Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Воронин, О средних и типичных значениях сумм попарных расстояний для подмножеств вершин n -мерного единичного куба, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 3, 141–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:23:52

О средних и типичных значениях сумм попарных расстояний для подмножеств вершин n -мерного единичного куба

© 2004 г. В. П. Воронин

В работе исследуется вопрос о средних и типичных значениях сумм попарных расстояний Хэмминга для подмножеств вершин n -мерного единичного куба. Описан подход к проблеме вычисления средних и типичных значений для произвольных функционалов, определенных на подмножествах конечного множества как сумма значений, приписываемых упорядоченным парам элементов этого множества, получены общие формулы для этого случая. Найдены средние и типичные значения сумм попарных расстояний для случая всех подмножеств вершин n -мерного единичного куба и сумм попарных расстояний для подмножеств вершин фиксированной мощности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00266а.

1. Введение

Пусть B^n — множество вершин $\tilde{\alpha}^n$ n -мерного единичного куба, $\rho(\tilde{\alpha}^n, \tilde{\beta}^n)$ — расстояние Хэмминга между вершинами $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$. Пусть

$$M = \{\tilde{\alpha}_1^n, \tilde{\alpha}_2^n, \dots, \tilde{\alpha}_m^n\}$$

— m -элементное подмножество вершин B^n . Представляет интерес изучение функционалов вида

$$F(M) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \varphi(\rho(\tilde{\alpha}_i^n, \tilde{\alpha}_j^n)),$$

где $\varphi(n)$ — некоторая функция, определенная на натуральных числах.

С. В. Яблонским была поставлена задача нахождения m -элементного подмножества вершин B^n , которое доставляет минимум такому функционалу для случая

$$\varphi(n) = \frac{1}{n}.$$

Этот функционал называется энергией множества одноименно заряженных частиц. В [1] эта проблема была решена для случая $m = 2^{n-1}$. В [2] была рассмотрена асимптотическая постановка этой проблемы. В. К. Леонтьевым в [3] была найдена асимптотика

для функционала энергии в случае произвольной растущей мощности подмножеств. Показано, что почти все m -подмножества имеют асимптотически минимальную энергию и найдена оценка отклонения для почти всех множеств. Для достаточно быстро растущей мощности подмножеств (как функции размерности куба) построены подмножества с асимптотически минимальной энергией. Была попытка исследовать подмножества с максимальной энергией [4], но описать достаточно точно структуру этих подмножеств и получить оценки значений не удалось.

В настоящей работе рассматривается случай

$$\varphi(n) = n,$$

то есть функционал суммы попарных расстояний между вершинами подмножества.

2. Вспомогательные утверждения

В этом разделе описывается общий подход к задаче вычисления средних и типичных значений для случая функционалов, определенных на декартовых квадратах конечного множества. Выводятся некоторые вспомогательные формулы, необходимые для вычисления средних значений и оценок для типичных значений суммы попарных расстояний. Техника вычислений математических ожиданий и дисперсий, предложенная В. К. Леонтьевым в [3], используется и обобщается в настоящей работе на произвольные квадратные матрицы.

Пусть дано r -элементное множество. Пусть это будет $I = \{1, 2, \dots, r\}$, что не ограничивает общности. Пусть имеется некоторая функция φ , определенная на декартовом квадрате I^2 и сопоставляющая каждой упорядоченной паре (i, j) действительное число a_{ij} . Эту функцию можно представить в виде квадратной матрицы A порядка r , элементы которой соответствуют значениям функции φ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

На пересечении i -й строки и j -го столбца находится элемент a_{ij} — значение функции φ на паре (i, j) .

Функционал F , определенный на подмножествах множества I , задается следующим образом. Пусть $M \subseteq I$, тогда

$$F(M) = \sum_{i \in M, j \in M} \varphi(i, j) = \sum_{i \in M, j \in M} a_{ij},$$

то есть, если задано множество M , то $F(M)$ есть сумма тех элементов матрицы A , у которых оба индекса принадлежат M . Будем считать, что $F(\emptyset) = 0$.

