma, +, \cdot)$ — конечное кольцо с единицей $\hat{1}$.

Для всякого $\Gamma \subseteq \Sigma$ подкольцо кольца $(\Sigma, +, \cdot)$, порожденное Γ , обозначим $[\Gamma]$. Тожественное преобразование кольца S обозначим ε . Тогда $P(S)$ как множество совпадает с подкольцом $[\hat{S} \cup \{\varepsilon\}]$ кольца Σ . В дальнейшем под кольцом $P(S)$ будем понимать кольцо $[\hat{S} \cup \{\varepsilon\}]$.

2. Предварительный результат о полиномиальности

Выберем и зафиксируем некоторый изоморфизм колец $F_q[z, \sigma]/z^e$ и S . Образ элемента z при этом изоморфизме обозначим через π . Очевидно, что имеет место однозначное разложение любого элемента $a \in S$

$$a = \sum_{i=0}^{e-1} a_i \pi^i, \quad (1)$$

где $a_i \in F_q$ для всех $i = 0, 1, \dots, e-1$.

Пусть δ есть порядок автоморфизма σ в группе автоморфизмов поля F_q . Для всех $i = 0, 1, \dots, e-1$ обозначим через φ_i преобразование кольца S , переводящее всякий элемент $a \in S$ в коэффициент a_i из разложения (1) элемента a . Так как S есть левое векторное пространство над полем F_q , можно считать, что $\varphi_i \in \Sigma$. Для всех $j = 0, 1, \dots, \delta$ определим преобразование $\varepsilon_j \in \Sigma$ равенством

$$\varepsilon_j = \sum_{i \geq 0} \varphi_{j+i\delta} \pi^{j+i\delta}.$$

Существует единственное число $r \in \{1, \dots, t\}$ такое, что для любого $u \in F_q$ выполняется равенство $\sigma(u) = u^{p^r}$. Для всех $i \in \{1, \dots, \delta-1\}$ обозначим через k_i остаток от

деления ri на t . Для краткости будем обозначать величину p^{k_i} через d_i , $i = 1, \dots, \delta - 1$. Тогда для любых $u \in \mathbb{F}_q$, $i \in \{1, \dots, \delta - 1\}$ справедливо равенство $\sigma^i(u) = u^{d_i}$. Очевидно, что для всех $i \in \{1, \dots, \delta - 1\}$ выполняется неравенство $1 < d_i < p^t$, и разным $i \in \{1, \dots, \delta - 1\}$ соответствуют разные d_i . Обозначим через M_0 множество преобразований кольца S вида

$$\sum_{i: \text{Res}_\delta(i) \neq 0} \alpha_{\text{Res}_\delta(i)} \varphi_i \hat{\pi}^i,$$

где $\alpha_j \in \hat{\mathbb{F}}_q$, $\text{Res}_\delta(i)$ есть остаток от деления i на δ . Очевидно, что M_0 есть левое векторное пространство над полем $\hat{\mathbb{F}}_q$, изоморфное $\mathbb{F}_q \mathbb{F}_q^{\delta-1}$, где $\mathbb{F}_q^{\delta-1}$ есть $(\delta - 1)$ -я декартова степень $\mathbb{F}_q$.

Полиномиальные преобразования $\alpha\varepsilon - \varepsilon\alpha$, $\alpha \in \hat{\mathbb{F}}_q$, имеют вид

$$\sum_{i: \text{Res}_\delta(i) \neq 0} (\alpha - \sigma^{\text{Res}_\delta(i)}(\alpha)) \varphi_i \hat{\pi}^i.$$

Отсюда следует, что $\alpha\varepsilon - \varepsilon\alpha \in M_0$ для всех $\alpha \in \hat{\mathbb{F}}_q$. Размерность M_0 равна $\delta - 1$, поэтому, если в M_0 есть линейно независимая система из $\delta - 1$ векторов вида $\alpha\varepsilon - \varepsilon\alpha$, то в M_0 есть полиномиальный базис и все преобразования из M_0 полиномиальны. Иными словами, для включения $M_0 \subseteq P(S)$ достаточно существование таких $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\delta-1} \in \mathbb{F}_q$, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \sigma(\alpha_1) & \alpha_1 - \sigma^2(\alpha_1) & \dots & \alpha_1 - \sigma^{\delta-1}(\alpha_1) \\ \alpha_2 - \sigma(\alpha_2) & \alpha_2 - \sigma^2(\alpha_2) & \dots & \alpha_2 - \sigma^{\delta-1}(\alpha_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\delta-1} - \sigma(\alpha_{\delta-1}) & \alpha_{\delta-1} - \sigma^2(\alpha_{\delta-1}) & \dots & \alpha_{\delta-1} - \sigma^{\delta-1}(\alpha_{\delta-1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Существование $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\delta-1}$ с указанным свойством вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Для любого $s \in \{1, \dots, \delta - 1\}$ существуют элементы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ поля $\mathbb{F}_q$ такие, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \sigma(\alpha_1) & \alpha_1 - \sigma^2(\alpha_1) & \dots & \alpha_1 - \sigma^s(\alpha_1) \\ \alpha_2 - \sigma(\alpha_2) & \alpha_2 - \sigma^2(\alpha_2) & \dots & \alpha_2 - \sigma^s(\alpha_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_s - \sigma(\alpha_s) & \alpha_s - \sigma^2(\alpha_s) & \dots & \alpha_s - \sigma^s(\alpha_s) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство. Докажем справедливость леммы индукцией по s .

