Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. С. Ложкина, Об оптимальных точных покрытиях графа в классе слабо плотных базисов, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 3, 118–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:23:48

Об оптимальных точных покрытиях графа в классе слабо плотных базисов

© 2004 г. З. С. Ложкина

Рассматривается задача о покрытии неориентированного связного графа без петель и кратных ребер графами из произвольных конечных базисов. Вводятся понятия сложности покрытия, сложности графа и функции Шеннона. В зависимости от асимптотики функции Шеннона выделены два класса базисов — почти плотные и слабо плотные. Для класса слабо плотных базисов и некоторого специального его подкласса найдены методы построения оптимальных точных покрытий графа двудольными базисными графами и получены оценки сложности таких покрытий. Данные методы основаны на алгоритмах оптимального точного покрытия $(0, 1)$ -матриц произвольными $(0, 1)$ -матрицами, а также на соответствии между покрытием $(0, 1)$ -матрицы и покрытием графа двудольными графами.

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathcal{G}^*$ — множество всех непустых графов без петель и кратных ребер, $\mathcal{G}$ — множество всех связных графов без петель и кратных ребер, имеющих хотя бы одно ребро, $\mathcal{H}^*$ — множество всех двудольных графов без кратных ребер с непустыми долями, а $\mathcal{H}$ — множество всех связных двудольных графов без кратных ребер, имеющих хотя бы одно ребро. Очевидно, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{G}^*$ и $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^*$.

Граф, состоящий из двух вершин и одного ребра, соединяющего эти вершины, назовем тривиальным. Число ребер графа G будем обозначать через $q(G)$, а число его вершин — через $p(G)$.

Множество попарно различных графов $B = \{G_1, \dots, G_s\}$ с числами ребер соответственно $r_1, \dots, r_s$ называется базисом, если оно содержит тривиальный граф и $G_i \in \mathcal{G}$ при любом $i = 1, 2, \dots, s$. Весом базиса B называется величина

$$\rho_B = \max_{1 \leq i \leq s} r_i.$$

Очевидно, что для любого базиса B выполнено неравенство $\rho_B \geq 1$.

Пусть графы $G, H_1, \dots, H_m$, $m \geq 1$, принадлежат классу $\mathcal{G}$. Покрытием графа G графами $H_1, \dots, H_m$ называется такое взаимно однозначное соответствие между графами $H_1, \dots, H_m$ и подграфами $G_1, \dots, G_m$ графа G , при котором каждое ребро графа G принадлежит по крайней мере одному из подграфов $G_1, \dots, G_m$ и для любого $i = 1, \dots, m$ граф G_i изоморфен графу H_i . Если подграфы $G_1, \dots, G_m$ попарно не пересекаются по ребрам, то покрытие графа G называется точным.

Будем говорить, что граф $G \in \mathcal{G}$ покрывается (точно покрывается) графами базиса B , если существует такое покрытие (соответственно точное покрытие) графа G графами $H_1, \dots, H_m$, что $H_i \in B$ для любого $i = 1, 2, \dots, m$. Сложностью такого покрытия будем называть число входящих в него графов, то есть число m .

Минимальное число графов базиса B , достаточное для покрытия всех ребер графа $G \in \mathcal{G}$, называется сложностью графа G и обозначается $l_B(G)$. Покрытие графа G графами базиса B называется минимальным, если его сложность равна $l_B(G)$.

Заметим, что для любого графа $G \in \mathcal{G}$ в любом базисе B выполнены неравенства

$$\frac{q(G)}{\rho_B} \leq l_B(G) \leq q(G). \quad (1.1)$$

Первое из этих неравенств следует из того, что

$$q(G) \leq \sum_{k=1}^{l_B(G)} q(H_k),$$

где $H_1, \dots, H_{l_B(G)}$ — минимальное покрытие графа G ; второе неравенство вытекает из наличия в базисе B тривиального графа.

Функцией Шеннона в классе $\mathcal{G}$ называется функция

$$l_B(q, p) = \max_{G \in \mathcal{G}: q(G)=q, p(G)=p} l_B(G).$$

Из (1.1) и определения функции Шеннона следует, что для любого базиса B и любых натуральных q, p справедливо неравенство

$$\frac{q}{\rho_B} \leq l_B(q, p) \leq q. \quad (1.2)$$

Базис B называется почти плотным, если

$$l_B(q, p) = \frac{q}{\rho_B} + O(p).$$

Базис B называется слабо плотным, если

$$l_B(q, p) = \frac{q}{\rho_B} + o(p^2).$$

Ранее (см. [3, 4]) были указаны критерии принадлежности базиса к каждому из перечисленных классов. Так, оказалось, что базис B с весом ρ является почти плотным тогда и только тогда, когда он содержит дерево с ρ ребрами, а слабо плотным — тогда и только тогда, когда он содержит двудольный граф с ρ ребрами. В данной работе описываются методы построения оптимальных точных покрытий графа из класса $\mathcal{G}$ двудольными базисными графами для класса слабо плотных базисов и некоторого специального его подкласса. Эти методы основаны на алгоритмах покрытия $(0, 1)$ -матриц произвольными $(0, 1)$ -матрицами. Прежде всего мы введем понятие покрытия $(0, 1)$ -матрицы, а затем укажем соответствие между покрытием $(0, 1)$ -матрицы и покрытием графа двудольными графами.

Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{G}^*$, содержащий p вершин $v_1, v_2, \dots, v_p$. Матрица смежности графа G есть квадратная симметричная матрица $M = M_{p \times p} = \|m_{ij}\|$,

в которой $m_{ij} = 1$ для $i, j \in [1, p]$, если вершины v_i и v_j смежны, и $m_{ij} = 0$ в противном случае.

Пусть $H = H_{r,t}$, $r, t \geq 1$, — двудольный граф из класса $\mathcal{H}^*$, содержащий r вершин в первой доле и t вершин во второй доле. Сокращенной матрицей смежности графа H называется матрица $A = A_{r \times t} = \|a_{ij}\|$, в которой $a_{ij} = 1$ для $i \in [1, r]$ и $j \in [1, t]$, если i -я вершина первой доли смежна с j -й вершиной второй доли, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Матрицу, состоящую из нулей и единиц, будем называть $(0, 1)$ -матрицей. Через $e(M)$ обозначим число единиц, а через $z(M)$ — число нулей в $(0, 1)$ -матрице M . Матрицу, состоящую из одних единиц, будем называть тождественной. Через $E_{r,t}$ обозначим тождественную матрицу, состоящую из r строк и t столбцов. Очевидно, что для любого полного двудольного графа $K_{r,t}$, $r, t \geq 1$, сокращенная матрица смежности является тождественной.

Пусть $M = M_{p \times p} = \|m_{ij}\|$ — квадратная матрица, $p \geq 1$. Верхним сокращенным треугольником матрицы M называется множество элементов $\{m_{ij} : j > i\}$, а нижним сокращенным треугольником — множество элементов $\{m_{ij} : j < i\}$.

Две $(0, 1)$ -матрицы называются изоморфными, если они получаются друг из друга в результате некоторой перестановки строк и столбцов и, возможно, транспонирования. Для изоморфности $(0, 1)$ -матриц A и A' будем использовать обозначение $A \cong A'$.

Будем говорить, что $(0, 1)$ -матрица B является усечением $(0, 1)$ -матрицы D , если матрица B получается из D заменой некоторого количества единиц на нули.

Пусть $D = D_{m \times n}$, $m, n \geq 1$, — $(0, 1)$ -матрица. Усеченной подматрицей матрицы D , расположенной в строках с номерами $i_1, \dots, i_r$ и столбцах с номерами $j_1, \dots, j_t$, где $1 \leq r \leq m$, $1 \leq t \leq n$, $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq m$, $1 \leq j_1, \dots, j_t \leq n$, называется любое усечение подматрицы матрицы D , расположенной в строках с номерами $i_1, \dots, i_r$ и столбцах с номерами $j_1, \dots, j_t$.

Пусть $D, B_1, \dots, B_N$ — $(0, 1)$ -матрицы, $N \geq 1$. Покрытием матрицы D (верхнего сокращенного треугольника D) матрицами $B_1, \dots, B_N$ называется такое взаимно однозначное соответствие между матрицами $B_1, \dots, B_N$ и усеченными подматрицами $D_1, \dots, D_N$ матрицы D (усеченными подматрицами $D_1, \dots, D_N$ матрицы D , целиком лежащими в ее верхнем сокращенном треугольнике), при котором любая единица матрицы D (верхнего сокращенного треугольника D) принадлежит хотя бы одной из усеченных подматриц $D_1, \dots, D_N$, и $B_i \cong D_i$ для любого $i = 1, \dots, N$. Матрица D_i называется образом матрицы B_i , а число N называется сложностью покрытия.

Покрытие $(0, 1)$ -матрицы D (верхнего сокращенного треугольника D) $(0, 1)$ -матрицами $B_1, \dots, B_N$ называется точным, если образы матриц $B_1, \dots, B_N$ в матрице D попарно не пересекаются по единицам.

2. О соотношении между покрытием $(0, 1)$ -матрицы и покрытием графа двудольными графами

Лемма 1. *Связные двудольные графы из класса $\mathcal{H}$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их сокращенные матрицы смежности.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный связный двудольный граф $H \in \mathcal{H}$. Покажем, что его вершины однозначно разбиваются на две доли. Пусть v_1 и v_2 — две произвольные вершины в графе H . Известно, что в любом двудольном графе нет циклов нечетной

длины. Значит, в графе H не могут одновременно существовать цепи четной и нечетной длины из вершины v_1 в вершину v_2 . Если в графе H существует цепь четной длины из вершины v_1 в вершину v_2 , то вершины v_1 и v_2 обязаны лежать в одной доле. Если же в графе H существует цепь нечетной длины из вершины v_1 в вершину v_2 , то вершины v_1 и v_2 обязаны лежать в разных долях. Так как H — связный граф, этим определяется разбиение всех вершин графа H на две доли. Таким образом, для связных двудольных графов из класса $\mathcal{H}$ изоморфизм состоит в сопоставлении их долей и последующей перенумерации вершин внутри долей. Для соответствующих сокращенных матриц смежности это означает возможное транспонирование и последующую перестановку строк и столбцов. Но по определению две $(0, 1)$ -матрицы изоморфны именно тогда, когда одну из другой можно получить с помощью перестановки строк и столбцов и, возможно, транспонирования. Отсюда следует утверждение леммы.

Через $E(G)$ обозначим множество ребер графа G . Если G — двудольный граф, то через $V^1(G)$ обозначим множество вершин первой доли, а через $V^2(G)$ — множество вершин второй доли графа G .