Средним значением функционала F на множестве I будем называть величину

$$E_F(A) = \frac{1}{2^r} \sum_{M \subseteq I} F(M).$$

Средним значением функционала F на множестве I для m -элементных подмножеств будем называть величину

$$E_{F,m}(A) = \binom{r}{m}^{-1} \sum_{M \subseteq I, |M|=m} F(M).$$

Эти средние величины можно рассматривать как математические ожидания случайных величин, определенных на соответствующих вероятностных пространствах. Для среднего значения функционала F на множестве I элементарными событиями являются все 2^r подмножеств множества I , каждому из них приписывается вероятность $p = 2^{-r}$. Для среднего значения функционала F на множестве I для m -элементных подмножеств элементарными событиями являются все $\binom{r}{m}$ m -элементных подмножеств множества I , и каждому из них приписывается вероятность $p = \binom{r}{m}^{-1}$.

Через $s(A)$ будем обозначать сумму диагональных элементов матрицы A (след матрицы), а через $v(A)$ — сумму элементов матрицы A , лежащих вне диагонали.

Следующая лемма связывает среднее значение функционала F на множестве I с величинами $s(A)$ и $v(A)$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$E_F(A) = \frac{s(A)}{2} + \frac{v(A)}{4}.$$

Доказательство. Рассмотрим сумму значений функционала F по всем подмножествам множества I . Диагональный элемент a_{ii} присутствует в этой сумме ровно 2^{r-1} раз, так как именно столько подмножеств содержат элемент i . Элемент, лежащий вне диагонали, присутствует в этой сумме 2^{r-2} раза, так как число подмножеств, содержащих различные элементы i и j , равно 2^{r-2} . Таким образом,

$$\sum_{M \subseteq I} F(M) = 2^{r-1}s(A) + 2^{r-2}v(A).$$

Поделив полученное равенство на 2^r , получим доказываемое равенство.

Аналогично, используя величины $s(A)$ и $v(A)$, можно получить среднее значение функционала F на множестве I для m -элементных подмножеств. Для убывающего факториала будем использовать обозначение

$$[k]_l = k(k-1) \dots (k-l+1).$$

Верна следующая лемма.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$E_{F,m}(A) = \frac{ms(A)}{r} + \frac{[m]_2 v(A)}{[r]_2}.$$

Доказательство. Посчитаем число вхождений каждого элемента матрицы A в сумму значений функционала F по всем m -элементным подмножествам множества I . Любой диагональный элемент a_{ii} присутствует в этой сумме ровно $\binom{r-1}{m-1}$ раз, так как именно

столько m -элементных подмножеств содержат элемент i . Элемент, лежащий вне диагонали, присутствует в этой сумме $\binom{r-2}{m-2}$ раза, так как число m -элементных подмножеств, содержащих различные элементы i и j , равно $\binom{r-2}{m-2}$. Таким образом,

$$\sum_{M \subseteq I, |M|=m} F(M) = \binom{r-1}{m-1} s(A) + \binom{r-2}{m-2} v(A).$$

Поделив полученное равенство на $\binom{r}{m}$, получим нужное равенство.

Сопоставим каждому подмножеству $M \subseteq I$ квадрат суммы значений функции φ на упорядоченных парах элементов этого подмножества, то есть $F^2(M)$. Вычислим значения величин

$$E_{F^2}(A) = \frac{1}{2^r} \sum_{M \subseteq I} F^2(M),$$

$$E_{F^2, m}(A) = \binom{r}{m}^{-1} \sum_{M \subseteq I, |M|=m} F^2(M).$$

Поскольку значения функционала $F(M)$ для всех подмножеств и подмножеств фиксированной мощности рассматриваются как случайные величины, значения $E_{F^2}(A)$ и $E_{F^2, m}(A)$ являются, соответственно, их вторыми моментами.

Введем обозначения для ряда величин, определяемых по матрице A , которые будут использованы в дальнейшем. Элементы матрицы a_{ii} , $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, будем называть диагональными, а остальные — недиагональными. Пару элементов матрицы a_{ij} и $a_{j,i}$, $i \neq j$, будем называть симметричной относительно диагонали, а остальные пары — несимметричными. Строки и столбцы будем называть линиями. Если элементы лежат в одной линии, то они лежат либо в одной строке, либо в одном столбце. Если один из элементов матрицы лежит в некоторой строке, а другой лежит в столбце, пересекающемся с данной строкой по диагональному элементу, то будем говорить, что элементы лежат в различных линиях с одним номером.