В случае $s = 1$ утверждение очевидно: существует α_1 со свойством $\alpha_1 \neq \sigma(\alpha_1)$. Пусть теперь $1 \leq s \leq \delta - 2$ и существуют элементы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ с указанным в условии свойством. Рассмотрим многочлен

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \sigma(\alpha_1) & \alpha_1 - \sigma^2(\alpha_1) & \dots & \alpha_1 - \sigma^{s+1}(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_s - \sigma(\alpha_s) & \alpha_s - \sigma^2(\alpha_s) & \dots & \alpha_s - \sigma^{s+1}(\alpha_s) \\ x - x^{d_1} & x - x^{d_2} & \dots & x - x^{d_{s+1}} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Этот многочлен ненулевой, так как коэффициент при $x^{d_{s+1}}$ равен с точностью до знака минору, стоящему в первых s строках и s столбцах, а данный минор отличен от нуля по предположению индукции. Степень многочлена (2) строго меньше $p^t = q$, а значит, существует элемент $\alpha_{s+1} \in \mathbb{F}_q$, не являющийся его корнем. Лемма доказана.

Таким образом, $M_0 \subseteq P(S)$, а поскольку $\varepsilon_j \in M_0$ для всех $j \in \{1, \dots, \delta - 1\}$ и выполняется равенство

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - \sum_{j=1}^{\delta-1} \varepsilon_j,$$

справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Преобразования $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\delta-1}$ полиномиальны.

В следующем параграфе доказанный факт будет использован для описания полиномиальных преобразований кольца S .

3. Модуль полиномиальных преобразований.

Пусть $\mathfrak{N}$ — подкольцо Σ и $\Gamma \subseteq \Sigma$. Через $\mathfrak{N}[\Gamma]$ обозначим множество элементов $f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ по всем натуральным n , многочленам $f \in \mathfrak{N}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и элементам $\gamma_i \in \Gamma, i = 1, \dots, n$. Согласно [1] подполугруппу полугруппы $(\Sigma, \cdot)$, порожденную Γ , будем обозначать через $[\Gamma]$.

Обозначим через $K(\hat{S}, \varepsilon)$ множество преобразований $\alpha\varepsilon - \varepsilon\alpha$ по всем $\alpha \in \hat{S}$, а через H полугруппу $[\hat{1}, \varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$. Легко видеть, что

$$\hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$$

есть множество конечных сумм вида $\sum_i \alpha_i \omega_i$, где $\alpha_i \in \hat{S}, \omega_i \in H$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Справедливо равенство $[\hat{S} \cup \{\varepsilon\}] = \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$.

Доказательство. Очевидно, что $[\hat{S} \cup \{\varepsilon\}] \supseteq \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$ и $\hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$ есть абелева группа по сложению. Для того чтобы доказать замкнутость $\hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$ по умножению, достаточно показать, что для любых $\alpha, \beta \in \hat{S}$ и $\omega', \omega'' \in H$ выполняется включение $\alpha\omega'\beta\omega'' \in \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы $\omega\alpha \in \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$ для всех $\alpha \in \hat{S}, \omega \in H$. Иными словами, будем доказывать, что $\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_s\alpha \in \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$ для любых $s \geq 1, \gamma_i \in K(\hat{S}, \varepsilon) \cup \{\hat{1}, \varepsilon\}, \alpha \in \hat{S}$.

Доказательство проведем индукцией по параметру s . Пусть $s = 1$. Если $\gamma_1 = \varepsilon$, то

$$\gamma_1\alpha = \varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon - (\alpha\varepsilon - \varepsilon\alpha) \in \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)].$$

Если $\gamma_1 \in K(\hat{S}, \varepsilon)$, то для некоторого $\beta \in \hat{S}$

$$\gamma_1\alpha = (\beta\varepsilon - \varepsilon\beta)\alpha = \beta(\varepsilon\alpha) - \varepsilon(\beta\alpha) \in \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)],$$

так как, согласно доказанному, $\varepsilon\alpha \in \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$ и $\varepsilon(\beta\alpha) \in \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$. В случае $\gamma_1 = \hat{1}$ доказываемое утверждение очевидно.