Лемма 2. Пусть граф $G \in \mathcal{G}^*$ содержит p вершин, $p \geq 1$, и имеет матрицу смежности $M = M_{p \times p}$, и пусть верхний сокращенный треугольник матрицы M содержит усеченную подматрицу $A = A_{r \times t}$, $1 \leq r \leq p$, $1 \leq t \leq p$. Тогда граф G содержит двудольный подграф из класса $\mathcal{H}^*$, имеющий сокращенную матрицу смежности A .

Доказательство. Пусть усеченная подматрица A матрицы M расположена в строках с номерами $i_1, \dots, i_r$ и столбцах с номерами $j_1, \dots, j_t$, где $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p$, $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq p$. Матрица A лежит в верхнем сокращенном треугольнике матрицы M , поэтому $i_r < j_1$, а следовательно, числа $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_t$ попарно различны. Пусть $A = \|a_{ks}\|$. Обозначим через v_i , $i = 1, \dots, p$, вершину графа G , соответствующую i -й строке матрицы M . Пусть H — такой двудольный граф, что $V^1(H) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$, $V^2(H) = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_t}\}$, и

$$E(H) = \{(v_{i_k}, v_{j_s}) : 1 \leq k \leq r, 1 \leq s \leq t, a_{ks} = 1\}.$$

Очевидно, что граф H принадлежит классу $\mathcal{H}^*$, имеет сокращенную матрицу смежности A и является подграфом графа G .

Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть M — матрица смежности графа $G \in \mathcal{G}$, A — сокращенная матрица смежности двудольного графа $H \in \mathcal{H}$. Если верхний сокращенный треугольник матрицы M содержит усеченную подматрицу A' , изоморфную матрице A , то граф G содержит двудольный подграф $H' \in \mathcal{H}$, изоморфный графу H и имеющий сокращенную матрицу смежности A' .

Теорема 1. Пусть M — матрица смежности графа $G \in \mathcal{G}$, A_i — сокращенная матрица смежности двудольного графа $H_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, \dots, N$. Если существует покрытие (точное покрытие) верхнего сокращенного треугольника матрицы M матрицами $A_1, \dots, A_N$, то существует и покрытие (точное покрытие) графа G графами $H_1, \dots, H_N$.

Доказательство. Пусть взаимно однозначное отображение F представляет собой покрытие верхнего сокращенного треугольника матрицы M матрицами $A_1, \dots, A_N$. Тогда в верхнем сокращенном треугольнике матрицы M существуют такие усеченные подматрицы $A'_1, \dots, A'_N$, что $F(A_i) = A'_i$, любая единица верхнего сокращенного треугольника матрицы M принадлежит хотя бы одной из усеченных подматриц $A'_1, \dots, A'_N$ и $A'_i \cong A_i$ для любого $i = 1, \dots, N$. Отсюда и из лемм 2, 3 вытекает, что в графе G существуют такие двудольные подграфы $H'_1, \dots, H'_N \in \mathcal{H}$, что $H'_i \cong H_i$, граф H'_i имеет сокращенную матрицу смежности A'_i , $i = 1, \dots, N$, и любое ребро графа G принадлежит хотя бы одному из подграфов $H'_1, \dots, H'_N$. Следовательно, взаимно однозначное отображение $F': H_i \leftrightarrow H'_i$, $i = 1, \dots, N$, представляет собой покрытие графа G .

Если отображение F есть точное покрытие верхнего сокращенного треугольника матрицы M матрицами $A_1, \dots, A_N$, то усеченные подматрицы $A'_1, \dots, A'_N$ матрицы M не пересекаются по единицам, поэтому подграфы $H'_1, \dots, H'_N$ графа G не имеют общих ребер. Следовательно, отображение F' представляет собой точное покрытие графа G графами $H_1, \dots, H_N$.

Теорема доказана.

3. Точное покрытие тождественной матрицы $(0, 1)$ -матрицами специального вида

Пусть e, l — целые числа, $l \geq 1$. Через $l \mid e$ обозначим тот факт, что e делится на l . Пусть c, k — целые числа, $k \geq 0$. Через $\{c\}^k$ обозначим последовательность $c, c, \dots, c$ длины k . Через $\{*\}^k$ обозначим произвольную последовательность из нулей и единиц длины k .

Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ — строки длины n , $n \geq 1$. Строка $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ называется суммой строк a, b и обозначается $a + b$.

Пусть a — $(0, 1)$ -строка длины n . Если a содержит хотя бы одну единицу, то через $d(a)$ обозначим позицию последней (то есть самой правой) единицы в строке a , в противном случае положим $d(a) = n + 1$. Через $b(a)$ обозначим число нулей, лежащих левее первой единицы в строке a , а через $e(a)$ — число единиц в a ; $(0, 1)$ -строка называется сплошной, если все ее единицы идут подряд.

Пусть a — $(0, 1)$ -строка длины n , $n \geq 1$, и пусть l_1, l_2 — целые неотрицательные числа. Добавим к a слева l_1 нулей и справа l_2 нулей. Полученная строка длины $n + l_1 + l_2$ называется (l_1, l_2) -расширением строки a и обозначается $\text{ext}_{l_1, l_2}(a)$.

Пусть $a_1, \dots, a_r$, $r \geq 1$, — $(0, 1)$ -строки длины $n \geq 1$, s, l — натуральные числа и $\min(s, r) = 1$. Положим

$$g = \begin{cases} \text{ext}_{0, (r-1)l}(a_1) + \text{ext}_{l, (r-2)l}(a_2) + \dots + \text{ext}_{(r-1)l, 0}(a_r), & s = 1, \\ \text{ext}_{0, (s-1)l}(a_1) + \text{ext}_{l, (s-2)l}(a_1) + \dots + \text{ext}_{(s-1)l, 0}(a_1), & s > 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Строка g длины $n + (sr - 1)l$ называется агрегацией строк $a_1, \dots, a_r$ с параметрами s, l и обозначается $\text{agr}_l^s(a_1, \dots, a_r)$.

Рассмотрим пример. Пусть $a_1 = (1001)$, $a_2 = (0111)$. Тогда

$$\text{agr}_1^1(a_1, a_2) = \text{ext}_{0, 1}(a_1) + \text{ext}_{1, 0}(a_2) = (10010) + (00111) = (10121),$$

$$\text{agr}_2^2(a_1) = \text{ext}_{0, 2}(a_1) + \text{ext}_{2, 0}(a_1) = (100100) + (001001) = (101101).$$

Заметим, что для любого натурального l и любой $(0, 1)$ -строки a выполнено равенство $\text{agr}_l^1(a) = a$.

Группа $(0, 1)$ -строк $a_1, \dots, a_r$, $r \geq 1$, называется агрегируемой с параметрами s, l , где s, l — натуральные числа, если $\min(s, r) = 1$, $(sr - 1)l < d(a_1) - b(a_1)$ и агрегация $\text{agr}_l^s(a_1, \dots, a_r)$ представляет собой сплошную $(0, 1)$ -строку. Группа $(0, 1)$ -строк $a_1, \dots, a_r$, $r \geq 1$, называется агрегируемой, если существуют такие натуральные числа s, l , что группа $a_1, \dots, a_r$ является агрегируемой с параметрами s, l . Если $(0, 1)$ -строка a представляет собой агрегируемую группу, то она называется агрегируемой. Если для $(0, 1)$ -матрицы A существует разбиение строк на агрегируемые группы, то $(0, 1)$ -матрица A называется агрегируемой.

Рассмотрим пример. Строка $a = (0101)$ является агрегируемой с параметрами 2, 1, так как $\text{agr}_1^2(a) = (01010) + (00101) = (01111)$. Матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является агрегируемой, так как ее первая строка агрегируема с параметрами 2, 1, а вторая — с параметрами 1, 1.

Из определения агрегации $(0, 1)$ -строк с параметрами s, l вытекает следующая лемма.

Лемма 4. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — $(0, 1)$ -строка длины n , $n \geq 1$, s, l — натуральные числа, $(s-1)l < d(a) - b(a)$, и пусть $g = \text{agr}_l^s(a) = (g_1, \dots, g_{n+(s-1)l})$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Если g представляет собой $(0, 1)$ -строку, то $b(g) = b(a)$, $d(g) = d(a) + (s-1)l$.

(2) Для любого $i = 1, \dots, b(a)$ справедливо равенство $g_i = a_i$.

(3) Для любого $t = 0, 1, \dots, s-1$ и любого $k = 1, \dots, l$

$$gb(a)+tl+k = ab(a)+k + ab(a)+l+k + \dots + ab(a)+tl+k.$$

(4) Для любого $i = b(a) + (s-1)l + 1, \dots, d(a)$

$$g_i = a_i + a_{i-l} + \dots + a_{i-(s-1)l}.$$

(5) Для любого $t = 0, 1, \dots, s-1$ и любого $k = 0, 1, \dots, l-1$

$$gd(a)+(s-1)l-tl-k = ad(a)-k + ad(a)-l-k + \dots + ad(a)-tl-k.$$

(6) Для любого $i = d(a) + (s-1)l + 1, \dots, n$ справедливо равенство $g_i = a_i$.

Лемма 5. Пусть s, l, n — натуральные числа, $a = (a_1, \dots, a_n)$ — $(0, 1)$ -строка длины n .

Если $s = 1$, то строка a является агрегируемой с параметрами s, l тогда и только тогда, когда a — сплошная $(0, 1)$ -строка.

Если $s \geq 2$, то a является агрегируемой с параметрами s, l тогда и только тогда, когда

$$a = \{0\}^{b(a)} \{1\}^l \{0\}^{(s-1)l} q \{1\}^l \{0\}^{n-d(a)}, \quad (3.2)$$

где

$$q = \frac{d(a) - b(a) - l}{sl} \geq 1.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из равенства $\text{agr}_l^1(a) = a$.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Докажем необходимость.

Пусть $s \geq 2$, $l \geq 1$, строка a является агрегируемой с параметрами s и l , и пусть $g = (g_1, \dots, g_{n+(s-1)l}) = \text{agr}_l^s(a)$ — агрегация строки a , представляющая собой сплошную $(0, 1)$ -строку.