Пусть

$q_1(A)$ — сумма квадратов диагональных элементов матрицы A ;

$q_2(A)$ — сумма квадратов недиагональных элементов матрицы A ;

$p_1(A)$ — сумма произведений неупорядоченных пар, симметричных относительно диагонали элементов матрицы A ;

$p_2(A)$ — сумма произведений неупорядоченных пар различных (по индексам) элементов матрицы A , один из которых диагональный, а другой либо тоже диагональный, либо лежит в одной линии с первым диагональным элементом;

$p_3(A)$ — сумма произведений неупорядоченных пар различных недиагональных элементов матрицы A , лежащих в одной линии;

$p_4(A)$ — сумма произведений неупорядоченных пар различных недиагональных несимметричных элементов матрицы A , лежащих в линиях с одним номером;

$p_5(A)$ — сумма произведений неупорядоченных пар различных элементов матрицы A , один из которых диагональный, а другой недиагональный и не лежит с диагональным элементом в одной линии;

$p_6(A)$ — сумма произведений неупорядоченных пар различных недиагональных несимметричных элементов матрицы A , не лежащих в одной линии или в линиях с одним номером.

Заметим, что в $p_1(A)$ и $p_2(A)$ входят пары элементов матрицы, объединение множеств индексов которых содержит ровно два различных индекса, в $p_3(A)$, $p_4(A)$ и $p_5(A)$ — соответственно ровно три различных индекса, наконец в $p_6(A)$ — четыре различных индекса. Можно было группировать их именно по этому признаку, но выделение пар с диагональными элементами упрощает вычисления при условии равенства нулю диагональных элементов. Величины $q_1(A)$, $p_2(A)$ и $p_5(A)$ при этом просто равны нулю.

Следующее утверждение дает выражение величины $E_{F^2}(A)$ через выше введенные величины.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$E_{F^2}(A) = \frac{4q_1(A) + 2q_2(A) + 4p_1(A) + 4p_2(A)}{8} + \frac{2p_3(A) + 2p_4(A) + 2p_5(A) + p_6(A)}{8}.$$

Доказательство. Рассмотрим величину $\sum_{M \subseteq I} F^2(M)$ как сумму квадратов сумм элементов соответствующих подматриц, строки и столбцы которых задаются подмножествами $M \subseteq I$. Посчитаем вклад каждого элемента и каждой неупорядоченной пары элементов в величину $\sum_{M \subseteq I} F^2(M)$. Диагональный элемент a_{ii} входит ровно в 2^{r-1} подматриц, определяемых подмножествами индексов M , следовательно, его вклад будет равен $2^{r-1}a_{ii}^2$. Недиagonalный элемент a_{ij} , $i \neq j$, входит в 2^{r-2} подматриц, и его вклад будет равен $2^{r-2}a_{ij}^2$. Неупорядоченная пара симметричных элементов содержится в 2^{r-2} подматрицах. Неупорядоченная пара различных диагональных элементов содержится в 2^{r-2} подматрицах. Пара из диагонального и любого другого, лежащего с ним в одной линии, тоже входит ровно в 2^{r-2} подматриц. Если пара состоит из двух различных элементов, находящихся в одной линии и не лежащих на диагонали, то существует ровно 2^{r-3} содержащих их подматриц. Столько же существует подматриц, содержащих данную неупорядоченную пару недиагональных несимметричных элементов, лежащих в линиях с одним номером. Столько же существует подматриц, содержащих фиксированный диагональный элемент и не находящийся с ним в одной линии недиагональный элемент. Наконец, неупорядоченная пара недиагональных элементов, не лежащих в одной линии или в линиях с одним номером, входит ровно в 2^{r-4} подматриц. Следовательно, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{M \subseteq I} F^2(M) &= 2^{r-1}q_1(A) + 2^{r-2}q_2(A) + 2 \cdot 2^{r-2}p_1(A) + 2 \cdot 2^{r-2}p_2(A) \\ &\quad + 2 \cdot 2^{r-3}p_3(A) + 2 \cdot 2^{r-3}p_4(A) + 2 \cdot 2^{r-3}p_5(A) + 2 \cdot 2^{r-4}p_6(A). \end{aligned}$$

Из этого равенства непосредственно следует утверждение леммы.

