Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Э. Гасанов, А. Н. Ерохин, Линейный по памяти непереборный алгоритм решения двумерной задачи интервального поиска, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 4, 49–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:33:37

Линейный по памяти непереборный алгоритм решения двумерной задачи интервального поиска

© 2004 г. Э. Э. Гасанов, А. Н. Ерохин

Предлагается алгоритм решения двумерной задачи интервального поиска, который имеет следующие характеристики: объем требуемой памяти порядка k , среднее время поиска (без учета времени перечисления ответа) порядка $\sqrt{k}$, где k — размер исходной базы данных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00748.

1. Введение

В работе рассматривается двумерная задача интервального поиска, которая состоит в поиске в конечном подмножестве вещественной плоскости всех тех точек, которые попадают в прямоугольник-запрос. В работе [1] приводится алгоритм решения этой задачи, зависящий от параметра, при вариации которого объем памяти, необходимый алгоритму, изменяется от $O(k^3)$ до $O(k \log k)$, при этом среднее время поиска (без учета времени на перечисление ответа) изменяется от $O(1)$ до $O(\log k)$. Здесь k — мощность множества, в котором производится поиск. Как видно, в лучшем (по памяти) случае требуется $O(k \log k)$ памяти. С другой стороны, легко привести пример линейного по памяти алгоритма. Это переборный алгоритм, который по очереди просматривает точки из исходного множества и проверяет на попадание в прямоугольник-запрос. Но среднее время у этого алгоритма равно $O(k)$. В данной работе предлагается линейный по памяти алгоритм, который имеет среднее время поиска (помимо перечисления ответа), равное $O(\sqrt{k})$.

Результаты данной работы были анонсированы в [2].

Авторы благодарны В. Б. Кудрявцеву и А. С. Подколзину за поддержку в работе и Д. В. Алексееву за ценные замечания и обсуждения.

2. Основные понятия и формулировка результата

Мы будем использовать терминологию и обозначения работ [1, 3].

Пусть X — множество запросов с вероятностным пространством $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, где σ — алгебра подмножеств множества X , $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на σ ; Y — множество записей (объектов поиска); ρ — бинарное отношение на $X \times Y$, называемое отношением поиска. Пятерку $S = \langle X, Y, \rho, \sigma, \mathbf{P} \rangle$ будем называть типом. Тройку $I = \langle X, V, \rho \rangle$, где V —

некоторое конечное подмножество множества Y , в дальнейшем называемое библиотекой, будем называть задачей информационного поиска (ЗИП) типа S и будем считать, что ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$ содержательно состоит в перечислении для произвольно взятого запроса $x \in X$ всех тех и только тех записей $y \in V$ таких, что $x \rho y$.

Пусть f — одноместный предикат, определенный на X , то есть $f: X \rightarrow \{0, 1\}$. Множество

$$N_f = \{x \in X: f(x) = 1\}$$

назовем характеристическим множеством предиката f .

Множество

$$O(y, \rho) = \{x \in X: x \rho y\}$$

назовем тенью записи $y \in Y$.

Функцию

$$\chi_{y, \rho}: X \rightarrow \{0, 1\}$$

такую, что $N_{\chi_{y, \rho}} = O(y, \rho)$ назовем характеристической функцией записи y .

Пусть F — множество символов одноместных предикатов, определенных на множестве X , G — множество символов одноместных переключателей, определенных на множестве X . Под переключателем будем понимать функцию, областью значений которой является конечное подмножество натурального ряда. Пару $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$ назовем базовым множеством.

Понятие информационного графа (ИГ) над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$ определяется следующим образом. Берется конечная многополюсная ориентированная сеть. В ней выбирается некоторый полюс, который называется корнем. Остальные полюсы называются листьями и им приписываются записи из Y , причем разным листьям могут быть приписаны одинаковые записи. Некоторые вершины сети (в том числе это могут быть и полюсы) называются переключательными и им приписываются переключатели из G . Ребра, исходящие из каждой из переключательных вершин, нумеруются подряд, начиная с 1, и называются переключательными ребрами. Ребра, не являющиеся переключательными, называются предикатными и им приписываются предикаты из множества F . Таким образом нагруженную многополюсную ориентированную сеть называем ИГ над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$.