1. Покажем, что $(d(a) - b(a) - l)/(sl) \geq 1$. Из определения агрегируемой строки вытекает, что $(s - 1)l < d(a) - b(a)$. Поскольку g — сплошная $(0, 1)$ -строка, из п. 1 леммы 4 вытекает, что

$$g_{b(a)+1} = g_{b(a)+2} = \dots = g_{d(a)+(s-1)l} = 1. \quad (3.3)$$

Согласно п. 3 той же леммы, для любого $t = 0, 1, \dots, s - 1$ и любого $k = 1, \dots, l$ выполняется равенство

$$g_{b(a)+tl+k} = a_{b(a)+k} + a_{b(a)+l+k} + \dots + a_{b(a)+tl+k}. \quad (3.4)$$

Так как

$$\begin{aligned} b(a) + tl + k &\leq b(a) + sl < d(a) - (s - 1)l + sl \leq d(a) + (s - 1)l, \\ b(a) + tl + k &\geq b(a) + 1, \end{aligned}$$

из (3.3) и (3.4) при $t = 0$ вытекает, что $g_{b(a)+k} = a_{b(a)+k} = 1$ для любого $k = 1, \dots, l$. Отсюда и из (3.3) и (3.4) при $t \geq 1$ следует, что $a_{b(a)+l+k} + \dots + a_{b(a)+tl+k} = 0$ для любого $t = 1, \dots, s - 1$ и любого $k = 1, \dots, l$. Таким образом,

$$a_{b(a)+k} = \begin{cases} 1, & k = 1, \dots, l, \\ 0, & k = l + 1, \dots, sl. \end{cases} \quad (3.5)$$

Согласно п. 5 леммы 4 для любого $t = 0, 1, \dots, s - 1$ и любого $k = 0, 1, \dots, l - 1$ выполняется равенство

$$g_{d(a)+(s-1)l-tl-k} = a_{d(a)-k} + a_{d(a)-l-k} + \dots + a_{d(a)-tl-k}. \quad (3.6)$$

Так как

$$\begin{aligned} d(a) + (s - 1)l - tl - k &> b(a) + (s - 1)l - l + 1 \geq b(a) + 1, \\ d(a) + (s - 1)l - tl - k &\leq d(a) + (s - 1)l, \end{aligned}$$

из равенств (3.3) и (3.6) при $t = 0$ вытекает, что $g_{d(a)+(s-1)l-k} = a_{d(a)-k} = 1$ для любого $k = 0, 1, \dots, l - 1$. Отсюда и из равенств (3.3) и (3.6) при $t \geq 1$ следует, что $a_{d(a)-l-k} + \dots + a_{d(a)-tl-k} = 0$ для любых $t = 1, \dots, s - 1$, $k = 0, 1, \dots, l - 1$. Таким образом,

$$a_{d(a)-k} = \begin{cases} 1, & k = 0, \dots, l - 1, \\ 0, & k = l, \dots, sl - 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Поскольку $(s - 1)l < d(a) - b(a)$ и $s \geq 2$, то $d(a) - b(a) > l$. Следовательно, строка a не является сплошной, так как в противном случае было бы выполнено неравенство $d(a) - b(a) \leq l$. Отсюда и из равенств (3.5), (3.7) вытекает, что $b(a) + sl \leq d(a) - l$, то есть $(d(a) - b(a) - l)/sl \geq 1$.

2. Положим $q = [(d(a) - b(a) - l)/(sl)]$, $q \geq 1$. Покажем, что для любого целого $c = 0, 1, \dots, q$ выполнены равенства

$$a_{b(a)+csl+k} = 1, \quad k = 1, \dots, l, \quad (3.8)$$

а для любого $c = 0, 1, \dots, q-1$ выполнены равенства

$$a_{b(a)+csl+k} = 0, \quad k = l+1, \dots, sl. \quad (3.9)$$

Предположим, что для некоторого c , $0 \leq c \leq q-1$, выполнено равенство (3.8). Очевидно, что для любого $k = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} b(a) + csl + k + (s-1)l &\geq b(a) + (s-1)l + 1, \\ b(a) + csl + k + (s-1)l &\leq b(a) + (q-1)sl + l + sl - l = b(a) + qsl \\ &\leq b(a) + d(a) - b(a) - l < d(a). \end{aligned}$$

Поэтому из п. 4 леммы 4 вытекает, что для любого $k = 1, \dots, l$

$$gb(a)+csl+(s-1)l+k = a_{b(a)+csl+(s-1)l+k} + \dots + a_{b(a)+csl+l+k} + a_{b(a)+csl+k}. \quad (3.10)$$

Из равенств (3.8) и (3.3) следует, что последнее слагаемое в правой части (3.10) равно единице и левая часть также равна единице. Значит, $a_{b(a)+csl+l+k} = 0$ для любого $k = 1, \dots, l$ и любого $t = 1, \dots, s-1$, а следовательно, для данного c выполняется равенство (3.9).

Предположим теперь, что для некоторого c , $0 \leq c \leq q-1$, выполнено равенство (3.9). Очевидно, что для любого $k = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} b(a) + (c+1)sl + k &> b(a) + (s-1)l + 1, \\ b(a) + (c+1)sl + k &\leq b(a) + qsl + l \leq b(a) + d(a) - b(a) - l + l = d(a). \end{aligned}$$

Поэтому из п. 4 леммы 4 вытекает, что для любого $k = 1, \dots, l$

$$gb(a)+csl+sl+k = a_{b(a)+csl+sl+k} + a_{b(a)+csl+(s-1)l+k} + \dots + a_{b(a)+csl+l+k}. \quad (3.11)$$

Из равенств (3.9) и (3.3) следует, что все слагаемые в правой части (3.11), кроме самого первого, равны нулю, а левая часть равна единице. Значит, $a_{b(a)+(c+1)sl+k} = 1$ для любого $k = 1, \dots, l$, то есть равенство (3.8) выполняется для $c+1$.

Таким образом, мы показали, что если для некоторого c , $0 \leq c \leq q-1$, выполнено равенство (3.8), то для того же самого c выполнено и равенство (3.9), а если для c выполнено равенство (3.9), то для $c+1$ выполнено равенство (3.8). Отсюда, учитывая то, что при $c=0$ равенства (3.8) и (3.9) вытекают из (3.5), получаем, что равенство (3.9) выполняется для любого $c = 0, 1, \dots, q-1$, а равенство (3.8) — для любого $c = 0, 1, \dots, q$.

3. Из п. 2 следует, что строка a имеет вид

$$a = \{0\}^{b(a)} \{1\}^l \{0\}^{(s-1)l} \{1\}^l \{*\}^r \{0\}^{n-d(a)}, \quad (3.12)$$

где $q = [(d(a) - b(a) - l)/(sl)] \geq 1$, $r = d(a) - b(a) - slq - l$. Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям п. 2, и заменяя в них равенство (3.5) на (3.7), мы придем к выводу, что для любого целого $c = 0, 1, \dots, q$ выполнено равенство

$$a_{d(a)-csl-k} = 1, \quad k = 0, 1, \dots, l-1,$$

для любого $c = 0, 1, \dots, q - 1$ выполнено равенство

$$a_{d(a)-csl-k} = 0, \quad k = l, \dots, sl - 1,$$

и строка a имеет вид

$$a = \{0\}^{b(a)} \{*\}^r \{1\}^l \{0\}^{(s-1)l} \{1\}^l \{0\}^{n-d(a)}. \quad (3.13)$$

Из равенств (3.12) и (3.13) вытекает, что выполнено одно из двух условий: либо $r = 0$, либо $r \geq sl$. Но из определения величины q следует, что

$$\begin{aligned} q &> (d(a) - b(a) - l)/(sl) - 1, \\ r &< d(a) - b(a) - l - d(a) + b(a) + l + sl = sl, \end{aligned}$$

а значит, $r = 0$ и $q = (d(a) - b(a) - l)/(sl)$. Отсюда и из равенства (3.12) следует утверждение леммы.

Докажем достаточность.

Пусть $s \geq 2$, $l \geq 1$, $q = (d(a) - b(a) - l)/(sl) \geq 1$ и строка a имеет вид

$$a = \{0\}^{b(a)} \{1\}^l \{0\}^{(s-1)l} \{1\}^l \{0\}^{n-d(a)}. \quad (3.14)$$

Очевидно, что $d(a) - b(a) \geq sl + l > (s-1)l$. Теперь покажем, что агрегация $g = \text{agr}_l^f(a)$ представляет собой сплошную $(0, 1)$ -строку. Из (3.14) вытекают следующие равенства:

$$a_i = 0, \quad i = 1, \dots, b(a), \quad (3.15)$$

$$a_{b(a)+csl+k} = 1, \quad k = 1, \dots, l, \quad c = 0, 1, \dots, q, \quad (3.16)$$

$$a_{b(a)+csl+k} = 0, \quad k = l + 1, \dots, sl, \quad c = 0, 1, \dots, q - 1, \quad (3.17)$$

$$a_i = 0, \quad i = d(a) + 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

Из п. 2 леммы 4 и равенства (3.15) вытекает, что $g_i = 0$ для любого $i = 1, \dots, b(a)$. Из п. 3 леммы 4 и равенств (3.16), (3.17) при $c = 0$ следует, что для любого $t = 0, 1, \dots, s - 1$ и любого $k = 1, \dots, l$

$$g_{b(a)+tl+k} = a_{b(a)+k} = 1,$$

а значит, $g_i = 1$ для любого $i = b(a) + 1, \dots, b(a) + sl$.

Пусть теперь $b(a) + sl + 1 \leq i \leq d(a)$. Представим число i в виде $i = b(a) + csl + k$, где либо $1 \leq c \leq q - 1$ и $1 \leq k \leq sl$, либо $c = q$ и $1 \leq k \leq l$. Тогда из п. 4 леммы 4 и равенств (3.16), (3.17) можно заключить, что

$$g_i = a_{b(a)+csl+k} + a_{b(a)+csl+k-l} + \dots + a_{b(a)+csl+k-(s-1)l} = 1.$$

Из п. 5 леммы 4, равенства (3.16) для $c = q$ и равенства (3.17) для $c = q - 1$ вытекает, что для любого $t = 0, 1, \dots, s - 1$ и любого $k = 0, 1, \dots, l - 1$

$$g_{d(a)+(s-1)l-tl-k} = a_{d(a)-k} = 1,$$

а значит, $g_i = 1$ при любом $i = d(a) + 1, \dots, d(a) + (s - 1)l$. Из п. 6 леммы 4 и равенства (3.18) следует, что $g_i = 0$ для любого $i = d(a) + (s - 1)l + 1, \dots, n$.

Таким образом, мы показали, что $g = \{0\}^{b(a)} \{1\}^{slq+l} \{0\}^{n-d(a)}$, то есть строка g является сплошной $(0, 1)$ -строкой.

Лемма доказана.

Следствие 1. Если $(0, 1)$ -строка a является агрегируемой с параметрами s, l и $s \geq 2$, то $e(a)$ делится на l .

Теорема 2. Пусть $A = A_{r \times l}$ — агрегируемая $(0, 1)$ -матрица без нулевых строк, содержащая ρ единиц. Тогда существует натуральное число $N \leq l^{2r+1}$ такое, что с помощью N матриц A можно точно покрыть тождественную матрицу $E_{\rho \times N}$.

