Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Асратян, Н. Н. Кузюрин, Анализ точности вероятностного округления для задач целочисленного линейного программирования, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 4, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 06:08:19

Анализ точности вероятностного округления для задач целочисленного линейного программирования

© 2004 г. А. С. Асратян, Н. Н. Кузюрин

Мы используем метод вероятностного округления для оценки величины оптимума программы

$$\{\min \mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} - \text{целочисленный вектор}\},$$

где $\mathbf{b} > \mathbf{0}$, $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ — рациональные векторы и $\mathbf{A}$ — произвольная рациональная матрица. Наша оценка обобщает некоторые известные оценки для целочисленных программ типа покрытия, то есть тех же программ с условием неотрицательности всех элементов $\mathbf{A}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 02-01-00713 и 04-01-00359, и при поддержке Шведской академии наук.

1. Введение

Мы рассматриваем задачу

$$\{\min \mathbf{c}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} - \text{целочисленный вектор}\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T > \mathbf{0}$ — векторы с рациональными компонентами и $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — произвольная рациональная $m \times n$ матрица.

Эта задача NP-полна [16]. С другой стороны, линейная релаксация (1) разрешима в полиномиальное время [6, 10] и может быть использована для аппроксимации программы (1). По этой причине отношение значения оптимума задачи (1) к оптимуму q ее линейной релаксации было в центре многочисленных исследований [12, 16]. В дальнейшем мы будем говорить, что класс программ (1) имеет K -аппроксимацию, если отношение оптимума (1) к оптимуму q ее линейной релаксации не превосходит K .

В [12] доказано, что задача (1) имеет $(1 + \ln m)$ -аппроксимацию при $\mathbf{c} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)^T$ и $a_{ij} \in \{0, 1\}$ для всех i, j . В действительности, этот случай эквивалентен хорошо известной задаче о покрытии. Сходные результаты независимо получены в [1, 4, 5]. В [8] результат статьи [12] распространен на случай взвешенной задачи о покрытии.

В [3, 7] техника вероятностного округления [2, 14] была применена для аппроксимации класса программ типа покрытия, то есть программ (1), где все элементы матрицы $\mathbf{A}$ неотрицательны. Анализ в [7] влечет, в частности, $O(\log m)$ -аппроксимацию целочисленных

программ типа покрытия. Дальнейшие улучшения анализа вероятностного округления для таких программ были получены в [17]. Идея вероятностного округления заключается в следующем. Пусть $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_n)^T$ — оптимальное решение линейной релаксации задачи (1) и $\mathbf{x} = (Kx_1, \dots, Kx_n)^T$ для некоторого параметра $K > 1$. Ясно, что $\mathbf{x}$ является допустимым решением той же задачи. Затем определяют случайный вектор $\mathbf{Z}$, рассматривая дробную часть каждого Kx_i как вероятность $p_i = Kx_i - \lfloor Kx_i \rfloor$ и округляя Kx_i с вероятностью p_i до $\lfloor Kx_i \rfloor + 1$ и с вероятностью $1 - p_i$ до $\lfloor Kx_i \rfloor$. Далее можно попытаться подобрать подходящее значение параметра K так, чтобы случайный вектор $\mathbf{Z}$ являлся допустимым решением для (1). Обычно оценки вероятностей больших отклонений используются для того, чтобы показать, что с большой вероятностью каждое ограничение исходной программы выполнено на $\mathbf{Z}$.

Однако не было известно, какую аппроксимацию вероятностное округление может гарантировать для общих классов целочисленных программ, где отрицательные элементы могут быть представлены в матрице ограничений.

В данной работе методом вероятностного округления мы получаем эффективно вычисляемую верхнюю оценку отношения оптимума программы (1) к оптимуму q ее линейной релаксации для произвольной матрицы A , где могут быть представлены и отрицательные элементы. В оценке фигурирует параметр, который эффективно вычислим по исходной матрице. В частности, полученные результаты дают $O(\log m)$ -аппроксимацию для класса целочисленных программ, включающего класс программ типа покрытия. Проблема нахождения таких классов была поставлена в [7] и [15]. Наконец, найдены достаточные условия, гарантирующие $(1 + \varepsilon)$ -аппроксимацию для программ (1).