Функционирование ИГ определяется следующим образом. Скажем, что предикатное ребро проводит запрос $x \in X$, если предикат, приписанный этому ребру, принимает значение 1 на запросе x . Переключательное ребро, которому приписан номер n , проводит запрос $x \in X$, если переключатель, приписанный началу этого ребра, принимает значение n на запросе x . Ориентированная цепочка ребер проводит запрос $x \in X$, если каждое ребро цепочки проводит запрос x . Запрос $x \in X$ проходит в вершину β ИГ, если существует ориентированная цепочка, ведущая из корня в вершину β , которая проводит запрос x . Запись y , приписанная листу α , попадает в ответ ИГ на запрос $x \in X$, если запрос x проходит в лист α . Ответом ИГ U на запрос x назовем множество записей, попавших в ответ ИГ на запрос x , и обозначим его $\mathcal{J}_U(x)$. Эту функцию $\mathcal{J}_U(x)$ будем считать результатом функционирования ИГ U .

Пусть дана ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$. Скажем, что ИГ U решает ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$, если

$$\mathcal{J}_U(x) = \{y \in V: x \rho y\}.$$

Введем понятие сложности ИГ. Пусть β — некоторая вершина ИГ. Предикат, определенный на множестве запросов, который принимает значение 1 на запросе x , если запрос

проходит в вершину β , и 0 в противном случае, назовем функцией фильтра вершины β и обозначим $\varphi_\beta(x)$.

Сложностью ИГ U на запросе $x \in X$ назовем число

$$T(U, x) = \sum_{\beta \in \mathcal{P}} \varphi_\beta(x) + \sum_{\beta \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}} \psi_\beta \varphi_\beta(x),$$

где $\mathcal{R}$ — множество вершин ИГ U , $\mathcal{P}$ — множество переключаемых вершин ИГ U , ψ_β — количество ребер, исходящих из вершины β .

Скажем, что базовое множество $\mathcal{F}$ измеримо, если каждая функция из $\mathcal{F}$ измерима (относительно алгебры σ). Далее всюду будем предполагать, что базовое множество измеримо. В этом случае для любого ИГ U над $\mathcal{F}$ функция $T(U, x)$ как функция от x измерима.

Сложностью ИГ U назовем математическое ожидание величины $T(U, x)$, то есть число

$$T(U) = \mathbf{M}_x T(U, x).$$

Объемом $Q(U)$ ИГ U назовем число ребер в графе U . Сложностью задачи I при базовом множестве $\mathcal{F}$ назовем число

$$T(I, \mathcal{F}) = \inf\{T(U): U \in \mathcal{U}(I, \mathcal{F})\},$$

где $\mathcal{U}(I, \mathcal{F})$ — множество всех ИГ над базовым множеством $\mathcal{F}$, решающих ЗИП I .

Дадим описание типа задач поиска, который соответствует двумерной задаче интервального поиска.

Пусть $Y_{\text{int } 2} = (0, 1]^2$ — множество записей и

$$X_{\text{int } 2} = \{x = (u_1, v_1, u_2, v_2): 0 < u_i \leq v_i \leq 1, i = 1, 2\}$$

— множество запросов. Пусть задано вероятностное пространство $\langle X_{\text{int } 2}, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, где $\mathbf{P}$ задается функцией плотности вероятности $p(x)$.

Отношение поиска $\rho_{\text{int } 2}$ определено на $X_{\text{int } 2} \times Y_{\text{int } 2}$ и задается соотношением

$$(u_1, v_1, u_2, v_2) \rho_{\text{int } 2} (y_1, y_2) \iff u_i \leq y_i \leq v_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда тип

$$S_{\text{int } 2} = \langle X_{\text{int } 2}, Y_{\text{int } 2}, \rho_{\text{int } 2}, \sigma, \mathbf{P} \rangle$$

назовем типом двумерного интервального поиска.

Пусть $\mathbf{R}$ — вещественная прямая, а $\mathbf{R}^2$ — вещественная плоскость.

Если $a \in \mathbf{R}$, то через $]a[$ обозначим наименьшее целое, не меньшее a .