Доказательство. Разобьем строки матрицы A на агрегируемые группы $R^1, \dots, R^m$, $m \leq r$. Пусть группа R^i состоит из строк $a_1^i, \dots, a_{r^i}^i$, где $1 \leq r^i \leq r$ и $r^1 + \dots + r^m = r$, и пусть агрегация $g^i = \text{agr}_{l^i}^{s^i}(a_1^i, \dots, a_{r^i}^i)$ является сплошной $(0, 1)$ -строкой, причем $\min(s^i, r^i) = 1$ и $(s^i r^i - 1)l^i < d(a_1^i) - b(a_1^i)$, $i = 1, \dots, m$. Положим

$$e^i = e(g^i) = s^i(e(a_1^i) + \dots + e(a_{r^i}^i)), \quad i = 1, \dots, m.$$

Очевидно, что $e^1/s^1 + \dots + e^m/s^m = e(A) = \rho$ и если $s^i \geq 2$, то по следствию 1 из леммы 5 $l^i \mid (e^i/s^i)$. Очевидно также, что $e^i \geq 1$, так как матрица A не содержит нулевых строк. Пусть N — минимальное общее кратное чисел $e^1, \dots, e^m$, не меньшее t , то есть $N = \text{lcm}(e^1, \dots, e^m) \lceil t / \text{lcm}(e^1, \dots, e^m) \rceil$, где $\text{lcm}(a_1, \dots, a_n)$ означает наименьшее общее кратное чисел $a_1, \dots, a_n$.

Покажем, что с помощью N матриц A можно точно покрыть тождественную матрицу $E_{\rho \times N}$. Через $B^k = \|b_{xy}^k\|$, $k = 1, \dots, N$, обозначим k -ю матрицу A , участвующую в покрытии. Через $D = \|d_{ij}\|$ обозначим тождественную матрицу $E_{\rho \times N}$. Построим такое взаимно однозначное соответствие между матрицами B^k и усеченными подматрицами D^k матрицы D , $k = 1, \dots, N$, при котором любая единица матрицы D принадлежит ровно одной из усеченных подматриц $D^1, \dots, D^N$ и $B^k \cong D^k$ для любого $k = 1, \dots, N$.

Пусть строка с номером x матрицы A принадлежит группе $R^{i(x)}$ и имеет в ней номер $j(x)$, $x = 1, \dots, r$, $1 \leq i(x) \leq m$, $1 \leq j(x) \leq r^{i(x)}$. Для каждой тройки (k, x, y) , где $k = 1, \dots, N$, $x = 1, \dots, r$, $y = 1, \dots, t$, определим величины $w_k(x)$, $u_k(x)$, $v_k(y)$ следующим образом:

$$w_k(x) = \begin{cases} A, & s^{i(x)} = 1, \\ B, & s^{i(x)} \geq 2, \end{cases} \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (k - (j(x) - 1)l^{i(x)} - 1) \mod e^{i(x)}, \\ B &= l^{i(x)} \left(\left[\frac{k-1}{s^{i(x)}l^{i(x)}} \right] \mod \left(\frac{e^{i(x)}}{s^{i(x)}l^{i(x)}} \right) \right) + (k-1) \mod (l^{i(x)}), \\ u_k(x) &= \sum_{q=1}^{i(x)-1} \frac{e^q}{s^q} + w_k(x) + 1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$v_k(y) = (k + y - 2) \mod N + 1. \quad (3.21)$$

Пусть отображение $F: B^k \rightarrow D^k = \|d_{xy}^k\|$ переводит матрицу B^k в такую усеченную подматрицу D^k размера $r \times t$ матрицы D , расположенную в строках с номерами $u_k(1), \dots, u_k(r)$ и столбцах с номерами $v_k(1), \dots, v_k(t)$, что $b_{xy}^k = d_{xy}^k$.

1. Покажем, что такое определение отображения матриц корректно, то есть $1 \leq u_k(x) \leq \rho$, $1 \leq v_k(y) \leq N$, при этом $u_k(x_1) \neq u_k(x_2)$, если $x_1 \neq x_2$, и $v_k(y_1) \neq v_k(y_2)$, если $y_1 \neq y_2$.

Пусть $1 \leq k \leq N$, $1 \leq x \leq r$, $1 \leq y \leq t$. Неравенство $1 \leq v_k(y) \leq N$, очевидно, вытекает из (3.21). Покажем справедливость неравенства $1 \leq u_k(x) \leq \rho$. Если $s^{i(x)} = 1$, то из (3.19) следует, что $0 \leq w_k(x) < e^{i(x)}$. Если же $s^{i(x)} \geq 2$, то из (3.19) следует, что

$$0 \leq w_k(x) < l^{i(x)} \left(\frac{e^{i(x)}}{s^{i(x)} l^{i(x)}} - 1 \right) + l^{i(x)} = \frac{e^{i(x)}}{s^{i(x)}}.$$

Отсюда вытекает, что при любом значении $s^{i(x)}$

$$0 \leq w_k(x) < \frac{e^{i(x)}}{s^{i(x)}}, \quad (3.22)$$

а следовательно,

$$1 \leq u_k(x) \leq \sum_{q=1}^{i(x)-1} \frac{e^q}{s^q} + \frac{e^{i(x)}}{s^{i(x)}} \leq \sum_{q=1}^m \frac{e^q}{s^q} = \rho.$$

Таким образом, для любых $k = 1, \dots, N$, $x = 1, \dots, r$, $y = 1, \dots, t$ выполнены неравенства

$$1 \leq u_k(x) \leq \rho, \quad 1 \leq v_k(y) \leq N. \quad (3.23)$$

Пусть $1 \leq x_1, x_2 \leq r$ и $x_1 \neq x_2$. Покажем, что тогда $u_k(x_1) \neq u_k(x_2)$. Положим $i(x_1) = i_1$, $i(x_2) = i_2$, $j(x_1) = j_1$, $j(x_2) = j_2$ и рассмотрим два случая.

В первом случае $i_1 \neq i_2$, то есть строки матрицы A с номерами x_1, x_2 принадлежат разным группам R^{i_1}, R^{i_2} . Без ограничения общности будем считать, что $i_1 < i_2$. Из неравенства (3.22) следует, что $w_k(x_2) \geq 0$ и $w_k(x_1) < e^{i_1}/s^{i_1}$. Отсюда и из (3.20) вытекает, что

$$u_k(x_2) - u_k(x_1) = \sum_{q=i_1}^{i_2-1} \frac{e^q}{s^q} + w_k(x_2) - w_k(x_1) \geq \frac{e^{i_1}}{s^{i_1}} - w_k(x_1) > 0,$$

то есть $u_k(x_1) \neq u_k(x_2)$.

Во втором случае $i_1 = i_2 = i$, то есть строки матрицы A с номерами x_1, x_2 принадлежат одной группе R^i . Следовательно, $j_1 \neq j_2$, $r^i \geq 2$ и $s^i = 1$. Без ограничения общности будем считать, что $j_1 < j_2$. Положим $l^i = l$, $e^i = e$, $b(a_1^i) = b$, $d(a_1^i) = d$. Тогда $(r^i - 1)l < d - b$.

Предположим, что $u_k(x_1) = u_k(x_2)$. Тогда из (3.20) вытекает равенство $w_k(x_1) = w_k(x_2)$. Поскольку $s^i = 1$, отсюда и из (3.19) следует, что

$$k - (j_1 - 1)l \equiv k - (j_2 - 1)l \pmod{e},$$

а значит, $e \mid (j_2 - j_1)l$. С другой стороны, $0 < (j_2 - j_1)l \leq (r^i - 1)l < d - b < e$. Таким образом, предположив, что $u_k(x_1) = u_k(x_2)$, мы пришли к противоречию.

Пусть теперь $1 \leq y_1, y_2 \leq t$ и $y_1 \neq y_2$. Покажем, что в этом случае $v_k(y_1) \neq v_k(y_2)$. Без ограничения общности будем считать, что $y_1 < y_2$. Пусть $v_k(y_1) = v_k(y_2)$. Тогда из (3.21) вытекает, что $k + y_1 \equiv k + y_2 \pmod{N}$, а значит, $N \mid (y_2 - y_1)$. С другой стороны, $0 < y_2 - y_1 < t \leq N$. Таким образом, мы пришли к противоречию, а следовательно, $v_k(y_1) \neq v_k(y_2)$.

2. Покажем, что при отображении F любая единица матрицы D принадлежит ровно одной из усеченных подматриц $D^1, \dots, D^N$.

Пусть для некоторых $k_1, k_2, x_1, x_2, y_1, y_2$ таких, что $1 \leq k_1, k_2 \leq N$, $1 \leq x_1, x_2 \leq r$, $1 \leq y_1, y_2 \leq t$ и $(k_1, x_1, y_1) \neq (k_2, x_2, y_2)$, верно равенство $b_{x_1, y_1}^{k_1} = b_{x_2, y_2}^{k_2} = 1$. Докажем,

что тогда $(u_{k_1}(x_1), v_{k_1}(y_1)) \neq (u_{k_2}(x_2), v_{k_2}(y_2))$. Положим $i(x_1) = i_1, i(x_2) = i_2, j(x_1) = j_1, j(x_2) = j_2$ и рассмотрим два случая.

В первом случае $i_1 \neq i_2$. Без ограничения общности будем считать, что $i_1 < i_2$. Из неравенства (3.22) следует, что $w_{k_2}(x_2) \geq 0$ и $w_{k_1}(x_1) < e^{i_1}/s^{i_1}$. Отсюда и из (3.20) вытекает, что

$$u_{k_2}(x_2) - u_{k_1}(x_1) = \sum_{q=i_1}^{i_2-1} \frac{e^q}{s^q} + w_{k_2}(x_2) - w_{k_1}(x_1) \geq \frac{e^{i_1}}{s^{i_1}} - w_{k_1}(x_1) > 0,$$

то есть $u_{k_1}(x_1) \neq u_{k_2}(x_2)$.

Во втором случае $i_1 = i_2 = i$. Без ограничения общности будем считать, что $j_1 \leq j_2$. Положим $l^i = l, e^i = e, s^i = s, b(a_1^i) = b, d(a_1^i) = d, g^i = g$. Тогда $(sr^i - 1)l < d - b$. Предположим, что $(u_{k_1}(x_1), v_{k_1}(y_1)) = (u_{k_2}(x_2), v_{k_2}(y_2))$. Тогда из равенств (3.20), (3.21) следует, что

$$w_{k_1}(x_1) = w_{k_2}(x_2), \quad (3.24)$$

$$k_1 + y_1 \equiv k_2 + y_2 \pmod{N}. \quad (3.25)$$

Рассмотрим два случая. В первом случае $s = 1$. Из (3.24) и (3.19) вытекает, что $k_1 - (j_1 - 1)l \equiv k_2 - (j_2 - 1)l \pmod{e}$, а следовательно,

$$e \mid (k_1 - k_2 + (j_2 - j_1)l). \quad (3.26)$$

Поскольку $e \mid N$, из (3.25) вытекает, что

$$e \mid (k_1 - k_2 + y_1 - y_2). \quad (3.27)$$

Если $x_1 = x_2 = x$, то $j_1 = j_2 = j, b_{x,y_1}^{k_1} = b_{x,y_2}^{k_2} = 1$, а значит, $|y_2 - y_1| < e(a_j^i) \leq e$. С другой стороны, из (3.26) и (3.27) следует, что $e \mid (y_1 - y_2)$, значит, $y_2 = y_1$. Поскольку $1 \leq k_1, k_2 \leq N$, в этом случае из (3.25) вытекает, что $k_1 = k_2$, но это невозможно, так как по нашему предположению $(k_1, x_1, y_1) \neq (k_2, x_2, y_2)$. Значит, $x_1 \neq x_2$ и $j_1 < j_2$.