2. Формулировка результатов

Без ограничения общности мы предполагаем, что

- (a) линейная релаксация (1) разрешима (в противном случае целочисленная программа (1) также не имеет решений);
- (b) $q > 0$ (если $q = 0$, то умножая рациональное решение на достаточно большое целое, мы получим допустимое целочисленное решение $\mathbf{Z}$ задачи (1) такое, что $c\mathbf{Z} = 0$);
- (c) $\max_j c_j = 1$ и $\max_j |a_{ij}| = 1$ для $i = 1, \dots, m$ (произвольная задача (1) может быть сведена к этой эквивалентной форме делением каждого коэффициента целевой функции на $\max_j c_j$ и делением i -го неравенства в (2) на $\max_j |a_{ij}|$ для каждого $i = 1, \dots, m$).

Пусть $A^+ = (|a_{ij}|)$. Ясно, что для любого решения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ задачи (1) существует $D \geq 1$, например,

$$D = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| x_j / \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right),$$

такое, что $A^+ \mathbf{x} - D A \mathbf{x} \leq 0$.

Мы будем рассматривать линейные релаксации задачи (1) с дополнительным требованием, то есть систему неравенств с переменными $x_1, \dots, x_n$ и одной дополнительной переменной D :

$$A^+ \mathbf{x} - D A \mathbf{x} \leq 0, \quad \mathbf{x} \in F, \quad (2)$$

где $\mathbf{F}$ — множество всех оптимальных решений линейной релаксации (1).

Пусть $D^* = D^*(A, b, c)$ обозначает инфимум по всем D таким, что система (2) имеет решение. Очевидно, $D^* \geq 1$. Более того, $D^* = 1$ для целочисленных программ типа покрытия, поскольку $A^+ = A$ для таких программ. Параметр D^* дает возможность принять во внимание соотношение положительных и отрицательных слагаемых в каждом неравенстве в процессе анализа вероятностного округления и получить верхнюю оценку оптимума (1).

Наш основной результат заключается в следующем.

Теорема 1. Пусть $B = \min_i b_i$, $B > 0$. Тогда для любого $D > D^*$ и любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует допустимое целочисленное решение $\mathbf{Z}$ задачи (1) такое, что

$$1 \leq c\mathbf{Z}/q \leq (1 - \varepsilon)^{-1}(1 + M + \sqrt{M}),$$

где

$$M = \frac{12D \ln(2m/\varepsilon)}{B}. \quad (3)$$

Полагая $\varepsilon = 1/2$, $D = 2D^*$ в теореме 1, получаем следующий результат.

Следствие 1. Если $D^*/B = O(1)$, то существует допустимое целочисленное решение $\mathbf{Z}$ задачи (1) такое, что

$$c\mathbf{Z}/q \leq k \ln(4m),$$

где k — некоторая положительная постоянная.

Это значит, что все программы, удовлетворяющие условию $D^*/B = O(1)$, имеют $O(\log m)$ -аппроксимацию. Следующее следствие теоремы 1 дает условие, гарантирующее $(1 + \varepsilon)$ -аппроксимацию, если положить $D = (49/48)D^*$.

Следствие 2. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $B > 49\varepsilon^{-2}D^* \ln(2m/\varepsilon)$. Тогда имеется допустимое целочисленное решение $\mathbf{Z}$ задачи (1) такое, что

$$1 \leq c\mathbf{Z}/q \leq (1 - \varepsilon)^{-1}(1 + \varepsilon).$$

Теорема 1 и следствия 1, 2 обобщают (с точностью до постоянного множителя) некоторые известные оценки [7, 12, 15] аппроксимируемости целочисленных программ типа покрытия, поскольку для каждой такой программы $D^* = 1$ и она эквивалентна такой же программе с $B \geq 1$ (см. [17]).