Пусть теперь утверждение верно для значения $s = s_0$, докажем его для $s = s_0 + 1$. Справедливо равенство

$$\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{s_0}(\gamma_{s_0+1}\alpha) = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{s_0} \sum_i \alpha_i \omega_i = \sum_i (\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_{s_0} \alpha_i) \omega_i,$$

где $\alpha_i \in \hat{S}$, $\omega_i \in H$. По предположению индукции

$$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{s_0} \alpha_i = \sum_j \alpha_{i,j} \omega_{i,j}$$

для некоторых $\alpha_{i,j} \in \hat{S}$, $\omega_{i,j} \in H$. Тогда

$$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{s_0} \gamma_{s_0+1} \alpha = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \omega_{i,j} \omega_i \in \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)].$$

Таким образом, $\hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$ есть подкольцо Σ , включающее $\hat{S} \cup \{\varepsilon\}$. Следовательно, $[\hat{S} \cup \{\varepsilon\}] \subseteq \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)]$.

Лемма доказана.

Описание полиномиальных преобразований GEO-кольца простой характеристики дает следующая теорема.

Теорема 1. Если S есть GEO-кольцо простой характеристики, то кольца

$$M_1 = \hat{S}[\varepsilon, K(\hat{S}, \varepsilon)], \quad M_2 = \hat{S}[\hat{\pi}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\delta-1}], \quad M_3 = \hat{F}_q[\hat{\pi}, \varphi_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\delta]$$

равны между собой и совпадают с $(P(S), +, \cdot)$.

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно показать, что имеет место цепочка включений

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq M_1.$$

Включение $M_1 \supseteq M_2$ справедливо в силу следствия 1.

Для доказательства включения $M_2 \supseteq M_3$ достаточно показать полиномиальность преобразования φ_0 (поскольку $\varepsilon_0 = \varphi_0 + \varepsilon_\delta$, из полиномиальности φ_0 следует полиномиальность ε_δ). Поскольку элементы вида $a\pi^{i\delta}$, $a \in F_q$, $i \in N_0$, перестановочны между собой, для всякого натурального n

$$\varepsilon_0(a)^{q^n} = \left(\sum_{i \geq 0} a_{i\delta} \pi^{i\delta} \right)^{q^n} = \sum_{i \geq 0} a_{i\delta} \pi^{i\delta q^n},$$

где $a_j \in F_q$ — коэффициенты из разложения (1) элемента $a \in S$. Если n таково, что $\delta q^n \geq e$, то $\varepsilon_0(a)^{q^n} = a_0 = \varphi_0(a)$ для всех $a \in S$, то есть преобразование $\varphi_0 = \varepsilon_0^{q^n}$ полиномиально.

Для доказательства включения $M_3 \supseteq M_1$ достаточно показать, что для всех $a \in F_q$ и $i \in N_0$ преобразования $\hat{a}\hat{\pi}^i\varepsilon$ и $\varepsilon\hat{a}\hat{\pi}^i$ принадлежат M_3 . Так как

$$\varepsilon = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\delta} \varepsilon_j,$$

справедливо включение $\hat{a}\hat{\pi}^i\varepsilon \in M_3$. Преобразование $\varepsilon\hat{a}\hat{\pi}^i$ можно представить в виде

$$\hat{a}\varphi_0\hat{\pi}^i + \sum_{j=1}^{\delta} \widehat{\sigma^j(a)\varepsilon_j\hat{\pi}^i},$$

и значит, оно принадлежит M_3 .

Теорема доказана.

Поскольку $\hat{\pi}\varphi_0 = \sigma(\varphi_0)\hat{\pi}$ и для всех $j \in \{1, \dots, \delta\}$

$$\varepsilon_j\varphi_0 = \sigma^j(\varphi_0)\varepsilon_j,$$

справедливо равенство

$$P(S) = \hat{\mathbf{F}}_q[\hat{\pi}, \varphi_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\delta] = \hat{\mathbf{F}}_q[\varphi_0][\hat{\pi}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\delta].$$

Для любого f -преобразования $\mathbf{F}_q$ и $g \in P(S)$ определим произведение fg равенством

$$fg(a) = f(\varphi_0(a))g(a)$$

для любого $a \in S$. Из равенства $P(S) = \hat{\mathbf{F}}_q[\varphi_0][\hat{\pi}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\delta]$ следует, что $fg \in P(S)$. Если $P(\mathbf{F}_q)$ — кольцо преобразований $\mathbf{F}_q$ и T есть система всех различных ненулевых элементов полугруппы $[\hat{1}, \hat{\pi}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\delta]$, то $P(S)$ есть левый $P(\mathbf{F}_q)$ -модуль с системой образующих T .