Из (3.26) и (3.27) вытекает, что $y_2 - y_1 + (j_2 - j_1)l = ce$, где c — целое число. Как уже было отмечено выше при введении обозначений, агрегация g строк $a_1^i, \dots, a_{r^i}^i$ представляет собой сплошную $(0, 1)$ -строку. Пусть $g = (g_1, \dots, g_{l+(r^i-1)l})$. Из определения агрегации строк вытекает, что

$$g \geq \text{ext}_{(j_1-1)l, (r-j_1)l}(a_{j_1}^i), \quad g \geq \text{ext}_{(j_2-1)l, (r-j_2)l}(a_{j_2}^i),$$

а следовательно,

$$\begin{aligned} g_{y_1+(j_1-1)l} &\geq b_{x_1, y_1+(j_1-1)l-(j_1-1)l}^{k_1} = b_{x_1, y_1}^{k_1}, \\ g_{y_2+(j_2-1)l} &\geq b_{x_2, y_2+(j_2-1)l-(j_2-1)l}^{k_2} = b_{x_2, y_2}^{k_2}. \end{aligned}$$

Отсюда, $g_{y_1+(j_1-1)l} = g_{y_2+(j_2-1)l} = 1$ и $|y_2 + (j_2 - 1)l - y_1 - (j_1 - 1)l| < e(g) = e$, то есть $|y_2 - y_1 + (j_2 - j_1)l| < e$. Значит, $c = 0$, и $y_2 = y_1 - (j_2 - j_1)l$. Из определения агрегации строк вытекает, что $g \geq \text{ext}_{(j_1-1)l, (r-j_1)l}(a_{j_1}^i) + \text{ext}_{(j_2-1)l, (r-j_2)l}(a_{j_2}^i)$, а следовательно,

$$g_{y_1+(j_1-1)l} \geq b_{x_1, y_1+(j_1-1)l-(j_1-1)l}^{k_1} + b_{x_2, y_1+(j_1-1)l-(j_2-1)l}^{k_2} = b_{x_1, y_1}^{k_1} + b_{x_2, y_2}^{k_2} = 2.$$

Но тогда получается, что агрегация g не является $(0, 1)$ -строкой, а это противоречит нашему предположению.

Во втором случае $s \geq 2$. Тогда $r^i = 1$, $j_1 = j_2 = 1$, $x_1 = x_2 = x$. Из (3.24) и (3.19) следует, что

$$l \left(\left\lfloor \frac{k_1 - 1}{sl} \right\rfloor \bmod \frac{e}{sl} - \left\lfloor \frac{k_2 - 1}{sl} \right\rfloor \bmod \frac{e}{sl} \right) = (k_2 - 1) \bmod l - (k_1 - 1) \bmod l. \quad (3.28)$$

Если $y_1 = y_2$, то из (3.25) следует, что $k_1 = k_2$, поскольку $1 \leq k_1, k_2 \leq N$. Отсюда вытекает, что $(k_1, x_1, y_1) = (k_2, x_2, y_2)$, но это противоречит нашему предположению. Значит, $y_1 \neq y_2$. Очевидно, что $|(k_2 - 1) \bmod l - (k_1 - 1) \bmod l| < l$, поэтому обе части равенства (3.28) равны нулю. Отсюда следует, что

$$l \mid (k_2 - k_1), \quad (3.29)$$

$$e/(sl) \mid \lfloor (k_2 - 1)/(sl) \rfloor - \lfloor (k_1 - 1)/(sl) \rfloor. \quad (3.30)$$

Так как $l \mid (e/s)$ и $e \mid N$, то $sl \mid N$. Поэтому из (3.25) и (3.29) следует, что $l \mid (y_2 - y_1)$. Поскольку $b_{x,y_1}^{k_1} = b_{x,y_2}^{k_2} = 1$ и $y_2 \neq y_1$, из второго утверждения леммы 5 вытекает, что $sl \mid (y_2 - y_1)$, откуда, учитывая (3.25), получаем, что $sl \mid (k_2 - k_1)$. Пусть $k_2 = k_1 + csl$, где c — целое число. Тогда из (3.30) следует, что $e/(sl) \mid c$, поэтому $e \mid csl$ и $e \mid (k_2 - k_1)$. Учитывая (3.25), получаем, что $e \mid (y_2 - y_1)$, но это невозможно, так как $y_2 \neq y_1$ и $|y_2 - y_1| < d(a_1^i) - b(a_1^i) = d - b \leq e$. Таким образом, предположив, что $i_1 = i_2 = i$, мы пришли к противоречию.

Обозначим через N_3 количество различных троек чисел (k, x, y) , для которых $b_{xy}^k = 1$, а через N_2 — количество различных пар $(u_k(x), v_k(y))$. Очевидно, что $N_3 = N\rho$. Из вышесказанного вытекает, что различным тройкам (k, x, y) , для которых $b_{xy}^k = 1$, соответствуют различные пары $(u_k(x), v_k(y))$, поэтому $N_2 \geq N_3$ и $N_2 \geq N\rho$. Но из неравенств (3.23) следует, что $N_2 \leq \rho N$, поэтому $N_2 = \rho N$. Таким образом, для любой пары чисел (u, v) , где $1 \leq u \leq \rho$, $1 \leq v \leq N$, существует ровно одна тройка (k, x, y) , $1 \leq k \leq N$, $1 \leq x \leq r$, $1 \leq y \leq t$, для которой $b_{xy}^k = 1$, $u_k(x) = u$ и $v_k(y) = v$. Отсюда вытекает, что любая единица матрицы D принадлежит ровно одной из усеченных подматриц $D^1, \dots, D^N$.

3. Из п. 1, 2 вытекает, что F — такое взаимно однозначное соответствие, при котором любая единица матрицы $D = E_{\rho \times N}$ принадлежит ровно одной из ее усеченных подматриц $D^1, \dots, D^N$ и $D^k \cong B^k \cong A$ для любого $k = 1, \dots, N$. Значит, тождественная матрица $E_{\rho \times N}$ точно покрывается с помощью N матриц A . Теперь оценим величину N . Ясно, что

$$N = \text{lcm}(e^1, \dots, e^m) \left\lceil \frac{t}{\text{lcm}(e^1, \dots, e^m)} \right\rceil \leq te^1 \dots e^m \leq t \prod_{i=1}^m s^i r^i \max_{1 \leq j \leq r^i} e(a_j^i).$$

Так как $m \leq r$, $e(a_j^i) \leq t$ и $s^i r^i < (d(a_1^i) - b(a_1^i))/l^i + 1$, то есть

$$s^i r^i \leq \frac{d(a_1^i) - b(a_1^i)}{l^i} \leq t,$$

отсюда следует, что $N \leq t \cdot t^r \cdot t^r = t^{2r+1}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример применения описанного в теореме 2 алгоритма точного покрытия тождественной матрицы.

Пусть

$$A = A_{r \times t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тогда $r = 3$, $t = 4$, $\rho = 8$.

Поскольку агрегации

$$\begin{aligned} g^1 &= \text{agr}_1^2(0101) = (01111), \\ g^2 &= \text{agr}_2^1((1101), (1011)) = (111111) \end{aligned}$$

представляют собой сплошные $(0, 1)$ -строки, строки матрицы A разбиваются на две агрегируемые группы R^1 , R^2 , где группа R^1 содержит первую, а группа R^2 — третью и вторую строки. Отсюда следует, что матрица A является агрегируемой. Обозначим через a_1^1 первую, через a_1^2 третью, а через a_2^2 вторую строку матрицы A . Пусть группа R^i , $i = 1, 2$, содержит r^i строк и является агрегируемой с параметрами s^i , l^i . Тогда

$$r^1 = 1, \quad s^1 = 2, \quad l^1 = 1, \quad r^2 = 2, \quad s^2 = 1, \quad l^2 = 2.$$

Пусть строка матрицы A с номером x , $x = 1, 2, 3$, принадлежит группе $R^{i(x)}$ и имеет в ней номер $j(x)$. Очевидно, что

$$i(1) = 1, \quad j(1) = 1, \quad i(2) = 2, \quad j(2) = 2, \quad i(3) = 2, \quad j(3) = 1.$$

Пусть агрегация g^i , $i = 1, 2$, содержит e^i единиц. Тогда $e^1 = 4$ и $e^2 = 6$. Положим

$$N = \text{lcm}(e^1, e^2) \lceil t / \text{lcm}(e^1, e^2) \rceil = 12.$$

Построим точное покрытие тождественной матрицы $E_{8 \times 12}$ с помощью N матриц A .

Через $B^k = \|b_{xy}^k\|$, $k = 1, \dots, 12$, обозначим k -ю матрицу A , участвующую в покрытии. Для каждого $k = 1, \dots, 12$ матрице B^k поставим в соответствие усеченную подматрицу $D^k = \|d_{xy}^k\|$ матрицы $E_{8 \times 12}$, расположенную в строках с номерами $u_k(1), \dots, u_k(3)$ и столбцах с номерами $v_k(1), \dots, v_k(4)$, так, чтобы $b_{xy}^k = d_{xy}^k$, где величины $u_k(x)$, $v_k(y)$ определяются с помощью равенств (3.19)–(3.21). Очевидно, что тогда

$$\begin{aligned} u_k(1) &= w_k(1) + 1 = \lfloor (k-1)/2 \rfloor \bmod 2 + (k-1) \bmod 1 + 1 \\ &= \lfloor (k-1)/2 \rfloor \bmod 2 + 1, \\ u_k(2) &= e^1/s^1 + w_k(2) + 1 = 2 + (k-3) \bmod 6 + 1 = 3 + (k-3) \bmod 6, \\ u_k(3) &= e^1/s^1 + w_k(3) + 1 = 2 + (k-1) \bmod 6 + 1 = 3 + (k-1) \bmod 6, \\ v_k(1) &= (k-1) \bmod 12 + 1, \\ v_k(2) &= k \bmod 12 + 1, \\ v_k(3) &= (k+1) \bmod 12 + 1, \\ v_k(4) &= (k+2) \bmod 12 + 1. \end{aligned}$$

Сопоставим тождественной матрице $E_{8 \times 12}$ таблицу T из восьми строк и двенадцати столбцов, в которой на пересечении строки с номером u , $u = 1, \dots, 8$, и столбца с номером v , $v = 1, \dots, 12$, стоит такое число k , что $u = u_k(x)$, $v = v_k(y)$ и $b_{xy}^k = 1$.