Сформулируем и докажем аналогичное утверждение для величины $E_{F^2, m}(A)$.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$E_{F^2,m}(A) = \frac{mq_1(A)}{r} + \frac{[m]_2(q_2(A) + 2p_1(A) + 2p_2(A))}{[r]_2} + \frac{[m]_3(2p_3(A) + 2p_4(A) + 2p_5(A))}{[r]_3} + \frac{[m]_4 2p_6(A)}{[r]_4}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей леммы посчитаем вклад каждого элемента и каждой неупорядоченной пары элементов матрицы в сумму $\sum_{M \subseteq I, |M|=m} F^2(M)$. Как и в предыдущей лемме, индексы выбранных элементов или неупорядоченных пар элементов фиксируют строки и столбцы, номера которых совпадают с одним из индексов выбранных элементов. Номера строк и столбцов, дополняющих выбранные до нужного числа m , выбираются произвольно из оставшегося множества индексов. Получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{M \subseteq I, |M|=m} F^2(M) &= \binom{r-1}{m-1} q_1(A) + \binom{r-2}{m-2} (q_2(A) + 2p_1(A) + 2p_2(A)) \\ &\quad + \binom{r-3}{m-3} (2p_3(A) + 2p_4(A) + 2p_5(A)) + \binom{r-4}{m-4} 2p_6(A). \end{aligned}$$

Лемма непосредственно следует из этого равенства.

Введем, наконец, обозначения для следующих величин. Пусть

$$\begin{aligned} D_F(A) &= E_{F^2}(A) - E_F^2(A), \\ D_{F,m}(A) &= E_{F^2,m}(A) - E_{F,m}^2(A). \end{aligned}$$

Ясно, что для случайных величин, определенных для всех подмножеств или подмножеств фиксированной мощности, значения величин $D_F(A)$ и $D_{F,m}(A)$ являются соответственно их дисперсиями, а $\sqrt{D_F(A)}$ и $\sqrt{D_{F,m}(A)}$ — их стандартными отклонениями.

Заметим, что общий характер полученных формул позволяет применять их для вычисления средних и типичных значений для произвольных функционалов, определенных на подмножествах конечного множества как сумма значений, приписываемых упорядоченным парам элементов этого множества.

3. Средние значения сумм попарных расстояний

Применим доказанные вспомогательные утверждения для нахождения средних и оценки типичных значений для функционала, являющегося суммой попарных расстояний между неупорядоченными парами вершин множества M мощности m , являющегося подмножеством вершин n -мерного единичного куба.

Пусть $\tilde{\alpha}_i^n$ — вершина n -мерного единичного куба с лексикографическим номером i . Зададим матрицу A порядка 2^n следующим образом. Элемент a_{ij} равен расстоянию Хэмминга $\rho(\tilde{\alpha}_i^n, \tilde{\alpha}_j^n)$ между вершинами $\tilde{\alpha}_i^n$ и $\tilde{\alpha}_j^n$, $i, j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, нумерация строк и столбцов начинается с 0. Отметим сразу, что эта матрица симметричная и на ее диагонали стоят нули. Любые строка или столбец являются перестановками элементов любых

других строки или столбца. Сумма элементов матрицы в любой строке и в любом столбце этой матрицы равна одной и той же величине. Найдем ее (см. [5], стр. 264):

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij} = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{ij} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Введенные выше величины $s(A)$ и $v(A)$ имеют следующие значения:

$$s(A) = 0, \quad v(A) = n2^{2n-1}.$$

Пусть $M \subseteq B^n$ — произвольное множество, состоящее из различных вершин n -мерного единичного куба. Сопоставим этому множеству величину

$$R(M) = \frac{1}{2} \sum_{\tilde{\alpha}^n \in M, \tilde{\beta}^n \in M} \rho(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)$$

— функционал суммы попарных расстояний. Если множество M пусто или состоит только из одной вершины, то будем считать, что $R(M) = 0$. Ясно, что величина $\sum_{\tilde{\alpha}^n \in M, \tilde{\beta}^n \in M} \rho(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)$ равна сумме элементов матрицы A , индексы которых совпадают с лексикографическими номерами вершин из множества M . Для перехода от упорядоченных пар к неупорядоченным достаточно уменьшить эту сумму в два раза. Это следует из симметричности матрицы и равенства нулю ее диагональных элементов.