Пусть

$$F_1 = \{\chi_{a, \rho_{\text{int}2}} : a \in Y_{\text{int}2}\}, \quad (1)$$

$$G_1 = \left\{ g_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \rho_{\text{int}2} a, \\ 2 & \text{в противном случае} \end{cases} : a \in Y_{\text{int}2}, x \in X_{\text{int}2} \right\}, \quad (2)$$

$$G_2 = \{g_{\cdot, m}^1(u_1, v_1, u_2, v_2) =]u_1 m[: m \in \mathbf{N}\}, \quad (3)$$

$$G_3 = \left\{ g_{\leq, a}^1(u_1, v_1, u_2, v_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } u_1 \leq a, \\ 2, & \text{если } u_1 > a \end{cases} : a \in (0, 1] \right\}, \quad (4)$$

$$G_4 = \{g_{\cdot, m}^2(u_1, v_1, u_2, v_2) =]v_1 m[: m \in \mathbf{N}\}, \quad (5)$$

$$G_5 = \left\{ g_{\leq, a}^2(u_1, v_1, u_2, v_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_1 \leq a, \\ 2, & \text{если } v_1 > a \end{cases} : a \in (0, 1] \right\}, \quad (6)$$

$$G_6 = \{g_{\cdot, m}^3(u_1, v_1, u_2, v_2) =]v_2 m[: m \in \mathbf{N}\}, \quad (7)$$

$$G_7 = \left\{ g_{<, a}^3(u_1, v_1, u_2, v_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_2 < a, \\ 2, & \text{если } v_2 \geq a \end{cases} : a \in (0, 1] \right\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{F} = \langle \{1\} \cup F_1, G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6 \cup G_7 \rangle, \quad (9)$$

где 1 — функция тождественная единица, определенная на $X_{\text{int}2}$.

Теорема 1. Если $I = \langle X_{\text{int}2}, V, \rho_{\text{int}2} \rangle$ — двумерная задача интервального поиска, где $|V| = k$, $\mathcal{F}$ — базовое множество, определяемое соотношениями (1)–(9), функция плотности вероятности $p(x)$, определяющая вероятностную меру $\mathbf{P}$, ограничена константой c , то

$$\sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho_{\text{int}2})) \leq T(I, \mathcal{F}, k(c+9) + 2\sqrt{k}) \leq \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho_{\text{int}2})) + 14\sqrt{k}.$$

Нижняя оценка следует из теоремы 4 в [3] или теоремы 3 в [4]. Смысл нижней оценки в том, что время поиска не может быть меньше времени, необходимого для перечисления ответа.

Далее будет приведено доказательство верхней оценки.

3. Доказательство основного результата

На множестве $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ введем отношение $\leq$ следующим образом:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \ \& \ y_1 \leq y_2.$$

Скажем, что пара точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$ сравнима, если

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \vee (x_2, y_2) \leq (x_1, y_1),$$

в противном случае эта пара точек называется несравнимой.

Множество точек $S \subseteq \mathbf{R}^2$ назовем поперечным (продольным) слоем, если любая пара точек из S не сравнима (сравнима). Множество точек $S \subseteq \mathbf{R}^2$ назовем слоем, если S поперечный или продольный слой.

Лемма 1. Если $I = \langle X_{\text{int}2}, V, \rho_{\text{int}2} \rangle$ — двумерная задача интервального поиска такая, что V — слой мощности k , $\mathcal{F}$ — базовое множество, определяемое соотношениями (1)–(9), функция плотности вероятности $p(x)$, определяющая вероятностную меру $\mathbf{P}$, ограничена константой c , то существует ИГ $U_V \in \mathcal{U}(I, \mathcal{F})$ такой, что

$$Q(U_V) \leq k(c + 9), \quad T(U_V) \leq 6 + \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho_{\text{int}2})).$$

Доказательство. Прежде, чем перейти к доказательству, дадим неформальное описание алгоритма, на котором достигается оценка леммы.

Пусть на вход алгоритма поступает запрос (u_1, v_1, u_2, v_2) . В библиотеке, упорядоченной по возрастанию абсцисс точек из библиотеки, находится наименьшая по абсциссе точка, абсцисса которой не меньше, чем u_1 . Эта задача соответствует первой задаче о близости, описанной, например, в разделе 2.3 в [3] или в [5]. Решать эту задачу будем методом, описанным в доказательстве теоремы 13 в [3] или теоремы 2 в [5]. Согласно этим теоремам ее можно решить за константное в среднем время с линейными затратами памяти.

Если найденная точка попадает в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) , то, начиная с найденной точки, просматриваем точки библиотеки в направлении возрастания абсцисс и включаем их в ответ, пока просматриваемые точки попадают в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) . Процесс прекращается, если очередная точка не попала в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) или если просмотрены все точки библиотеки.