Тогда таблица T будет выглядеть следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 6 & 5 & 6 & 9 & 10 & 9 \\ 12 & 11 & 12 & 3 & 4 & 3 & 4 & 7 & 8 & 7 & 8 & 11 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & 7 & 7 & 9 & 7 & 9 & 9 \\ 10 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 & 8 & 10 & 8 & 10 \\ 11 & 11 & 3 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 9 & 9 & 11 & 9 \\ 10 & 12 & 12 & 4 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 10 & 10 & 12 \\ 1 & 11 & 1 & 1 & 5 & 5 & 7 & 5 & 7 & 7 & 11 & 11 \\ 12 & 2 & 12 & 2 & 2 & 6 & 6 & 8 & 6 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

4. Алгоритм построения точного покрытия графа для слабо плотных базисов специального вида

Пусть двудольный граф $H \in \mathcal{H}$ имеет сокращенную матрицу смежности A , и пусть существует такая агрегируемая матрица A' , что $A \cong A'$. Тогда граф H называется агрегируемым.

Очевидно, что тривиальный граф, содержащийся в любом базисе, является агрегируемым.

Теорема 3. Для любого вещественного ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует алгоритм A_ε , который для любого слабо плотного базиса B с весом ρ , содержащего агрегируемый двудольный граф с ρ ребрами, и любого графа $G \in \mathcal{G}$ с r вершинами и q ребрами строит точное покрытие графа G в базисе B со сложностью $L_\varepsilon(q, \rho, \rho)$, где

$$L_\varepsilon(q, \rho, \rho) \leq \frac{q}{\rho} + \frac{\rho p^2}{\varepsilon \log_2 p} + \frac{\varepsilon}{2} p \log_2 p + 2\rho^{2\rho+1} p^{1+\varepsilon} + \frac{p}{2} + \varepsilon O((\log_2 p)^2). \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное вещественное число, $0 < \varepsilon < 1$, и пусть слабо плотный базис B с весом ρ содержит агрегируемый двудольный граф $H = H_{r,t} \in \mathcal{H}$ с ρ ребрами, $1 \leq \rho \leq rt$, имеющий сокращенную матрицу смежности $A = A_{r \times t}$, и тривиальный граф H^0 , имеющий сокращенную матрицу смежности $A^0 = A_{1 \times 1}^0 = (1)$. Пусть A' — такая агрегируемая матрица, что $A' \cong A$ и A' является сокращенной матрицей смежности двудольного графа H' с ρ ребрами. Тогда по лемме 1 $H' \cong H$, а матрица A' имеет размер $r \times t$ или $t \times r$. Поскольку $H \in \mathcal{H}$, матрица A' не содержит нулевых строк.

Пусть $G \in \mathcal{G}$ — произвольный граф, $q(G) = q$, $p(G) = p$, и пусть $M = M_{p \times p}$ — матрица смежности графа G . Построим точное покрытие верхнего сокращенного треугольника матрицы M матрицами A' и A^0 .

Положим $h = \lceil \log_2 p^\varepsilon \rceil$. Очевидно, что $1 \leq h \leq p$.

Через P_i , $i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil - 1$, обозначим подматрицу матрицы M , расположенную на пересечении строк с номерами $(i-1)h+1, \dots, ih$ и столбцов с номерами $ih+1, \dots, p$. Назовем эту подматрицу i -м прямоугольником. Обозначим через Q_i , $i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil$, подматрицу матрицы M , расположенную на пересечении строк с номерами $(i-1)h+1, \dots, \min(ih, p)$ и столбцов с номерами $(i-1)h+1, \dots, \min(ih, p)$. Назовем эту подматрицу i -м квадратом. Очевидно, что прямоугольник P_i содержит h строк и $p - ih$ столбцов, а квадрат Q_i — не более h строк и не более h столбцов.

Пусть e_i — число единиц, а c_i — число различных столбцов в прямоугольнике P_i . Тогда $1 \leq c_i \leq 2^h$. Разобьем столбцы прямоугольника P_i на c_i классов эквивалентности $R_1^i, \dots, R_{c_i}^i$, понимая под эквивалентностью равенство. Очевидно, что для любого

$i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil - 1$ и любого $j = 1, \dots, c_i$ группа столбцов R_j^i высоты h представляет собой подматрицу прямоугольника P_i , в которой любая строка либо единичная, либо нулевая, при этом каждый элемент прямоугольника P_i принадлежит ровно одной из подматриц $R_1^i, \dots, R_{c_i}^i$. Пусть матрица R_j^i содержит m_j^i столбцов, h_j^i единичных строк и $e_j^i = m_j^i h_j^i$ единиц.

Пусть $N \leq \max(t^{2r+1}, r^{2t+1})$ — такое натуральное число, что с помощью N матриц A' можно точно покрыть тождественную матрицу $E_{\rho \times N}$ (по теореме 2 такое N существует). Пусть I_j^i — матрица, состоящая из первых $\lfloor h_j^i/\rho \rfloor \rho$ единичных строк и первых $\lfloor m_j^i/N \rfloor N$ столбцов матрицы R_j^i .

Для любого $i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil - 1$ и любого $j = 1, \dots, c_i$ разобьем матрицу I_j^i на $l(i, j) = \lfloor h_j^i/\rho \rfloor \lfloor m_j^i/N \rfloor$ непересекающихся тождественных подматриц, содержащих по ρ строк и N столбцов. Каждую из них точно покроем с помощью N матриц A' описанным в теореме 2 способом. Единицы матрицы R_j^i , не принадлежащие матрице I_j^i , точно покроем с помощью $l_0(i, j) \leq \rho m_j^i + N h_j^i$ матриц A^0 . Для любого $i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil$ покроем верхний сокращенный треугольник квадрата Q_i с помощью $l_1(i) = (1/2)e(Q_i)$ матриц A^0 .

Таким образом мы построим точное покрытие матрицы M с помощью некоторого количества матриц A' и A^0 . Пусть L — сложность этого покрытия, $L_{A'}$ (соответственно L_{A^0}) — число участвующих в нем матриц A' (соответственно A^0), тогда $L = L_{A'} + L_{A^0}$. Оценим величины $L_{A'}$ и L_{A^0} . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} L_{A'} &= \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} l(i, j) N = N \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} \left\lfloor \frac{h_j^i}{\rho} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m_j^i}{N} \right\rfloor \\ &\leq \frac{N}{\rho N} \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} e_j^i = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} e_i \leq \frac{q}{\rho}. \\ L_{A^0} &= \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} l_0(i, j) + \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil} l_1(i) \leq \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \left(\rho \sum_{j=1}^{c_i} m_j^i + N \sum_{j=1}^{c_i} h_j^i \right) + \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil} \frac{h^2}{2} \\ &\leq \frac{p}{h} (\rho p + N 2^h h) + (p/h + 1) \frac{h^2}{2} = \rho \frac{p^2}{h} + N p 2^h + \frac{ph}{2} + \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

Так как $N \leq \max(t^{2r+1}, r^{2t+1}) \leq \rho^{2\rho+1}$ и $h = \lceil \log_2 p^\varepsilon \rceil = \lceil \varepsilon \log_2 p \rceil$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} L &= L_{A'} + L_{A^0} \leq \frac{q}{\rho} + \frac{\rho p^2}{\varepsilon \log_2 p} + \rho^{2\rho+1} p 2^{\lceil \log_2 p^\varepsilon \rceil} + \frac{1}{2} p \lceil \log_2 p^\varepsilon \rceil + \frac{1}{2} (\lceil \log_2 p^\varepsilon \rceil)^2 \\ &\leq \frac{q}{\rho} + \frac{\rho p^2}{\varepsilon \log_2 p} + 2\rho^{2\rho+1} p^{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} p \log_2 p + \frac{p}{2} + \varepsilon O((\log_2 p)^2), \end{aligned}$$

то есть для сложности L выполняется неравенство (4.1). По теореме 1 построенному нами точному покрытию матрицы M матрицами A' и A^0 соответствует точное покрытие графа G графами H' и H^0 той же сложности. Поскольку $H' \cong H$, применив описанный алгоритм, можно построить точное покрытие графа G графами H и H^0 со сложностью L , для которой выполняется неравенство (4.1). Теорема доказана.

Следствие 2. Если базис B с весом ρ является слабо плотным и содержит агрегируемый двудольный граф с ρ ребрами, то

$$l_B(q, p) \leq \frac{q}{\rho} + O\left(\frac{p^2}{\log_2 p}\right).$$

5. Алгоритм построения точного покрытия графа для произвольного слабо плотного базиса

Пусть $A^1 = \|a_{ij}^1\|$ и $A^2 = \|a_{ij}^2\|$ — матрицы размера $r \times t$, $r, t \geq 1$. Тогда матрица $A = \|a_{ij}^1 + a_{ij}^2\|$ размера $r \times t$ называется суммой матриц A^1 и A^2 и обозначается $A^1 + A^2$.

Пусть $A = A_{r \times t} = \|a_{ij}\|$, $r, t \geq 1$, — $(0, 1)$ -матрица, m, n — натуральные числа. Тогда (m, n) -разверткой матрицы A называется $(0, 1)$ -матрица $\mathcal{R}^{m,n}(A) = \|r_{xy}\|$, содержащая mr строк и nt столбцов, в которой

$$r_{xy} = a_{(x-1) \bmod r + 1, (y-1) \bmod t + 1}, \quad x = 1, \dots, mr, \quad y = 1, \dots, nt.$$

Очевидно, что $e(\mathcal{R}^{m,n}(A)) = mne(A)$, $z(\mathcal{R}^{m,n}(A)) = mnz(A)$.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad m = 2, \quad n = 2.$$

Тогда

$$\mathcal{R}^{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A = A_{r \times t} = \|a_{ij}\|$, $r, t \geq 1$, — $(0, 1)$ -матрица, m, n, f, g — натуральные числа, $1 \leq f \leq m$, $1 \leq g \leq n$. Тогда (m, n) -распределением матрицы A по элементу (f, g) называется $(0, 1)$ -матрица $\mathcal{D}^{m,n}(A, f, g) = \|d_{xy}\|$, содержащая mr строк и nt столбцов, в которой $d_{xy} = a_{ij}$, если $x = f + (i-1)m$, $y = g + (j-1)n$, и $d_{xy} = 0$ в противном случае, то есть $d_{xy} = a_{1+(x-f)/m, 1+(y-g)/n}$, если $m \mid (x-f)$, $n \mid (y-g)$, и $d_{xy} = 0$ в противном случае, $x = 1, \dots, mr$, $y = 1, \dots, nt$. Ясно, что $e(\mathcal{D}^{m,n}(A, f, g)) = e(A)$.