Для дальнейшего изложения понадобятся некоторые понятия теории модулей. Пусть R — конечное коммутативное кольцо с единицей, ${}_R M$ — конечный левый R -модуль и Γ — некоторая система векторов модуля ${}_R M$. Система Γ называется свободной (над R), если между ее элементами не существует нетривиального линейного соотношения над R , и несократимой (над R), если ни один из ее элементов не является линейной комбинацией остальных. Если модуль ${}_R M$ имеет свободную систему образующих, то он называется свободным, а сама эта система называется базисом модуля ${}_R M$. Мощность базиса свободного модуля называется рангом этого модуля (для ранга используется обозначение $\text{rank } {}_R M$). Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Любая подсистема Γ системы T свободна тогда и только тогда, когда она несократима.

Доказательство. То, что всякая сократимая система несвободна, очевидно. Наоборот, пусть система Γ несвободна:

$$\sum_{i=1}^n a_i \gamma_i = 0,$$

где $a_i \in P(\mathbf{F}_q) \setminus \{0\}$, $\gamma_i \in \Gamma$, $n \geq 1$. Выберем элемент $u \in S$ такой, что не все a_i в точке $\varphi_0(u) = u_0$ равны нулю. Не ограничивая общности, можно считать, что существует число $k \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $a_i(u_0) \neq 0$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$, и

$$\sum_{i=1}^k a_i(u_0) \gamma_i(u) = 0.$$

Таким образом,

$$\gamma_1(u) = - \sum_{i=2}^k a_1(u_0)^{-1} a_i(u_0) \gamma_i(u),$$

и, более того,

$$\gamma_1(v) = - \sum_{i=2}^k a_1(u_0)^{-1} a_i(u_0) \gamma_i(v)$$

для всех v таких, что $\varphi_0(v) = u_0$. Однако, $\gamma_i \in T$, и следовательно, $\gamma_i(x)$ не зависит от $\varphi_0(x) = x_0$. Поэтому, если $c_i = -a_1(u_0)^{-1}a_i(u_0) \in \mathbb{F}_q$ для всех $i \in \{2, \dots, k\}$, то

$$\gamma_1 = \sum_{i=2}^k \hat{c}_i \gamma_i.$$

Таким образом, если система Γ несвободна, то она сократима.

Лемма доказана.

Чтобы сформулировать и доказать основной результат этого параграфа, понадобятся еще несколько определений. Всякому преобразованию $f \in \Sigma$ сопоставим систему координатных функций f_s над полем $\mathbb{F}_q$,

$$f_s = \varphi_s(f), \quad s = 0, 1, \dots, e-1.$$

Нормой преобразования $f \neq 0$ (для нее используем обозначение $\|f\|$) назовем минимальное s такое, что $f_s \neq 0$. Приведенным назовем многочлен над полем $\mathbb{F}_q$, имеющий по каждому переменному степень не выше $q-1$. Хорошо известно [3], что всякая функция над $\mathbb{F}_q$ задается единственным приведенным многочленом.

Теорема 2. Пусть S есть GEO-кольцо простой характеристики. Тогда $P(S)$ есть свободный левый $P(\mathbb{F}_q)$ -модуль, причем T является его системой образующих и содержит базис. Если дополнительно известно, что $e \leq 1 + \delta$, то T является базисом модуля ${}_{P(\mathbb{F}_q)}P(S)$.

Доказательство. Согласно лемме 3 максимальная несократимая подсистема T есть базис ${}_{P(\mathbb{F}_q)}P(S)$, а значит, модуль ${}_{P(\mathbb{F}_q)}P(S)$ свободный.

Пусть теперь $e \leq 1 + \delta$. Доказывать утверждение теоремы будем от противного. Предположим, что система $T = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ несвободна. Перенумеровав элементы T , получим, что существуют $k \in \{1, \dots, n\}$ и $a_1, a_2, \dots, a_k \in P(\mathbb{F}_q) \setminus \{0\}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^k a_i \gamma_i = 0.$$

Пусть

$$s_0 = \min\{\|\gamma_1\|, \|\gamma_2\|, \dots, \|\gamma_k\|\}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что существует число $k_0 \in \{1, \dots, k\}$ такое, что

$$\|\gamma_1\| = \|\gamma_2\| = \dots = \|\gamma_{k_0}\| = s_0$$

и $\|\gamma_i\| > s_0$ для всех $i > k_0$. Поскольку $e \leq 1 + \delta$, справедливо неравенство $s_0 \leq \delta$. Рассмотрим s_0 -ю координатную функцию преобразования $f = \sum_{i=1}^k a_i \gamma_i$. Так как $e \leq 1 + \delta$, для всех $i \in \{1, \dots, k_0\}$ справедливо равенство $\gamma_i = \omega_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s_0}) \hat{\pi}^{s_0}$, где ω_i — некоторая ненулевая функция, заданная на $\mathbb{F}_q$ и принимающая значения в $\mathbb{F}_q$ (в случае $s_0 = 0$ считаем, что $\omega_i = 1$). Таким образом, справедливо равенство функций

$$f_{s_0} = \sum_{i=1}^{k_0} a_i(\varphi_0) \omega_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s_0}) = 0. \quad (3)$$

Можно считать, что в равенстве (3) a_i суть приведенные многочлены, а ω_i — приведенные мономы над $\hat{\mathbf{F}}_q$. Поскольку преобразования γ_i , $i = 1, \dots, k_0$, попарно различны, мономы ω_i тоже попарно различны, а тогда из равенства (3) следует, что все a_i , $i = 1, \dots, k_0$, равны нулю как многочлены и как преобразования. Пришли к противоречию.