Мы покажем теперь, что можно эффективно вычислить D^* с произвольной точностью, то есть для данного $\delta > 0$, мы можем найти D_δ такое, что оно удовлетворяет условию (2), $|D^* - D_\delta| < \delta$ и время поиска ограничено полиномом от длины входа и $\log 1/\delta$.

Мы можем сделать это следующим образом. Найдем сначала оптимум q линейной релаксации задачи (1). Затем возьмем вектор $\mathbf{x}_0 = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbf{F}$ и положим

$$D_0 = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| x'_j / \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \right).$$

Ясно, что $(D_0, x'_1, \dots, x'_n)$ удовлетворяет (2). Теперь используем дихотомический поиск по D на интервале $[1, D_0]$, проверяя на каждом шаге, имеет ли система (2) решение при

фиксированном значении D . В действительности, система (2) эквивалентна следующей системе линейных неравенств (где D фиксировано):

$$\{c\mathbf{x} = q, A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, A^+\mathbf{x} - DA\mathbf{x} \leq 0, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

которая может быть решена в полиномиальное время [6, 10]. После k -го шага длина интервала, содержащего D^* , не превосходит $D_0 2^{-k}$. Выбирая $k \geq \log_2(D_0/\delta)$, получаем, что $D_0 2^{-k} \leq \delta$. Таким образом, D_δ может быть найдено за $\lceil \log_2(D_0/\delta) \rceil$ шагов.

Остается показать, что $\log_2 D_0$ ограничен полиномом от длины входа задачи (1). Известно (см. [16]), что имеется решение $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ линейной релаксации задачи (1) такое, что $\log \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)$ ограничен полиномом от размера входа. Тогда

$$D_0 \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| x_j / \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| x_j / b_i \right) \leq \frac{a_{\max}}{b_{\min}} \sum_{j=1}^n x_j,$$

где

$$a_{\max} = \max_{i,j} |a_{ij}|, \quad b_{\min} = \min_i b_i.$$

Справедливо неравенство

$$\log D_0 \leq \log \frac{a_{\max}}{b_{\min}} + \log \left(\sum_{j=1}^n x_j \right).$$

Следовательно, $\log D_0$ ограничен полиномом от длины входа.

Возникает естественный вопрос о возможных значениях D^* . Мы отвечаем на него в разделе 4, где представлен специальный класс целочисленных программ с матрицами ограничений состоящими из нулей, единиц и минус единиц и найдена явная формула для D^* для каждой программы из этого класса (теорема 2).

3. Доказательство теоремы 1

Нам потребуются два следующих факта.

Лемма 1 ([13, 17]). Пусть $x_1, \dots, x_n$ — независимые случайные величины такие, что x_i принимает два значения 0 и a_i , $0 < a_i \leq 1$, и $\mathbf{P}\{x_i = a_i\} = p_i$, $\mathbf{P}\{x_i = 0\} = 1 - p_i$. Тогда для

$$X = \sum_{i=1}^n x_i, \quad \mathbf{E}X = \sum_{i=1}^n a_i p_i$$

при любом $\delta > 0$ верны неравенства

$$\mathbf{P}\{X - \mathbf{E}X > \delta \mathbf{E}X\} \leq \exp\{(\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta)) \mathbf{E}X\},$$

$$\mathbf{P}\{X - \mathbf{E}X < -\delta \mathbf{E}X\} \leq \exp\{-(\delta^2/2) \mathbf{E}X\}.$$

Лемма 2. При $0 \leq \delta \leq 1$

$$\exp\{(\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta))\} \leq \exp\{-\delta^2/3\}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x - (1+x) \ln(1+x) + x^2/3.$$

Очевидно, что $f'(x) = 2x/3 - \ln(1+x)$. Неравенство леммы 2 эквивалентно неравенству $f(\delta) \leq 0$ для любого $0 \leq \delta \leq 1$. Чтобы доказать его, покажем, что $f'(x) \leq 0$ для любого $0 \leq x \leq 1$, что эквивалентно выполнению неравенства $\ln(1+x) \geq 2x/3$ для $0 \leq x \leq 1$.