Средним значением суммы попарных расстояний для всех подмножеств B^n будем называть величину

$$S(n) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{M \subseteq B^n} R(M).$$

Непосредственно из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$S(n) = n4^{n-2}.$$

Средним значением суммы попарных расстояний для подмножеств B^n мощности m будем называть величину

$$S(n, m) = \binom{2^n}{m}^{-1} \sum_{M \subseteq B^n, |M|=m} R(M).$$

Используя лемму 2, получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$S(n, m) = \frac{m^2 n}{4} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right).$$

Доказательство. Действительно, из леммы 2 и вычисленных значений величин $s(A)$ и $v(A)$ получим, что

$$S(n, m) = \frac{[m]_2 2^{2^n-1}}{[2^n]_2 2} = \frac{m^2 n}{4} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right).$$

Напомним, что наибольшее возможное значение суммы попарных расстояний для m -элементных подмножеств вершин n -мерного единичного куба $U(n, m)$ равно $n\lfloor m/2 \rfloor \lceil m/2 \rceil$, то есть не превосходит $m^2 n/4$ (для четных m эта оценка достигается, см. [6]). Сравнивая это с полученным средним значением $S(n, m)$, получим следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $n, m \rightarrow \infty$, тогда

$$S(n, m) \sim U(n, m).$$

Известна также нижняя оценка суммы попарных расстояний для m -элементных подмножеств вершин n -мерного единичного куба

$$R(M) \geq \frac{m^2 n}{4} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{2^n}{mn} \right),$$

которая достигается для подмножеств мощности 2^{n-1} , являющихся $(n-1)$ -мерными гранями куба B^n (см. [6]). Из этого результата вытекает, что если мощность m -элементных подмножеств вершин является достаточно быстро растущей функцией, то нижняя и верхняя оценки для суммы попарных расстояний асимптотически совпадают. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 4. Пусть

$$m(n) = \frac{2^n \alpha(n)}{n},$$

где функция $\alpha(n)$ зависит от натурального n , принимает действительные значения и $\alpha(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, тогда

$$L(n, m(n)) \sim U(n, m(n)).$$

Этому факту можно дать следующую качественную интерпретацию. Если множества являются более плотными в B^n , чем код Хэмминга, то все они имеют асимптотически одинаковую сумму попарных расстояний.

4. Типичные значения сумм попарных расстояний

Вычислим теперь для матрицы A попарных расстояний между вершинами n -мерного единичного куба значения величин $q_1(A)$, $q_2(A)$, $p_1(A)$, $p_2(A)$, $p_3(A)$, $p_4(A)$, $p_5(A)$ и $p_6(A)$.

Очевидно, из условия, что на диагонали матрицы A стоят нули, следует, что $q_1(A) = 0$, $p_2(A) = 0$ и $p_5(A) = 0$.

Сумма квадратов элементов матрицы, не лежащих на диагонали, в любой строке и в любом столбце этой матрицы равна одной и той же величине. Найдем ее (см. [5], стр. 264):

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij}^2 = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{ij}^2 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Отсюда следует, что

$$q_2(A) = \frac{n(n+1)4^n}{4}.$$

Найдем значение $p_1(A)$. Матрица A симметрична, поэтому

$$p_1(A) = \sum_{0 \leq i < j \leq 2^n - 1} a_{ij} a_{j,i} = \sum_{0 \leq i < j \leq 2^n - 1} a_{ij}^2 = \frac{n(n+1)4^n}{8} = \frac{q_2(A)}{2}.$$

Сумма произведений неупорядоченных пар различных недиагональных элементов матрицы A , лежащих в одной фиксированной линии, равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij} \right)^2 - \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij}^2 \right) &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} a_{ij} \right)^2 - \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij}^2 \right) \\ &= \frac{n^2 4^n - n(n+1)2^n}{8}. \end{aligned}$$

Общее число строк и столбцов матрицы равно 2^{n+1} , поэтому

$$p_3(A) = \frac{n^2 8^n - n(n+1)4^n}{4}.$$

Найдем значение $p_4(A)$:

$$\begin{aligned} p_4(A) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij} (2n2^{n-1} - 2a_{j,i}) \\ &= n2^{n-1} \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij} - \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{i=0}^{2^n-1} a_{ij}^2 = \frac{n^2 8^n - n(n+1)4^n}{4} = p_3(A). \end{aligned}$$