Теорема доказана.

В дальнейшем для любой подсистемы Γ системы T будем обозначать через $P_{(\mathbf{F}_q)}\langle\Gamma\rangle$ подмодуль $P_{(\mathbf{F}_q)}P(S)$, порожденный Γ .

Построенная система образующих модуля $P_{(\mathbf{F}_q)}P(S)$ позволяет найти его мощность в случае $e \leq 1 + \delta$. Данному вопросу посвящен следующий параграф.

4. О числе полиномиальных преобразований

Всюду в этом параграфе предполагается, что $e \leq 1 + \delta$.

Пусть x_i , $i = 1, \dots, \delta$, — многочлены из $\mathbf{F}_q[x_1, x_2, \dots, x_\delta]$. Рассмотрим множество векторов над $\mathbf{N}_0 \cup \{x_1, x_2, \dots, x_\delta\}$ вида

$$(j_0, x_{i_1}, j_1, \dots, x_{i_k}, j_k) \quad (4)$$

по всем $k \in \mathbf{N}$ с ограничениями $\sum_{l=0}^k j_l \leq e - 1$ и $j_l \geq i_l$ для всех $l = 1, \dots, k$. Каждому вектору вида (4) сопоставим преобразование из множества T

$$\hat{\pi}^{j_0} \varphi_{i_1} \hat{\pi}^{j_1} \varphi_{i_2} \hat{\pi}^{j_2} \dots \varphi_{i_k} \hat{\pi}^{j_k}. \quad (5)$$

Будем говорить, что переменная x_i , $i \in \{1, \dots, \delta\}$, имеет вхождение $c \in \mathbf{N}_0$ в векторе (4), если существует позиция в векторе (4), на которой стоит x_i , и сумма чисел, стоящих левее этой позиции, равна c . Упорядоченную по возрастанию совокупность вхождений переменной x_i будем называть ее списком вхождений. По спискам вхождений x_i для всех $i = 1, \dots, \delta$ однозначно восстанавливается вектор (4). Покажем, что преобразование (5) однозначно определяет список вхождений всякой переменной x_i , $i = 1, \dots, \delta$.

Поскольку $\hat{\pi} \varphi_i = \sigma(\varphi_i) \hat{\pi}$, преобразование (5) можно записать в виде

$$\sigma^{c_1}(\varphi_{i_1}) \sigma^{c_2}(\varphi_{i_2}) \dots \sigma^{c_k}(\varphi_{i_k}) \hat{\pi}^{l_0+l_1+\dots+l_k},$$

где

$$c_i = \sum_{l < i} j_l.$$

Так как $e \leq 1 + \delta$,

$$c_i \in \{0, 1, \dots, \delta - 1\}, \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Пусть числа d_i , $i = 1, \dots, \delta - 1$, определены, как в параграфе 2, и $d_0 = 1$. Тогда для любого $c \in \{0, 1, \dots, \delta - 1\}$ справедливо равенство $\sigma^c(\varphi_i) = \varphi_i^{d_c}$ и преобразование (5) представляется в виде

$$\omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\delta) \hat{\pi}^{l_0+l_1+\dots+l_k},$$

где

$$\omega = x_{i_1}^{d_{c_1}} x_{i_2}^{d_{c_2}} \dots x_{i_k}^{d_{c_k}} \in \hat{\mathbf{F}}_q[x_1, x_2, \dots, x_\delta].$$

Пусть для всех $i = 1, \dots, \delta$ список вхождений x_i есть $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \dots, c_{n_i}^{(i)}$. Тогда все $c_j^{(i)}$ принадлежат множеству $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ и справедливо равенство

$$\deg_{x_i} \omega = d_{c_1^{(i)}} + d_{c_2^{(i)}} + \dots + d_{c_{n_i}^{(i)}}.$$

В силу неравенства

$$d_{c_1^{(i)}} + d_{c_2^{(i)}} + \dots + d_{c_{n_i}^{(i)}} \leq 1 + p + p^2 + \dots + p^{t-1} < q,$$

моном ω является приведенным, а значит, однозначно определяется преобразованием (5).