Поскольку функция $\ln(1+x)$ выпукла и $2x/3$ линейна, достаточно проверить неравенство $\ln(1+x) \geq 2x/3$ на концах отрезка, $x = 0$ и $x = 1$. Ясно, что $\ln(1+0) \geq 0$ и $\ln(1+1) \geq 2/3$. Первое неравенство, в действительности, является равенством. Второе эквивалентно неравенству $2 \geq e^{2/3}$ и, в свою очередь, неравенству $2^3 \geq e^2$, которое легко может быть проверено.

Доказательство теоремы 1. Пусть $D > D^*$ и $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ — оптимальное решение линейной релаксации задачи (1) такое, что

$$A^+ \mathbf{x}' \leq D A \mathbf{x}'.$$

Ясно, что для любого $K > 1$ вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T = K \mathbf{x}'$ является допустимым решением линейной релаксации (1).

Используем технику вероятностного округления для доказательства теоремы 1. Пусть $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ — случайный вектор, j -я компонента которого есть $\lfloor x_j \rfloor + 1$ с вероятностью $p_j = x_j - \lfloor x_j \rfloor$ и $\lfloor x_j \rfloor$ с вероятностью $1 - p_j$. Пусть A_i — событие, заключающееся в том, что i -е ограничение нарушается на $\mathbf{Z}$, то есть

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} Z_j < b_i.$$

Тогда $W = \overline{A_1 \cup \dots \cup A_m}$ есть событие, заключающееся в том, что $\mathbf{Z}$ допустим для задачи (1).

Пусть

$$\mathbf{cZ} = \sum_{j=1}^n c_j Z_j.$$

Главная идея доказательства заключается в оценке условного математического ожидания $\mathbf{E}[\mathbf{cZ} \mid W]$ с использованием неравенства $\mathbf{E}[\mathbf{cZ} \mid W] \leq \mathbf{E}[\mathbf{cZ}] / \mathbf{P}\{W\}$. Ясно, что

$$\mathbf{E}[\mathbf{cZ}] = \sum_j c_j \mathbf{E}Z_j = \sum_j c_j K x'_j = K q,$$

и

$$\mathbf{P}\{W\} = 1 - \mathbf{P}\{A_1 \cup \dots \cup A_m\} \geq 1 - \sum_{i=1}^m \mathbf{P}\{A_i\}.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно показать, что

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{P}\{A_i\} \leq \varepsilon$$

при выборе $K = 1 + M + \sqrt{M}$, где $M = (12D/B) \ln(2m/\varepsilon)$. Мы сделаем это в остающейся части настоящего раздела.

Чтобы оценить $\mathbf{P}\{A_i\}$, определим независимые случайные величины $z_1, \dots, z_n$ такие, что $z_j = 1$ с вероятностью p_j и $z_j = 0$ с вероятностью $1 - p_j$ для каждого j . Легко проверить, что $Z_j = \lfloor x_j \rfloor + z_j$. Используя обозначения

$$Z^{(i)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} Z_j, \quad R_i = \mathbf{E} Z^{(i)} / b_i, \quad z^{(i)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j,$$