Если найденная точка не попадает в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) , то это не означает, что ответ пуст, просто она может не удовлетворить ограничениям по ординате. Предположим сначала, что библиотека является продольным слоем. Тогда в библиотеке, упорядоченной по возрастанию ординат точек из библиотеки, находится наименьшая по ординате точка, ордината которой не меньше, чем v_1 . Это опять же первая задача о близости, и ее можно решить за константное в среднем время с линейными затратами памяти. Если найденная точка не попадает в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) , то ответ на запрос пуст. Если найденная точка попадает в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) , то, начиная с найденной точки, просматриваем точки библиотеки в направлении возрастания ординат и включаем их в ответ, пока просматриваемые точки попадают в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) . Процесс прекращается, если очередная точка не попала в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) или если просмотрены все точки библиотеки.

В случае когда библиотека — поперечный слой, в библиотеке, упорядоченной по возрастанию ординат точек из библиотеки, находится наибольшая по ординате точка, ордината которой не больше, чем v_2 . Это вторая задача о близости, описанная в разделе 2.3 книги [3] или в [5], и ее также можно решить за константное в среднем время с линейными затратами памяти. В этом случае, если найденная точка попадает в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) , то, начиная с найденной точки, просматриваем точки библиотеки в направлении убывания ординат и включаем их в ответ, пока просматриваемые точки попадают в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) .

Как видно из описания, предлагаемый алгоритм имеет линейные затраты по памяти и в среднем затраты по времени равны времени перечисления ответа плюс некоторая константа.

Перейдем к формальному доказательству теоремы.

Пусть

$$V = \{(y_1^1, y_1^2), (y_2^1, y_2^2), \dots, (y_k^1, y_k^2)\}.$$

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ — упорядоченное по возрастанию множество абсцисс точек из V (у точки (y_i^1, y_i^2) y_i^1 — абсцисса, y_i^2 — ордината). Если в множестве V все точки имеют различные абсциссы, то $q = k$, иначе $q < k$. Поскольку в поперечном слое и абсциссы, и ординаты всех точек различны, то $q < k$ может быть только в случае продольного слоя.

Пусть $m = \lfloor qc/2 \rfloor$. Так как $c \geq 4$, то $m > q$.

Построим ИГ U_m^1 , который будет решать первую задачу о близости для множества A .

Возьмем вершину β_0 и объявим ее корнем графа. Выпустим m ребер из β_0 , припишем им числа от 1 до m , объявим β_0 точкой переключения и припишем ей переключатель $g_{\beta_0}^1$.

Пусть $A_i = ((i-1)/m, i/m] \cap A$, $l_i = |A_i|$, $i = 1, \dots, m$.

Конец ребра с номером i обозначим β_i .

Для всех i таких, что $V_i \neq \emptyset$, выполним следующую процедуру. Выпустим из вершины β_i бинарное сбалансированное дерево D_i с $l_i + 1$ концевыми вершинами, высота которого равна $\lceil \log_2(l_i + 1) \rceil$. Здесь и далее бинарное дерево — это ориентированное дерево, в каждую вершину которого, кроме корня, входит одно ребро, и из каждой вершины которого, кроме концевых вершин, исходит два ребра; корень — это вершина, в которую не входит ни одно ребро; концевые вершины — это вершины из которых не исходит ни одно ребро; высота вершины — это длина пути от корня к данной вершине; сбалансированное дерево — это дерево, высота концевых вершин которого отличается не более чем на 1; высота дерева — это максимальная высота концевых вершин дерева.

Объявим все концевые вершины этого дерева D_i , кроме последней (самой правой), листьями и сопоставим им слева направо в порядке возрастания элементы из A_i . Здесь и далее будем представлять дерево в виде некоторой его укладки на плоскости и понимать направления вправо, влево как направления на этой плоскости относительно данной укладки.

Для произвольной внутренней вершины β дерева D_i обозначим через V_β множество записей, соответствующих листьям, достижимым из β . Здесь и далее вершина α достижима из вершины β , если существует ориентированный путь ведущий из β в α . Пусть β' — вершина, в которую ведет левое ребро из β . Пусть

$$a_\beta = \max_{a \in V_{\beta'}} a.$$

Объявим все внутренние вершины дерева D_i вершинами переключения и для каждой внутренней вершины β левому ребру, из нее выходящему, припишем 1, а правому — 2, самой вершине припишем переключатель g_{β}^{1, a_β} .