Найдем, наконец, значение величины $p_6(A)$. Для этого вычислим сумму произведений каждого элемента матрицы на сумму всех оставшихся элементов, не лежащих с ним в одной линии и в линиях с одинаковыми номерами, и поделим ее на 2. В результате получим, что

$$\begin{aligned} p_6(A) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij} (n2^{n-1}2^n - 4n2^{n-1} + a_{ij} + a_{j,i}) \\ &= \left(\frac{n4^n}{4} - n2^n \right) \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij} + \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} a_{ij}^2 \\ &= \frac{n^2 16^n - 4n^2 8^n + 2n(n+1)4^n}{8}. \end{aligned}$$

Средним значением квадрата суммы попарных расстояний для всех подмножеств B^n будем называть величину

$$Q(n) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{M \subseteq B^n} R^2(M).$$

Найдем величину $Q(n)$. Используем лемму 3, заметим, что для перехода от упорядоченных пар вершин к неупорядоченным достаточно уменьшить эту сумму в 4 раза. Поэтому

$$Q(n) = \frac{2q_2(A) + 4p_1(A) + 2p_3(A) + 2p_4(A) + p_6(A)}{32} \\ = \frac{n^2 16^n + 4n^2 8^n + 2n^2 4^n + 2n 4^n}{256}.$$

Пусть $D(n) = Q(n) - S^2(n)$, тогда

$$D(n) = \frac{2n^2 8^n + n^2 4^n + n 4^n}{128}.$$

Теорема 5. Пусть функция $\alpha(n)$ зависит от натурального n , принимает действительные значения и $\alpha(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для почти всех подмножеств $M \subseteq B^n$ имеет место неравенство

$$|R(M) - S(n)| < \frac{\alpha(n)S(n)}{\sqrt{2^n}}.$$

Доказательство. Будем рассматривать $R(M)$ как случайную величину, определенную на вероятностном пространстве, элементарными событиями которого являются все 2^{2^n} подмножеств множества B^n , каждому из них приписывается вероятность $p = 1/2^{2^n}$, $S(n)$ и $D(n)$ являются соответственно математическим ожиданием и дисперсией этой случайной величины. Полагая в неравенстве Чебышева

$$\mathbf{P}\{|R(M) - S(n)| \geq t\} \leq \frac{D(n)}{t^2}$$

величину t равной $t(n) = \alpha(n)S(n)/\sqrt{2^n}$ и учитывая, что

$$\frac{D(n)}{S^2(n)} = \frac{4n^2 8^n + 2n^2 4^n + 2n 4^n}{n^2 16^n} = \frac{4}{2^n} + \frac{2}{4^n} + \frac{2}{n 4^n},$$

получим, что $D(n)/t^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда и следует утверждение теоремы.

Средним значением квадрата суммы попарных расстояний для подмножеств B^n мощности m будем называть величину

$$Q(n, m) = \binom{2^n}{m}^{-1} \sum_{M \subseteq B^n, |M|=m} R^2(M).$$

Найдем величину $Q(n, m)$. Используем лемму 4, уменьшим эту сумму в 4 раза для того, чтобы перейти от упорядоченных пар вершин к неупорядоченным. В результате получим, что

$$Q(n, m) = \frac{1}{4} \left(\frac{[m]_2(q_2(A) + 2p_1(A))}{[2^n]_2} + \frac{[m]_3(2p_3(A) + 2p_4(A))}{[2^n]_3} + \frac{[m]_4 2p_6(A)}{[2^n]_4} \right) \\ = \frac{[m]_2}{[2^n]_2} \frac{n(n+1)4^n}{8} + \frac{[m]_3}{[2^n]_3} \frac{n^2 8^n - n(n+1)4^n}{4} \\ + \frac{[m]_4}{[2^n]_4} \frac{n^2 16^n - 4n^2 8^n + 2n(n+1)4^n}{16}$$