запишем равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_i\} &= \mathbf{P}\{Z^{(i)} < b_i\} = \mathbf{P}\{Z^{(i)} - \mathbf{E} Z^{(i)} < -(R_i - 1)b_i\} \\ &= \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E} z^{(i)} < -(R_i - 1)b_i\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Мы хотим применить лемму 1 для оценки (4). Однако прямое применение леммы 1 невозможно, поскольку в A могут присутствовать отрицательные элементы (что нарушает условие леммы 1). Главная простая идея оценки $\mathbf{P}\{A_i\}$ с помощью леммы 1 заключается в раздельном анализе для положительных и отрицательных элементов A . Для достижения этой цели мы используем следующее очевидное неравенство: для произвольных двух случайных величин X и Y и любого вещественного d

$$\mathbf{P}\{X + Y < d\} \leq \mathbf{P}\{X < d/2\} + \mathbf{P}\{Y < d/2\}. \quad (5)$$

Обозначая суммы слагаемых в $z^{(i)}$, соответствующих положительным и отрицательным элементам A , через

$$z_+^{(i)} = \sum_{j: a_{ij} > 0} a_{ij} z_j, \quad z_-^{(i)} = \sum_{j: a_{ij} < 0} |a_{ij}| z_j,$$

мы можем представить $z^{(i)}$ в виде $z^{(i)} = z_+^{(i)} - z_-^{(i)}$. Из (4) с учетом (5) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_i\} &= \mathbf{P}\{z^{(i)} - \mathbf{E} z^{(i)} < -(R_i - 1)b_i\} = \mathbf{P}\{z_+^{(i)} - \mathbf{E} z_+^{(i)} - z_-^{(i)} + \mathbf{E} z_-^{(i)} < -(R_i - 1)b_i\} \\ &\leq \mathbf{P}\{z_+^{(i)} - \mathbf{E} z_+^{(i)} < -(1/2)(R_i - 1)b_i\} + \mathbf{P}\{\mathbf{E} z_-^{(i)} - z_-^{(i)} < -(1/2)(R_i - 1)b_i\} \\ &= \mathbf{P}\{z_+^{(i)} - \mathbf{E} z_+^{(i)} < -(1/2)(R_i - 1)b_i\} + \mathbf{P}\{z_-^{(i)} - \mathbf{E} z_-^{(i)} > (1/2)(R_i - 1)b_i\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для краткости мы используем далее обозначения

$$P_i^{(+)}(\delta) = \mathbf{P}\{z_+^{(i)} - \mathbf{E} z_+^{(i)} < -\delta b_i\}, \quad P_i^{(-)}(\delta) = \mathbf{P}\{z_-^{(i)} - \mathbf{E} z_-^{(i)} > \delta b_i\}.$$

Рассмотрим положительные слагаемые. Пусть $s_i = \mathbf{E} z_+^{(i)} / b_i$. Ясно, что $s_i > 0$. По лемме 1

$$\begin{aligned} P_i^{(+)}(\delta) &= \mathbf{P}\{z_+^{(i)} - \mathbf{E} z_+^{(i)} < -(\delta/s_i)\mathbf{E} z_+^{(i)}\} \\ &\leq \exp\{(-\delta^2/(2s_i^2))\mathbf{E} z_+^{(i)}\} = \exp\{-\delta^2 b_i/(2s_i)\}. \end{aligned}$$

Мы докажем сейчас, что $s_i \leq R_i D$. Ясно, что

$$\begin{aligned} s_i b_i = \mathbf{E} z_+^{(i)} &\leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| p_j \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| x_j \\ &= K \sum_{j=1}^n |a_{ij}| x'_j \leq K D \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j = D \mathbf{E} Z^{(i)} = D R_i b_i. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P_i^{(+)}(\delta) \leq \exp\{-\delta^2 b_i / (2R_i D)\}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь отрицательные слагаемые. Пусть $r_i = \mathbf{E}z_-^{(i)} / b_i$. Ясно, что $r_i > 0$. По лемме 1

$$\begin{aligned} P_i^{(-)}(\delta) &= \mathbf{P}\{z_-^{(i)} - \mathbf{E}z_-^{(i)} > (\delta/r_i)\mathbf{E}z_-^{(i)}\} \\ &\leq \exp\{((\delta/r_i) - (1 + (\delta/r_i)) \ln(1 + (\delta/r_i)))\mathbf{E}z_-^{(i)}\} \\ &= \exp\{(\delta - (r_i + \delta) \ln(1 + (\delta/r_i)))b_i\}. \end{aligned}$$