Пусть $i \in \{1, \dots, m\}$. Обозначим $j(i)$ такой номер, что $j(i) > i$, $|A_{j(i)}| > 0$ и не существует j' такого, что $|A_{j'}| > 0$, $j' > i$ и $j' < j(i)$, то есть $j(i)$ — индекс ближайшего сверху непустого множества A_j . Если такого множества нет, то $j(i) = 0$.

Теперь для каждого дерева D_i самую правую концевую вершину дерева отождествим с самым левым листом дерева $D_{j(i)}$, если $j(i) \neq 0$.

Для каждого такого i , что $l_i = 0$, вершину β_i отождествим с самым левым листом дерева $D_{j(i)}$, если $j(i) \neq 0$.

Полученный граф и будет ИГ U_m^1 .

Обозначим через α_i концевую вершину, которой приписана запись a_i , $i = 1, \dots, q$, а через α_{q+1} самую правую концевую вершину в самом правом дереве D_i . Легко проверить, что функция проводимости между корнем и вершиной α_i , $i = 1, \dots, q+1$, имеет вид

$$f_i(u_1, v_1, u_2, v_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i-1} < u_1 \leq a_i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $a_0 = 0$, $a_{q+1} = 1$.

Подсчитаем объем графа U_m^1 .

Поскольку каждое из D_i есть дерево, в котором полустепень исхода любой вершины равна 2, в D_i будет ровно $2(l_i + 1) - 2$ ребра. Отсюда следует, что

$$Q(U_m^1) = m + \sum_{i=1}^m (2(l_i + 1) - 2) = m + 2 \sum_{i=1}^m l_i = m + 2k.$$

Подсчитаем сложность графа U_m^1 .

Положим

$$L(u) = \begin{cases} u, & \text{если } 0 \leq u \leq 3, \\ \log_2(u + 1) + 1, & \text{если } u \geq 3, \end{cases}$$

$$X_i = \{(u_1, v_1, u_2, v_2) \in X_{\text{int}2} : u_1 \in ((i - 1)/m, i/m]\}.$$

Пусть $x = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in X_{\text{int}2}$ — произвольный запрос и $u_1 \in ((i - 1)/m, i/m]$, т.е. $x \in X_i$. При $l_i = 0$ справедливо равенство $T(U_m^1, x) = 1 + L(l_i)$.

Если $l_i > 0$, то запрос x выйдет к некоторой концевой вершине дерева D_i и при этом он пройдет не более $1 + \lceil \log_2(l_i + 1) \rceil$ переключаемых вершин и, значит,

$$T(U_m^1, x) \leq 1 + \lceil \log_2(l_i + 1) \rceil \leq 1 + L(l_i).$$

По определению

$$\begin{aligned} T(U_m^1) &= \mathbf{M}_x T(U_m^1, x) = \int_{X_{\text{int}2}} T(U_m^1, x) \mathbf{P}(dx) \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{X_i} T(U_m^1, x) \mathbf{P}(dx) \leq \sum_{i=1}^m (1 + L(l_i)) \mathbf{P}(X_i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^m L(l_i) \mathbf{P}(X_i) \leq 1 + \frac{c}{2m} \sum_{i=1}^m L(l_i). \end{aligned}$$

Так как $m > q$, в силу вогнутости функции $L(u)$ и согласно лемме 14 из [3]

$$T(U_m^1) \leq 1 + \frac{c}{2m} \sum_{i=1}^m L(l_i) \leq 1 + q \frac{c}{2m} \leq 2.$$

Пусть библиотека V упорядочена в порядке возрастания абсцисс точек, и если абсциссы точек совпадают, то в порядке возрастания ординат, то есть $y_1^1 \leq y_2^1 \leq \dots \leq y_k^1$, и если $y_i^1 = y_{i+1}^1$, то $y_i^2 < y_{i+1}^2$. Пусть $y_{j_i} = (y_{j_i}^1, y_{j_i}^2) \in V$ — такая точка, что $y_{j_i}^1 = a_i$ и $y_{j_i}^2$ минимально среди тех точек из V , для которых абсцисса равна a_i , $i = 1, \dots, q$. Ясно, что если V — поперечный слой, то $j_i = i$.

Введем вершину γ_0 . Она будет корнем той части информационного графа, в которой будет осуществляться решение задачи о близости по ординатам. Введем k вершин δ_j , $j = 1, \dots, k$, объявим эти вершины листьями ИГ и припишем листу δ_j запись $y_j = (y_j^1, y_j^2) \in V$.