Для всех $i = 1, \dots, \delta$ числа $c_j^{(i)}$, $j = 1, \dots, n_i$, попарно различны и принадлежат множеству $\{0, 1, \dots, \delta - 1\}$. Числа d_c , $c = 0, 1, \dots, \delta - 1$, суть степени p , причем разным c соответствуют разные d_c (см. параграф 2). Следовательно, представляя $\deg_{x_i} \omega$ в виде p -ичного разложения, по моному ω можно однозначно определить все $d_{c_j^{(i)}}$, а значит, и все $c_j^{(i)}$. Таким образом, преобразование (5) однозначно определяет собою список вхождений x_i для всех $i = 1, \dots, \delta$ и, следовательно, вектор (4).

Базис T состоит из преобразований $1, \hat{\pi}, \hat{\pi}^2, \dots, \hat{\pi}^{e-1}$ и преобразований вида (5). Поэтому величина $|T| - e$ равна числу векторов вида (4). Если положить $\tau_l = j_l - i_l$, $l \geq 1$, $\tau_0 = j_0$, то множество векторов вида (4) равномощно множеству векторов

$$(\tau_0, x_{i_1}, \tau_1, x_{i_2}, \tau_2, \dots, x_{i_k}, \tau_k) \quad (6)$$

по всем $k \in \mathbb{N}$ с ограничениями

$$\sum_{l=0}^k \tau_l + \sum_{l=1}^k i_l \leq e - 1, \quad i_l \in \{1, \dots, \delta\}, \quad \tau_l \geq 0$$

для всех $l = 1, \dots, k$.

Если

$$s = \sum_{l=0}^k \tau_l + \sum_{l=1}^k i_l, \quad n = i_1 + i_2 + \dots + i_k,$$

то

$$|T| = e + \sum_{s=1}^{e-1} \sum_{n=1}^s \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \binom{s-n+k}{k}. \quad (7)$$

Действительно, $\binom{n-1}{k-1}$ есть число разбиений n на сумму k натуральных слагаемых, а $\binom{s-n+k}{k}$ есть число разбиений $s - n$ на сумму $k + 1$ целых неотрицательных слагаемых.

Комбинируя (7) и теорему 2, получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если S есть GEO-кольцо простой характеристики и $e \leq 1 + \delta$, ранг p модуля ${}_P(\mathbb{F}_q)P(S)$ удовлетворяет равенству

$$\rho = e + \sum_{s=1}^{e-1} \sum_{n=1}^s \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \binom{s-n+k}{k}.$$

Теорема 3 отвечает на вопрос о числе полиномиальных преобразований в случае $e \leq 1 + \delta$. Полученную величину полезно сравнить с $|P(R)|$, где $R \cong \mathbb{F}_q[z]/z^e$. Для этого докажем следующее утверждение.

Следствие 2. В условиях теоремы 3, если $e \leq 1 + \delta$, то

$$\rho \geq 2^{e+1} - \frac{e(e+1)}{2} - 2.$$

Доказательство. Пусть τ_0 меняется в пределах от 0 до $s - n$, а остальные τ_i равны 0. Тогда

$$\rho = |T| \geq e + \sum_{s=1}^{e-1} \sum_{n=1}^s (s - n + 1) \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1},$$

и следовательно, имеет место цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \rho &\geq e + \sum_{s=1}^{e-1} \sum_{n=1}^s (s - n + 1) 2^{n-1} \\ &= e + \sum_{s=1}^{e-1} s \sum_{n=1}^s 2^{n-1} - \sum_{s=1}^{e-1} \sum_{n=1}^s n 2^{n-1} + \sum_{s=1}^{e-1} \sum_{n=1}^s 2^{n-1} \\ &= e + \sum_{s=1}^{e-1} s(2^s - 1) - \sum_{s=1}^{e-1} (s2^s - 2^s + 1) + \sum_{s=1}^{e-1} (2^s - 1) \\ &= e - \sum_{s=1}^{e-1} s + \sum_{s=1}^{e-1} 2^s - (e - 1) + 2(2^{e-1} - 1) - (e - 1) \\ &= 2^{e+1} - \frac{e(e+1)}{2} - 2. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Из результатов работы [4] следует, что

$$\frac{\log_q |P(R)|}{q} \leq \frac{e(e+1)}{2}.$$

Тогда в силу следствия 2 из теоремы 3

$$\frac{\log_q |P(S)|}{q} \geq 2^{e+1} - \frac{e(e+1)}{2} - 2 \geq \frac{e(e+1)}{2} \geq \frac{\log_q |P(R)|}{q},$$

причем неравенства одновременно обращаются в равенства, если и только если $e \leq 2$. Таким образом, при условии $3 \leq e \leq 1 + \delta$ число полиномиальных преобразований некоммутативного кольца S существенно больше, числа полиномиальных преобразований цепного коммутативного кольца той же мощности и характеристики.

В следующем параграфе будут изучаться полиномиальные подстановки.