Используя те же рассуждения, что и для положительных слагаемых, видим, что $r_i \leq R_i D$. Беря производную, можно проверить, что функция

$$g(r) = \delta - (r + \delta) \ln(1 + (\delta/r))$$

является неубывающей. Следовательно, полагая $r_i = R_i D$, получаем, что

$$P_i^{(-)}(\delta) \leq \exp\{(\delta/(R_i D) - (1 + \delta/(R_i D)) \ln(1 + \delta/(R_i D)))R_i D b_i\}.$$

Пусть $\delta' = \delta/(R_i D)$ и $\delta = (R_i - 1)/2$. Очевидно, что $\delta' < 1$, и мы можем применить лемму 2 и получить соотношения

$$P_i^{(-)}(\delta) \leq \exp\{(-(\delta')^2/3)R_i D b_i\} = \exp\{-\delta^2 b_i / (3R_i D)\}. \quad (8)$$

Комбинируя (6), (7) и (8), получаем (с $\delta = (R_i - 1)/2$) неравенство

$$\mathbf{P}\{A_i\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{(R_i - 1)^2}{12R_i} b_i / D\right\}.$$

Из определения R_i следует, что $\mathbf{E}Z^{(i)} = R_i b_i$. С другой стороны,

$$\mathbf{E}Z^{(i)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{E}Z_j = K \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \geq K b_i,$$

откуда вытекает, что $R_i \geq K$. Используя неравенства $R_i \geq K > 1$ и $b_i \geq B$ и тот факт, что функция $F(R) = (R - 1)^2/R$ возрастает при $R > 1$, получаем, что $\mathbf{P}\{A_i\} \leq f(K)$, где

$$f(K) = 2 \exp\left\{-\frac{(K - 1)^2}{12K} B / D\right\}.$$

Выберем теперь K так, чтобы $f(K) < \varepsilon/m$. Логарифмируя обе части, получаем, что

$$\frac{(K - 1)^2}{K} > \frac{12D \ln(2m/\varepsilon)}{B}. \quad (9)$$

Обозначая правую часть через M и полагая $K = 1 + y$, находим, что $y^2 > (1 + y)M$. Решая это неравенство, получаем, что

$$y > M/2 + M/2\sqrt{1 + 4/M}.$$

Ясно, что

$$\frac{M}{2} + \frac{M}{2}\sqrt{1+4/M} < \frac{M}{2} + \frac{M}{2}(1 + \sqrt{4/M}) = M + \sqrt{M}.$$

Это неравенство показывает, что (9) выполнено при $K = 1 + M + \sqrt{M}$.

Таким образом, этот выбор K влечет неравенство

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{P}\{A_i\} \leq m(\varepsilon/m) \leq \varepsilon,$$

и следовательно, $\mathbf{P}\{W\} \geq 1 - \varepsilon$. Наконец, получаем, что

$$\mathbf{E}[cZ \mid W] \leq \mathbf{E}[cZ]/\mathbf{P}\{W\} \leq (1 - \varepsilon)^{-1} \mathbf{E}[cZ] = (1 - \varepsilon)^{-1} Kq.$$

Отсюда вытекает, что существует допустимое целочисленное решение $\mathbf{Z}$ задачи (1) такое, что

$$c\mathbf{Z} \leq (1 - \varepsilon)^{-1} Kq,$$

где

$$K = 1 + M + \sqrt{M}, \quad M = (12D/B) \ln(2m/\varepsilon)B.$$

Это неравенство было доказано выше для любого $D > D^*$. Используя предельный переход $D_N \downarrow D^*$, можно получить неравенство теоремы 1 с D^* вместо D .