Пример 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad m = 2, \quad n = 2, \quad f = 1, \quad g = 2.$$

Тогда

$$\mathcal{D}^{2,2}(A, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A = A_{r \times t} = \|a_{ij}\|$, $r, t \geq 1$, $(0, 1)$ -матрица, N — натуральное число. Тогда N -укладкой матрицы A называется матрица $U^N(A)$, содержащая r^N строк и t^N столбцов, определяемая следующим образом. Если $N = 1$, то $U^N(A) = A$. Если $N > 1$ и $U^{N-1}(A)$ — $(N-1)$ -укладка матрицы A , содержащая r^{N-1} строк, t^{N-1} столбцов и $z_{N-1} = z(U^{N-1}(A))$ нулей в позициях $(f_1^{N-1}, g_1^{N-1}), \dots, (f_{z_{N-1}}^{N-1}, g_{z_{N-1}}^{N-1})$, то

$$U^N(A) = \mathcal{R}^{r,t}(U^{N-1}(A)) + \sum_{q=1}^{z_{N-1}} \mathcal{D}^{r^{N-1}, t^{N-1}}(A, f_q^{N-1}, g_q^{N-1}). \quad (5.1)$$

Пример 3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = 2.$$

Тогда

$$U^2(A) = \mathcal{R}^{2,2}(A) + \mathcal{D}^{2,2}(A, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 6. Пусть $A = A_{r \times t} = \|a_{ij}\|$, $r, t \geq 1$, $(0, 1)$ -матрица. Тогда для любого натурального N укладка $U^N(A)$ является $(0, 1)$ -матрицей и $z(U^N(A)) = (z(A))^N$.

Доказательство. Докажем лемму по индукции.

Пусть $N = 1$. Тогда $U^N(A) = A$, и справедливость утверждения леммы очевидна.

Пусть $N > 1$, и пусть для $(N-1)$ -укладки $U^{N-1}(A)$ утверждение леммы выполнено. Введем обозначения $U^{N-1}(A) = U^{N-1}$, $U^N(A) = U^N$, $z(A) = z$. Тогда по предположению индукции матрица U^{N-1} является $(0, 1)$ -матрицей, при этом $z(U^{N-1}) = z^{N-1}$.

Пусть нули матрицы U^{N-1} расположены в позициях $(f_1, g_1), \dots, (f_{z^{N-1}}, g_{z^{N-1}})$. Тогда по определению N -укладки

$$U^N = \mathcal{R}^{r,t}(U^{N-1}) + \sum_{q=1}^{z^{N-1}} \mathcal{D}^{r^{N-1}, t^{N-1}}(A, f_q, g_q). \quad (5.2)$$

Пусть $U^N = \|u_{xy}^N\|$, $U^{N-1} = \|u_{xy}^{N-1}\|$, $A = \|a_{ij}\|$. Тогда из (5.2) и введенных определений следует, что для любых x, y таких, что $1 \leq x \leq r^N$, $1 \leq y \leq t^N$, выполнено равенство

$$u_{x,y}^N = u_{(x-1) \bmod r^{N-1}+1, (y-1) \bmod t^{N-1}+1}^{N-1} + U, \quad (5.3)$$

где

$$U = \sum_{q=1}^{z^{N-1}} a_{1+(x-f_q)/r^{N-1}, 1+(y-g_q)/t^{N-1}}.$$

По предположению индукции укладка U^{N-1} является $(0, 1)$ -матрицей. Значит, возможны два случая.

В первом случае $u_{(x-1) \bmod r^{N-1}+1, (y-1) \bmod t^{N-1}+1}^{N-1} = 0$. Тогда существует единственное число q , $1 \leq q \leq z^{N-1}$, такое, что $f_q = (x-1) \bmod r^{N-1} + 1$,

$g_q = (y - 1) \bmod t^{N-1} + 1$, то есть $r^{N-1} \mid (x - f_q)$ и $t^{N-1} \mid (y - g_q)$. Учитывая (5.3), получаем, что в этом случае

$$u_{x,y}^N = 0 + a_{1+(x-f_q)/r^{N-1}, 1+(y-g_q)/t^{N-1}},$$

значит, $u_{x,y}^N$ равно нулю или единице.

Во втором случае $u_{(x-1) \bmod r^{N-1}+1, (y-1) \bmod t^{N-1}+1}^{N-1} = 1$. Тогда не существует такого числа q , $1 \leq q \leq z^{N-1}$, что

$$f_q = (x - 1) \bmod r^{N-1} + 1, \quad g_q = (y - 1) \bmod t^{N-1} + 1,$$

то есть $r^{N-1} \mid (x - f_q)$ и $t^{N-1} \mid (y - g_q)$. Отсюда и из (5.3) следует, что

$$u_{x,y}^N = u_{(x-1) \bmod r^{N-1}+1, (y-1) \bmod t^{N-1}+1}^{N-1} + 0 = 1.$$

Таким образом, матрица U^N является $(0, 1)$ -матрицей. Покажем, что $z(U^N) = z^N$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} e(U^N) &= e(\mathcal{R}^{r,t}(U^{N-1})) + \sum_{q=1}^{z^{N-1}} e(\mathcal{D}^{r^{N-1}, t^{N-1}}(A, f_q, g_q)) \\ &= rte(U^{N-1}) + \sum_{q=1}^{z^{N-1}} e(A) = rt(r^{N-1}t^{N-1} - z(U^{N-1})) + z^{N-1}(rt - z(A)) \\ &= r^N t^N - rtz^{N-1} + z^{N-1}rt - z^N = r^N t^N - z^N. \end{aligned}$$

Значит, $z(U^N) = r^N t^N - e(U^N) = z^N$, что завершает доказательство леммы.

Пусть $A = A_{r \times t} = \|a_{ij}\|$, $r, t \geq 1$, $-(0, 1)$ -матрица, N — натуральное число. Величина

$$\frac{e(U^N(A))}{e(A)} = \frac{r^N t^N - (z(A))^N}{rt - z(A)}$$

называется мощностью N -укладки матрицы A и обозначается $\mathcal{P}^N(A)$.

Теорема 4. Пусть $A = A_{r \times t} = \|a_{ij}\|$, $r, t \geq 1$, $-(0, 1)$ -матрица, A^0 — одноэлементная матрица, состоящая из единиц, N — натуральное число. Тогда тождественная матрица $E_{r^N \times t^N}$ точно покрывается с помощью $\mathcal{P}^N(A)$ матриц A и $(z(A))^N$ матриц A^0 .

Доказательство. Из леммы 6 и введенных определений следует, что в матрице $U^N(A)$ можно выделить $e(U^N(A))/e(A)$ усеченных подматриц вида A , не пересекающихся по единицам и покрывающих все единицы матрицы $U^N(A)$. Значит, укладка $U^N(A)$ точно покрывается с помощью $e(U^N(A))/e(A) = \mathcal{P}^N(A)$ матриц A . Очевидно, что тождественная матрица $E_{r^N \times t^N}$ содержит усеченную подматрицу вида $U^N(A)$. При этом те единицы матрицы $E_{r^N \times t^N}$, которые соответствуют единицам укладки $U^N(A)$, точно покрываются с помощью $\mathcal{P}^N(A)$ матриц A . Оставшиеся $(z(A))^N$ единиц матрицы $E_{r^N \times t^N}$ точно покрываются с помощью $(z(A))^N$ матриц A^0 . В результате получается точное покрытие матрицы $E_{r^N \times t^N}$, в котором участвуют $\mathcal{P}^N(A)$ матриц A и $(z(A))^N$ матриц A^0 . Теорема доказана.

Теорема 5. Для любых вещественных чисел β и ε таких, что $0 < \varepsilon < \beta < 1$, существует алгоритм $A_{\beta, \varepsilon}$, который для любого слабо плотного базиса B с весом ρ и любого графа $G \in \mathcal{G}$ с r вершинами и q ребрами строит точное покрытие графа G в базисе B со сложностью $L_{\beta, \varepsilon}(q, p, \rho)$, где

$$L_{\beta, \varepsilon}(q, p, \rho) \leq \frac{q}{\rho} + \frac{(1 + \rho)p^2}{(\varepsilon \log_2 p)^{(1 - \log_{1+\rho} p)(1 - \beta)}} + \frac{p^2 + 2p^{1+\varepsilon}}{(\varepsilon \log_2 p)^\beta} + 2p^{1+\varepsilon}(\varepsilon \log_2 p)^{(1 - \beta)} + \frac{p\varepsilon \log_2 p}{2} + \frac{p}{2} + \varepsilon O((\log_2 p)^2). \quad (5.4)$$

Доказательство. Пусть β, ε — произвольные вещественные числа, $0 < \varepsilon < \beta < 1$. Известно (см. [4]), что базис с весом ρ является слабо плотным тогда и только тогда, когда он содержит двудольный граф с ρ ребрами. Пусть слабо плотный базис B с весом ρ содержит двудольный граф $H = H_{r, t}$ с ρ ребрами, $1 \leq \rho \leq rt$, имеющий сокращенную матрицу смежности $A = A_{r \times t}$, и тривиальный граф H^0 , имеющий сокращенную матрицу смежности $A^0 = A_{1 \times 1}^0 = (1)$. Положим $z = z(A)$.

Пусть $G \in \mathcal{G}$ — произвольный граф с p вершинами и q ребрами, имеющий матрицу смежности $M = M_{p \times p}$. Построим точное покрытие верхнего сокращенного треугольника матрицы M матрицами A и A^0 .

Положим $h = \lceil \log_2 p^\varepsilon \rceil$. Очевидно, что $1 \leq h \leq p$.

Через $P_i, i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil - 1$, обозначим подматрицу матрицы M , расположенную на пересечении строк с номерами $(i - 1)h + 1, \dots, ih$ и столбцов с номерами $ih + 1, \dots, p$. Назовем эту подматрицу i -м прямоугольником. Обозначим через $Q_i, i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil$, подматрицу матрицы M , расположенную на пересечении строк с номерами $(i - 1)h + 1, \dots, \min(ih, p)$ и столбцов с номерами $(i - 1)h + 1, \dots, \min(ih, p)$. Назовем эту подматрицу i -м квадратом. Очевидно, что прямоугольник P_i содержит h строк и $p - ih$ столбцов, а квадрат Q_i — не более h строк и не более h столбцов.