5. Полиномиальные подстановки

Если рассматривать S как арифметическое векторное пространство над полем $\mathbb{F}_q$, то всякое полиномиальное преобразование f кольца S является треугольным. Более того, если $h_s(x_0, x_1, \dots, x_s)$ есть приведенный многочлен, задающий координатную функцию f_s , то для всех $s = 1, \dots, e-1$ выполняется равенство $\deg_{x_s} h_s = 1$. Поэтому для всех $s = 1, \dots, e-1$ координатная функция f_s однозначно представляется в виде

$$f_s = \alpha_s(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s-1}) + \psi_s(\varphi_0)\varphi_s, \quad (8)$$

где α_s, ψ_s суть приведенные многочлены над полем $\hat{\mathbb{F}}_q$. Пусть T — построенная в параграфе 3 система образующих модуля ${}_{P(\mathbb{F}_q)}P(S)$ и $\Gamma \subseteq T$ — базис этого модуля. Обозначим

$$\Gamma_0 = \Gamma \setminus \{\hat{1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\delta\}.$$

Система Γ_0 представляет собой некоторую совокупность преобразований вида

$$\hat{\pi}^{\tau_0} \varepsilon_{i_1} \hat{\pi}^{\tau_1} \varepsilon_{i_2} \hat{\pi}^{\tau_2} \dots \varepsilon_{i_k} \hat{\pi}^{\tau_k},$$

где $k \geq 0$, $i_l \in \{1, \dots, \delta\}$, $\tau_l \geq 0$, и если $k = 0$, то $\tau_0 \geq 1$, а если $k = 1$, то $\tau_0 + \tau_1 \geq 1$. Координатные функции таких преобразований имеют вид

$$f_0 = 0, \quad f_s = \alpha_s(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{s-1}) \quad (9)$$

для всех $s = 1, \dots, e-1$. Преобразования вида (9) образуют левый $P(\mathbb{F}_q)$ -модуль, поэтому все преобразования из модуля ${}_{P(\mathbb{F}_q)}\langle \Gamma_0 \rangle$ имеют вид (9). Данное наблюдение позволяет доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Справедливо следующее разложение ${}_{P(\mathbb{F}_q)}P(S)$ в прямую сумму собственных подмодулей:*

$${}_{P(\mathbb{F}_q)}P(S) = {}_{P(\mathbb{F}_q)}\langle \Gamma_0 \rangle \dot{+} {}_{P(\mathbb{F}_q)}\langle \hat{1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\delta \rangle.$$

Доказательство. Поскольку $\Gamma \subseteq \Gamma_0 \cup \{\hat{1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\delta\}$, разложение ${}_{P(\mathbb{F}_q)}P(S)$ в сумму указанных подмодулей очевидно. Осталось доказать, что сумма является прямой. Пусть 0 представляется в виде $\gamma' + \gamma''$, где $\gamma' \in {}_{P(\mathbb{F}_q)}\langle \Gamma_0 \rangle$, $\gamma'' \in {}_{P(\mathbb{F}_q)}\langle \hat{1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\delta \rangle$. По определению преобразований ε_j , $j = 1, \dots, \delta$, и в силу однозначности разложения (8) координатные функции преобразования γ'' имеют вид (9) тогда и только тогда, когда $\gamma'' = 0$. Однако, $\gamma'' = -\gamma' \in {}_{P(\mathbb{F}_q)}\langle \Gamma_0 \rangle$, а значит, координатные функции γ'' имеют вид (9).

Лемма доказана.

Обозначим через δ_0 минимум из чисел $e-1$ и δ . По лемме 4

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \{\hat{1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\delta_0}\}$$

и при этом $\Gamma_0 \cap \{\hat{1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\delta_0}\} = \emptyset$. Тогда для всех $s = 1, \dots, \delta_0$ преобразования, задающиеся многочленами ψ_s , суть коэффициенты при ε_s , а f_0 есть коэффициент при $\hat{1}$ в разложении f по базису Γ .

В силу вышесказанного для любых $s \geq 1$, $i \geq 0$ таких, что выполнено соотношение $s+i\delta \leq e-1$, справедливо равенство $\psi_{s+i\delta} = \psi_s$. Треугольное преобразование биективно тогда и только тогда, когда каждая из его координатных функций биективна по последней

переменной. Следовательно, полиномиальное преобразование f биективно тогда и только тогда, когда f_0 есть биективное преобразование $\hat{\mathbf{F}}_q$ и все ψ_s , $s = 1, \dots, \delta_0$, суть многочлены, не имеющие корней. Если обозначить $|\Gamma_0|$ через ρ_0 , то число полиномиальных подстановок выражается формулой

$$|B(S)| = q!(q-1)^{q\delta_0} q^{\rho_0 q}.$$

Действительно, $q!$ есть число способов, которыми можно выбрать биективное преобразование f_0 , а $(q-1)^{q\delta_0}$ есть число способов, которыми можно выбрать вектор $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{\delta_0})$ так, чтобы ни один из многочленов ψ_s не имел корней. Если ρ есть ранг модуля ${}_P(\mathbf{F}_q)P(S)$, то $|P(S)| = q^{\rho q}$ и $\rho_0 = \rho - \delta_0 - 1$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Если S — GEO-кольцо простой характеристики и $\delta_0 = \min\{e-1, \delta\}$, то число полиномиальных подстановок выражается формулой