Для каждого листа α_i , $i = 1, \dots, q$, проделаем следующее. Объявим вершину α_i обычной вершиной и уберем запись a_i с этой вершины; объявим α_i переключаемой

вершиной и припишем ей переключатель $g_{y_{j_i}}$; выпустим из α_i два ребра; первое ребро направим в вершину δ_{j_i} и припишем ему число 1; второе ребро направим в вершину γ_0 и припишем ему число 2.

Из каждого листа δ_j , $j = 1, \dots, k-1$, выпустим ребро в лист δ_{j+1} , объявим это ребро предикатным и припишем ему предикат $\chi_{y_{j+1}, \rho_{\text{int}2}}$.

Построенный на данный момент ИГ функционирует следующим образом. Если на корень ИГ подается запрос $x = (u_1, v_1, u_2, v_2)$, то он проходит в такую вершину α_i , что $y_{j_{i-1}} < u_1 \leq y_{j_i}$ (здесь $y_{j_0} = 0$). Далее, если $x \rho_{\text{int}2} y_{j_i}$, то y_{j_i} включается в ответ и по цепочке предикатных ребер осуществляется просмотр записей вдоль слоя, пока они удовлетворяют запросу. Если y_{j_i} не удовлетворяет запросу, то есть y_{j_i} не попадает в прямоугольник (u_1, v_1, u_2, v_2) , то запрос проходит в вершину γ_0 .

Теперь из вершины γ_0 построим часть информационного графа, в которой будет осуществляться решение задачи о близости по ординатам.

Упорядочим библиотеку V в порядке возрастания ординат точек, и если ординаты точек совпадают, то в порядке возрастания абсцисс. Чтобы не использовать двойные и тройные индексы, будем считать, что после такого упорядочения библиотека имеет вид

$$V = \{(z_1^1, z_1^2), (z_2^1, z_2^2), \dots, (z_k^1, z_k^2)\},$$

то есть $z_1^2 \leq z_2^2 \leq \dots \leq z_k^2$, и если $z_i^2 = z_{i+1}^2$, то $z_i^1 < z_{i+1}^1$.

Сначала рассмотрим случай, когда V — продольный слой.

Пусть $B = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ — упорядоченное по возрастанию множество ординат точек из V ($p \leq k$).

Пусть $n = \lfloor pc/2 \rfloor$. Ясно, что $n > p$.

По аналогии с ИГ U_m^1 построим ИГ U_n^2 , который будет решать первую задачу о близости для множества B , но только вместо переключателя $g_{\cdot, m}^1$ мы воспользуемся переключателем $g_{\cdot, n}^2$, а вместо переключателей $g_{\leq, a_\beta}^1$ — переключателями $g_{\leq, b_\beta}^2$.

Вершину, которой приписано b_i , будем обозначать ζ_i , $i = 1, 2, \dots, p$, а через ζ_{p+1} обозначим самую правую концевую вершину в самом правом дереве D_i из U_n^2 . Легко проверить, что функция проводимости между вершиной γ_0 и вершиной ζ_i , $i = 1, \dots, p+1$, имеет вид

$$f'_i(u_1, v_1, u_2, v_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } b_{i-1} < v_1 \leq b_i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $b_0 = 0$, $b_{p+1} = 1$.

Так же как и в случае с ИГ U_m^1 , объем ИГ U_n^2 равен $Q(U_n^2) = n + 2k$, а сложность $T(U_n^2) \leq 2$.

Пусть $z_{j_i} = (z_{j_i}^1, z_{j_i}^2) \in V$ — такая точка, что $z_{j_i}^2 = b_i$ и $z_{j_i}^1$ минимально среди тех точек из V , для которых ордината равна b_i , $i = 1, \dots, p$.

Введем k вершин η_j , $j = 1, \dots, k$, объявим эти вершины листьями ИГ и припишем листу η_j запись $z_j = (z_j^1, z_j^2) \in V$.

Для каждого листа ζ_i , $i = 1, \dots, p$, сделаем следующее. Объявим вершину ζ_i обычной вершиной и уберем запись b_i с этой вершины; выпустим из ζ_i ребро в вершину η_{j_i} и припишем ему предикат $\chi_{z_{j_i}, \rho_{\text{int}2}}$.