Пусть e_i — число единиц, а c_i — число различных столбцов в прямоугольнике P_i . Тогда $1 \leq c_i \leq 2^h$. Разобьем столбцы прямоугольника P_i на c_i классов эквивалентности $R_1^i, \dots, R_{c_i}^i$, понимая под эквивалентностью равенство. Очевидно, что для любого $i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil - 1$ и любого $j = 1, \dots, c_i$ группа столбцов R_j^i высоты h представляет собой подматрицу прямоугольника P_i , в которой любая строка либо единичная, либо нулевая, при этом каждый элемент прямоугольника P_i принадлежит ровно одной из подматриц $R_1^i, \dots, R_{c_i}^i$. Пусть матрица R_j^i содержит m_j^i столбцов, h_j^i единичных строк и $e_j^i = m_j^i h_j^i$ единиц.

Положим $N_j^i = \lfloor (1 - \beta) \log_{rt} h_j^i \rfloor, i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil - 1, j = 1, \dots, c_i$. Тогда

$$(rt)^{N_j^i} \leq (h_j^i)^{1 - \beta} < (rt)^{N_j^i + 1}. \quad (5.5)$$

Пусть I_j^i — матрица, состоящая из первых $\lfloor h_j^i / r^{N_j^i} \rfloor r^{N_j^i}$ единичных строк и первых $\lfloor m_j^i / t^{N_j^i} \rfloor t^{N_j^i}$ столбцов матрицы R_j^i . Для любого $i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil - 1$ и любого $j = 1, \dots, c_i$ разобьем матрицу I_j^i на $l(i, j) = \lfloor h_j^i / r^{N_j^i} \rfloor \lfloor m_j^i / t^{N_j^i} \rfloor$ непересекающихся тождественных подматриц вида $E_{r^{N_j^i} \times t^{N_j^i}}$, каждую из которых точно покроем с помощью $l_1(i, j) = \mathcal{P}^{N_j^i}(A)$ матриц A и $l_2(i, j) = z^{N_j^i}$ матриц A^0 согласно теореме 4. Единицы матрицы R_j^i , не принадлежащие матрице I_j^i , точно покроем с помощью $l_0(i, j) \leq r^{N_j^i} m_j^i + t^{N_j^i} h_j^i$

матриц A^0 . Для любого $i = 1, \dots, \lceil p/h \rceil$ точно покроем верхний сокращенный треугольник квадрата Q^i с помощью $l_3(i) = (1/2)\epsilon(Q_i)$ матриц A^0 .

Таким образом мы построим точное покрытие матрицы M матрицами A и A^0 . Пусть L — сложность этого покрытия, L_A (соответственно L_{A^0}) — число участвующих в нем матриц A (соответственно A^0), тогда $L = L_A + L_{A^0}$. Оценим величины L_A и L_{A^0} . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} L_A &= \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} l(i, j) l_1(i, j) = \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} \lfloor h_j^i / r^{N_j^i} \rfloor \lfloor m_j^i / t^{N_j^i} \rfloor \mathcal{P}^{N_j^i}(A) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} \frac{(r^{N_j^i} t^{N_j^i} - z^{N_j^i})}{(rt - z) r^{N_j^i} t^{N_j^i}} h_j^i m_j^i = \frac{1}{rt - z} \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} \left(1 - \frac{z^{N_j^i}}{r^{N_j^i} t^{N_j^i}}\right) h_j^i m_j^i \\ &\leq \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} e_j^i = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} e_i \leq \frac{q}{\rho}, \\ L_{A^0} &= \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} (l(i, j) l_2(i, j) + l_0(i, j)) + \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil} l_3(i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} \frac{h_j^i m_j^i}{r^{N_j^i} t^{N_j^i}} z^{N_j^i} + \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} (r^{N_j^i} m_j^i + t^{N_j^i} h_j^i) + \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil} \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

Положим

$$S = \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} \frac{h_j^i m_j^i}{r^{N_j^i} t^{N_j^i} z^{N_j^i}}.$$

Тогда, поскольку $(rt)^{N_j^i} \leq (h_j^i)^{1-\beta}$ и $h_j^i \leq h$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} L_{A^0} &\leq S + \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} ((h_j^i)^{1-\beta} m_j^i + (h_j^i)^{1-\beta} h_j^i) + (p/h + 1) \frac{h^2}{2} \\ &\leq S + h^{1-\beta} \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \left(\sum_{j=1}^{c_i} m_j^i + \sum_{j=1}^{c_i} h_j^i \right) + (p/h + 1) \frac{h^2}{2} \\ &\leq S + h^{1-\beta} \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} (p + 2^h h) + (p/h + 1) \frac{h^2}{2} \\ &\leq S + h^{1-\beta} p/h (p + 2^h h) + (p/h + 1) \frac{h^2}{2} \\ &= S + \frac{p^2}{h^\beta} + 2^h h^{1-\beta} p + \frac{ph}{2} + \frac{h^2}{2}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Теперь оценим величину S . Рассмотрим два случая.

Если $z = 0$, то, очевидно, что $S = 0$.

Пусть $z > 0$. Положим $\alpha = \log_{rt} z = \log_{z+\rho} z$, тогда $0 \leq \alpha < 1$ и $z = (rt)^\alpha$. Из неравенств (5.5) вытекает, что $(rt)^{N_j^i} > (h_j^i)^{1-\beta} / (rt)$, поэтому из определения величины

Следует, что

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} \frac{h_j^i m_j^i}{(rt)^{N_j^i(1-\alpha)}} \leq \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} \frac{h_j^i m_j^i (rt)^{1-\alpha}}{(h_j^i)^{(1-\beta)(1-\alpha)}} \\
 &\leq \frac{rt}{(rt)^\alpha} \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} \sum_{j=1}^{c_i} (h_j^i)^{\beta+\alpha-\alpha\beta} m_j^i \leq \frac{rt}{z} h^{\beta+\alpha(1-\beta)} \sum_{i=1}^{\lceil p/h \rceil - 1} p \\
 &\leq \frac{z+\rho}{z} h^{\beta+\alpha(1-\beta)} \frac{p^2}{h} \leq (1+\rho) \frac{p^2}{h^{(1-\alpha)(1-\beta)}} \leq (1+\rho) \frac{p^2}{h^{(1-\log_{1+\rho} \rho)(1-\beta)}}.
 \end{aligned}$$

Из полученных оценок и (5.6) вытекает, что

$$L_{A^0} \leq (1+\rho) \frac{p^2}{h^{(1-\log_{1+\rho} \rho)(1-\beta)}} + \frac{p^2}{h^\beta} + 2^h h^{1-\beta} p + \frac{ph}{2} + \frac{h^2}{2}.$$

Очевидно, что $\log_2 p^\varepsilon \leq h \leq \log_2 p^\varepsilon + 1$, поэтому

$$\begin{aligned}
 L &= L_A + L_{A^0} \\
 &\leq \frac{q}{\rho} + \frac{(1+\rho)p^2}{(\varepsilon \log_2 p)^{(1-\log_{1+\rho} \rho)(1-\beta)}} + \frac{p^2}{(\varepsilon \log_2 p)^\beta} \\
 &\quad + \frac{2p^{1+\varepsilon}((\varepsilon \log_2 p + 1)^\beta)}{(\varepsilon \log_2 p)} + \frac{p(\varepsilon \log_2 p + 1)}{2} + \frac{(\varepsilon \log_2 p + 1)^2}{2} \\
 &= \frac{q}{\rho} + \frac{(1+\rho)p^2}{(\varepsilon \log_2 p)^{(1-\log_{1+\rho} \rho)(1-\beta)}} + \frac{p^2 + 2p^{1+\varepsilon}}{(\varepsilon \log_2 p)^\beta} \\
 &\quad + 2p^{1+\varepsilon}(\varepsilon \log_2 p)^{(1-\beta)} + \frac{p\varepsilon \log_2 p}{2} + \frac{p}{2} + \varepsilon O((\log_2 p)^2),
 \end{aligned}$$

то есть для сложности L выполнено неравенство (5.4).

По теореме 1 построенному нами точному покрытию матрицы M матрицами A и A^0 соответствует точное покрытие графа G графами H и H^0 той же сложности. Следовательно, применив описанный алгоритм, можно построить точное покрытие графа G графами H и H^0 сложности L , для которой выполняется неравенство (5.4).

Теорема доказана.

Следствие 3. Если базис B с весом ρ является слабо плотным, то

$$l_B(q, p) \leq \frac{q}{\rho} + O(p^2/(\log_2 p)^{\beta_0}), \quad (5.7)$$

где

$$\beta_0 = \frac{1 - \log_{\rho+1} \rho}{2 + \log_{\rho+1} \rho} = \frac{\log_{1+\rho}((1+\rho/\rho))}{\log_{1+\rho}(1+\rho)^2 \rho}.$$

Доказательство. Пусть

$$\beta_0 = \frac{1 - \log_{\rho+1} \rho}{2 + \log_{\rho+1} \rho},$$

тогда $0 < \beta_0 < 1$. Выберем произвольное вещественное число ε_0 так, чтобы выполнялось неравенство $0 < \varepsilon_0 < \beta_0$, и положим в теореме 5 $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\beta = \beta_0$. Тогда

$$\begin{aligned} (1 - \log_{1+\rho} \rho)(1 - \beta) &= \log_{1+\rho} \frac{1 + \rho}{\rho} \left(\frac{2 + \log_{1+\rho} \rho}{2 + \log_{1+\rho} \rho} - \frac{1 - \log_{1+\rho} \rho}{2 + \log_{1+\rho} \rho} \right) \\ &= \frac{\log_{1+\rho} ((1 + \rho)/\rho)}{\log_{1+\rho} (1 + \rho)^2 + \log_{1+\rho} \rho} = \frac{\log_{1+\rho} ((1 + \rho)/\rho)}{\log_{1+\rho} (1 + \rho)^2 \rho} = \beta, \end{aligned}$$

и из неравенства (5.4) вытекает, что для любого графа $G \in \mathcal{G}$ с p вершинами и q ребрами

$$L_{\beta, \varepsilon}(q, p, \rho) \leq \frac{q}{\rho} + O(p^2 / (\log_2 p)^{\beta_0}).$$

Отсюда следует неравенство (5.7).

Список литературы

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И., *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990.
2. Ложкина З. С., О реберно-плотных базисах в классе графов. *Вестник Нижегородского Государственного университета, "Математическое моделирование и оптимальное управление"* (2000) 22 №1.
3. Ложкина З. С., О множестве почти плотных базисов в классе графов. *Вестник Московского ун-та. Сер. 15, Выч. матем. и киберн.* (2000) №3, 45–50.
4. Ложкина З. С., О слабо плотных базисах в классе графов. *Вестник Московского ун-та. Сер. 15, Выч. матем. и киберн.* (2001) №2, 47–53.
5. Ложкина З. С., *О сложности покрытия графов графами из специальных базисов*. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук, 2002.

Статья поступила 06.11.2003.