Пусть $D(n, m) = Q(n, m) - S^2(n, m)$, тогда

$$D(n, m) = \frac{[m]_2}{[2^n]_2} \frac{n(n+1)4^n}{8} + \frac{[m]_3}{[2^n]_3} \frac{n^2 8^n - n(n+1)4^n}{4} + \frac{[m]_4}{[2^n]_4} \frac{n^2 16^n - 4n^2 8^n + 2n(n+1)4^n}{16} - \left(\frac{[m]_2}{[2^n]_2} \right)^2 \frac{n^2 16^n}{16}.$$

Рассмотрим частное $D(n, m)/S^2(n, m)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{D(n, m)}{S^2(n, m)} &= \frac{2}{m(m-1)} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{4}{m} \left(1 - \frac{1}{m-1}\right) \left(1 + \frac{1}{2^n-2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n2^n}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{2}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m-1}\right) \left(1 + \frac{2}{2^n-2}\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{2}{2^n-3}\right) \left(1 - \frac{4}{2^n} + \frac{2}{4^n} + \frac{2}{n4^n}\right) - 1. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{2}{m(m-1)} = 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k}, \quad \frac{4}{m} \left(1 - \frac{1}{m-1}\right) = \frac{4}{m} - 4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k}$$

и

$$\left(1 - \frac{2}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m-1}\right) = 1 - \frac{4}{m} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k}.$$

Преобразуем произведения в ряды:

$$\left(1 + \frac{1}{2^n-2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n2^n}\right) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-2}}{(2^n)^k} - \frac{1}{n2^n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{(2^n)^k}\right)$$

и

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{2^n-2}\right) \left(1 + \frac{2}{2^n-3}\right) \left(1 - \frac{4}{2^n} + \frac{2}{4^n} + \frac{2}{n4^n}\right) \\ = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{k-2} - 2^{k-1}}{(2^n)^k} + \frac{2}{n4^n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k - 2^k}{(2^n)^k}\right). \end{aligned}$$

Приведем подобные члены, произведем другие несложные преобразования, учтем, что $m \leq 2^n$, и получим неравенство

$$\frac{D(n, m)}{S^2(n, m)} \leq \frac{4}{m^2 n} (1 + O(1/m))$$

Теорема 6. Пусть функция $\alpha(n)$ зависит от натурального n , принимает действительные значения и $\alpha(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для почти всех подмножеств $M \subseteq B^n$ таких, что $|M| = m$, где $m = m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, имеет место неравенство

$$|R(M) - S(n, m)| < \frac{\alpha(n)S(n, m)}{m\sqrt{n}}.$$

Доказательство. Будем рассматривать $R(M)$ как случайную величину, определенную на вероятностном пространстве, элементарными событиями которого являются все $\binom{2^n}{m}$ подмножеств множества B^n , каждому из них приписывается вероятность $p = \binom{2^n}{m}^{-1}$, $S(n, m)$ и $D(n, m)$ являются соответственно математическим ожиданием и дисперсией этой случайной величины. Полагая в неравенстве Чебышева

$$\mathbf{P}\{|R(M) - S(n, m)| \geq t\} \leq \frac{D(n, m)}{t^2}$$

величину t равной $t(n) = \alpha(n)S(n, m)(m\sqrt{n})$ и учитывая, что

$$\frac{D(n, m)}{S^2(n, m)} \leq \frac{4}{m^2 n} (1 + O(1/m)),$$

получим, что $D(n, m)/t^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Зильберман Б. С., О расположении зарядов в вершинах единичного n -мерного куба. *Докл. АН СССР* (1963) **149**, №3, 546–549.
2. Круглова Т. Н., Об асимптотическом методе решения задачи о зарядах. *Проблемы кибернетики* (1965) **13**, 29–44.
3. Леонтьев В. К., Асимптотически устойчивые расположения зарядов в вершинах единичного n -мерного куба. *Проблемы кибернетики* (1970) **23**, 29–42.
4. Перина Е. В., О множествах вершин n -мерного единичного куба с максимальной энергией. *Проблемы кибернетики* (1974) **27**, 279–292.
5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А., *Задачи и упражнения по курсу дискретной математики*. Наука, Москва, 1992.
6. Воронин В. П., О множествах вершин N -мерного единичного куба с минимальной суммой попарных расстояний. В кн.: *Вопросы кибернетики. Комбинаторный анализ и теория графов*. Изд-во Научного совета по комплексной проблеме “Кибернетика” АН СССР, Москва, 1980, с. 48–57.

Статья поступила 10.11.2003.