$$|B(S)| = \frac{q!(q-1)^{\delta_0 q}}{q^{(\delta_0+1)q}} |P(S)|.$$

Таким образом, вопрос о числе полиномиальных подстановок сведен к вопросу о числе полиномиальных преобразований. Теорема 4 является обобщением соответствующего результата работы [4] на некоммутативный случай. Заметим также, что биективность полиномиального преобразования f эквивалентна его биективности по модулю $\pi^{1+\delta_0}$ (в коммутативном случае — по модулю π^2).

Назовем преобразование $f \in P(S)$ транзитивным, если его граф представляет собой цикл длины $|S|$.

Теорема 5. Если S — некоммутативное GEO-кольцо простой характеристики, то в кольце $P(S)$ нет транзитивных преобразований.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть f — транзитивное полиномиальное преобразование. Так как S некоммутативно, $e \geq 2$. Рассмотрим первые две координатные функции преобразования f :

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha_0(\varphi_0), \\ f_1 &= \alpha_1(\varphi_0) + \varphi_1 \psi_1(\varphi_0). \end{aligned}$$

Всякому $b \in \hat{\mathbf{F}}_q$ сопоставим преобразование g_b поля $\hat{\mathbf{F}}_q$, определяемое равенством

$$g_b(u) = \alpha_1(b) + u\psi_1(b)$$

для всех $u \in \hat{\mathbf{F}}_q$.

Поскольку преобразование f транзитивно, оно транзитивно по модулю π и по модулю π^2 . Это означает, что если последовательность $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ элементов поля $\hat{\mathbf{F}}_q$ получена по правилу $b_{i+1} = \alpha_0(b_i)$ и $\circ$ есть операция композиции, то $\hat{\mathbf{F}}_q = \{b_0, b_1, \dots, b_{q-1}\}$ и преобразование поля $\hat{\mathbf{F}}_q$

$$g = g_{b_{q-1}} \circ g_{b_{q-2}} \circ \dots \circ g_{b_1} \circ g_{b_0}$$

является транзитивным. Преобразование g задается некоторым многочленом

$$\alpha x + \beta \in \hat{\mathbf{F}}_q[x].$$

Поскольку g транзитивно, $\alpha \notin \{0, \hat{1}\}$ (так как S некоммутативно, характеристика поля $p < q$). Пусть $g^{(s)}$ есть s -я композиционная степень преобразования g , то есть композиция $g \circ g \circ \dots \circ g$ (s раз). Индукцией по $s \geq 1$ легко показать, что $g^{(s)}(0) = (\alpha - \hat{1})^{-1}(\alpha^s - \hat{1})\beta$. Отсюда следует, что $g^{(q-1)}(0) = 0$. Следовательно, 0 лежит на цикле преобразования g длины, не большей $q - 1$. Пришли к противоречию с транзитивностью g .

Теорема доказана.

6. Заключение

Подведем итоги. В данной работе множество полиномиальных преобразований $P(S)$ GEO-кольца S простой характеристики p рассматривается как левый $P(\mathbb{F}_q)$ -модуль, где $P(\mathbb{F}_q)$ есть кольцо преобразований поля $\mathbb{F}_q$. Доказано, что модуль ${}_{P(\mathbb{F}_q)}P(S)$ свободен, и построена его система образующих, которая в случае $e \leq 1 + \delta$, где δ — порядок автоморфизма σ в группе автоморфизмов поля $\mathbb{F}_q$, является базисом. Найдена формула, сводящая вопрос о числе полиномиальных подстановок к вопросу о числе полиномиальных преобразований. При условии $e \leq 1 + \delta$ вычислен ранг модуля ${}_{P(\mathbb{F}_q)}P(S)$, и следовательно, число полиномиальных преобразований. Показано, что в этом случае число полиномиальных преобразований некоммутативного кольца S существенно больше числа полиномиальных преобразований цепного коммутативного кольца той же мощности и характеристики. Кроме того, доказано, что если S некоммутативно, то ни одно из полиномиальных преобразований S не является транзитивным.

Автор выражает признательность А. А. Нечаеву за постановку задачи и существенную помощь при подготовке статьи.

Список литературы

1. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А., *Алгебра*. Гелиос, Москва, 2003.
2. Нечаев А. А., Конечные кольца главных идеалов. *Матем. сб.* (1973) **6**, 350–366.
3. Dickson L. E., General theory of modular invariants. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1909) **10**, №2, 123–158.
4. Нечаев А. А., Полиномиальные преобразования конечных коммутативных колец главных идеалов. *Матем. заметки* (1980) **27**, №6, 885–889.

Статья поступила 10.11.2003.