4. Целочисленные программы с произвольным значением $D^* > 1$

Мы уже показали, что D^* можно эффективно вычислить (с произвольной точностью) для любой программы (1), однако трудно описать классы программ, для которых D^* известно в явном виде. Один пример дают целочисленные программы типа покрытия, для которых $D^* = 1$. В этом разделе мы представим семейство целочисленных программ с произвольным $D^* > 1$.

Пусть m, n, k_1, k_2, p_1, p_2 — неотрицательные целые числа и $R(m, n, k_1, k_2, p_1, p_2)$ обозначает класс всех матриц размера $m \times n$ с элементами $-1, 0, +1$, где каждая матрица удовлетворяет следующим условиям: число единиц и число минус единиц в каждой строке равно, соответственно, k_1 и k_2 , число единиц и число минус единиц в каждом столбце равно, соответственно, p_1 и p_2 .

По определению, каждая матрица $A = (a_{ij}) \in R(m, n, k_1, k_2, p_1, p_2)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} &= k_1 - k_2, & \sum_{i=1}^m a_{ij} &= p_1 - p_2, \\ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| &= k_1 + k_2, & \sum_{i=1}^m |a_{ij}| &= p_1 + p_2. \end{aligned}$$

В случае $k_2 = p_2 = 0$ этот класс, в действительности, является хорошо известным классом Райзера (0, 1)-матриц с k_1 единицами в каждой строке и p_1 единицами в каждом столбце [9].

Теорема 2. Рассмотрим задачу (1) с $\mathbf{c} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{b} = (b, \dots, b)^T$, $b > 0$, и $A \in R(n, m, k_1, k_2, p_1, p_2)$. Тогда

$$D^* = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}.$$

Положим для краткости $p = p_1 - p_2$ и $k = k_1 - k_2$.

Предложение 1. Справедливо равенство $q = bm/p$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ — оптимальное решение линейной релаксации задачи (1). Ясно, что

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq \sum_{i=1}^m b = bm.$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^n x_j p = qp.$$

Следовательно, $q \geq bm/p$. Более того, $\mathbf{x} = (b/k, \dots, b/k)$ является допустимым решением линейной релаксации задачи (1), поскольку

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{b}{k} = \frac{b}{k} \sum_{j=1}^n a_{ij} = (b/k)k = b.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^n b/k \geq q,$$

то есть $bn/k \geq q$. Ясно, что

$$\frac{bn}{k} \geq q \geq \frac{bm}{p}. \quad (10)$$

Более того, $n/k = m/p$, поскольку

$$np = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} = mk.$$

Отсюда и из (10) вытекает, что $q = bm/p = bn/k$.

Предложение 2. Справедлива оценка

$$D^* \leq (k_1 + k_2)/(k_1 - k_2).$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{y})_i$ обозначает i -ю компоненту вектора $\mathbf{y}$. Ясно, что D^* может быть представлено как оптимум следующей задачи: найти инфимум величины

$$\max_i \frac{(A^+ \mathbf{x})_i}{(A \mathbf{x})_i} \quad (11)$$

при ограничениях

$$cx = q, \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0. \quad (12)$$

Из предложения 1 вытекает, что вектор $x^* = (b/k, \dots, b/k)$ является оптимальным решением линейной релаксации задачи (1). Ясно также, что x^* является допустимым решением задачи (11)–(12). Для всех $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} (A^+ x^*)_i &= k_1 \frac{b}{k} + k_2 \frac{b}{k} = b \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}, \\ (Ax^*)_i &= k_1 \frac{b}{k} - k_2 \frac{b}{k} = b \frac{k_1 - k_2}{k} = b. \end{aligned}$$

Тогда

$$\max_i \frac{(A^+ x^*)_i}{(Ax^*)_i} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}.$$

Вектор x^* является допустимым решением линейной релаксации (1) и D^* — оптимум задачи (11)–(12), поэтому

$$D^* \leq (k_1 + k_2)/(k_1 - k_2).$$

Предложение 3. *Справедлива оценка*

$$D^* \geq (k_1 + k_2)/(k_1 - k_2).$$

Доказательство. Оценим целевую функцию (11), используя хорошо известное неравенство

$$\max_i \frac{z_i}{y_i} \geq \frac{z_1 + \dots + z_m}{y_1 + \dots + y_m},$$

где $z_i > 0, y_i > 0, i = 1, \dots, m$. Для любого допустимого решения x задачи (11)–(12)

$$\max_i \frac{(A^+ x)_i}{(Ax)_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^m (A^+ x)_i}{\sum_{i=1}^m (Ax)_i},$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^m (A^+ x)_i}{\sum_{i=1}^m (Ax)_i} &= \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| x_j}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|}{\sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij}} \\ &= \frac{(k_1 + k_2) \sum_{j=1}^n x_j}{(k_1 - k_2) \sum_{j=1}^n x_j} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$D^* \geq (k_1 + k_2)/(k_1 - k_2).$$

Доказательство теоремы 2. Требуемое равенство из теоремы 2 следует из нижней оценки предложения 3 и верхней оценки предложения 2.

Отметим, что в [11] рассматривались программы (1) со сходными классами матриц из нулей, единиц и минус единиц, и получены неуплучшаемые по порядку верхние оценки величины оптимума программ (1).

Список литературы

1. Нигматуллин Р. Г., Алгоритм наискорейшего спуска в задаче на покрытие. В сб.: *Труды симпозиума по приближенным алгоритмам*. Киев, 1969, с. 36.
2. Кузюрин Н. Н., Асимптотически точный полиномиальный алгоритм для одного класса задач линейного булева программирования. В сб.: *Тезисы докл. 3-й Всесоюзной школы «Дискретная оптимизация и компьютеры»*. ЦЭМИ, 1987, с. 129.
3. Кузюрин Н. Н., Асимптотически точный полиномиальный алгоритм в целочисленном линейном программировании. *Дискретная математика* (1989) 1, №2, 79–85.
4. Сапоженко А. А., Об одном доказательстве верхней оценки сложности минимальной днф для почти всех функций. В сб.: *Тезисы докладов I Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики*. Новосибирск, 1969, с. 103.
5. Сапоженко А. А., О сложности днф, получаемых с помощью градиентного алгоритма. *Дискретный анализ* (1972), №5, 111–116.
6. Хачиян Л. Г., Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. *Докл. АН СССР* (1979) 244, 1093–1096.
7. Bertsimas D., Vohra R., Rounding algorithms for covering problems. *Math. Programming* (1998) 80, 63–89.
8. Chvatal V., A greedy heuristic for the set-covering problem. *Math. Oper. Res.* (1979) 4, 233–235.
9. Ford L. R., Fulkerson D. R., *Flows in networks*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1962.
10. Karmarkar N., A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica* (1984) 4, 373–395.
11. Kuzjurin N., Generalized covers and their approximations. In: *EuroComb'03-Abstr.* Prague, 2003, pp. 247–250.
12. Lovasz L., On the ratio of optimal integral and fractional covers. *Discrete Math.* (1975) 13, 383–390.
13. Motwani R., Raghavan P., *Randomized algorithms*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
14. Raghavan P., Thompson C. D., Randomized rounding: a technique for provably good algorithms and algorithmic proofs. *Combinatorica* (1987) 37, 365–374.
15. Rajagopalan S., Vazirani V. V., Primal-dual (RNC) approximation algorithms for set cover and covering integer programs. *SIAM J. Comput.* (1999) 28, 525–540.
16. Schrijver A., *Theory of linear and integer programming*. Wiley, New York, 1999.
17. Srinivasan A., Improved approximations of packing and covering problems. *SIAM J. Comput.* (1999) 29, 648–670.

Статья поступила 13.04.2004.