Из каждого листа η_j , $j = 1, \dots, k-1$, выпустим ребро в лист η_{j+1} , объявим это ребро предикатным и припишем ему предикат $\chi_{z_{j+1}, \rho_{\text{int}2}}$.

Полученный ИГ обозначим U_V . Он будет решать нашу задачу описанным выше методом в случае продольного слоя.

В случае, когда V — поперечный слой, из вершины γ_0 построим ИГ для решения второй задачи о близости следующим образом.

Пусть $B = \{z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2\}$, $n = \lfloor kc/2 \rfloor$.

Выпустим n ребер из γ_0 , припишем им числа от 1 до n , объявим γ_0 точкой переключения и припишем ей переключатель $g_{\cdot, n}^3(u_1, v_1, u_2, v_2)$.

Пусть $B_i = ((i-1)/n, i/n] \cap V$, $l'_i = |B_i|$, $i = 1, \dots, n$.

Конец ребра с номером i обозначим γ_i .

Для всех i таких, что $B_i \neq \emptyset$, выполним следующую процедуру. Выпустим из вершины γ_i бинарное сбалансированное дерево D'_i с $l'_i + 1$ концевыми вершинами, которое имеет высоту $\lceil \log_2(l'_i + 1) \rceil$.

Объявим все концевые вершины этого дерева D'_i , кроме первой (самой левой), листьями и сопоставим им слева направо в порядке возрастания элементы из B_i .

Для произвольной внутренней вершины β дерева D'_i положим

$$b_\beta = \min_{b \in V_{\beta''}} b,$$

где β'' — конец правого ребра, исходящего из β .

Объявим все внутренние вершины дерева D'_i вершинами переключения и для каждой внутренней вершины β левому ребру, из нее выходящему, припишем 1, а правому — 2, самой вершине припишем переключатель $g_{\cdot, b_\beta}^3(x)$.

Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим $j(i)$ такой номер, что $j(i) < i$, $|B_{j(i)}| > 0$ и не существует j' такого, что $|B_{j'}| > 0$, $j' < i$ и $j' > j(i)$, то есть $j(i)$ — индекс ближайшего снизу непустого множества B_j . Если такого множества нет, то $j(i) = 0$.

Теперь для каждого дерева D'_i самую левую концевую вершину дерева отождествим с самым правым листом дерева $D'_{j(i)}$, если $j(i) \neq 0$.

Для каждого i такого, что $l'_i = 0$, вершину γ_i отождествим с самым правым листом дерева $D'_{j(i)}$, если $j(i) \neq 0$.

Полученный граф с корнем в γ_0 будем обозначать U_n^2 .

Вершину, которой приписано z_i^2 , будем обозначать ζ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, а через ζ_0 обозначим первую концевую вершину первого дерева D'_i из U_n^2 . Легко проверить, что функция проводимости между вершиной γ_0 и вершиной ζ_i , $i = 1, \dots, k-1$, имеет вид

$$\begin{aligned} f''_i(u_1, v_1, u_2, v_2) &= \begin{cases} 1, & \text{если } z_i^2 \leq v_2 < z_{i+1}^2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ f''_0(u_1, v_1, u_2, v_2) &= \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < v_2 < z_1^2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ f''_k(u_1, v_1, u_2, v_2) &= \begin{cases} 1, & \text{если } z_k^2 \leq v_2 \leq 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

По аналогии с ИГ U_m^1 объем ИГ U_n^2 равен $Q(U_n^2) = n + 2k$, а сложность $T(U_n^2) \leq 2$.

Введем k вершин η_i , $i = 1, \dots, k$, объявим эти вершины листьями ИГ и припишем листу η_i запись $z_i = (z_i^1, z_i^2) \in V$.

Для каждого листа ζ_i , $i = 1, \dots, k$, сделаем следующее. Объявим вершину ζ_i обычной вершиной и уберем запись z_i^2 с этой вершины; выпустим из ζ_i ребро в вершину η_i и припишем ему предикат $\chi_{z_i, \rho_{\text{int } 2}}$.

Из каждого листа η_i , $i = 2, \dots, k$, выпустим ребро в лист η_{i-1} , объявим это ребро предикатным и припишем ему предикат $\chi_{z_{i-1}, \rho_{\text{int}2}}$.

Полученный ИГ обозначим U_V . Он будет решать нашу задачу описанным выше методом в случае поперечного слоя.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что для любого $i = 1, \dots, k$ выполняется равенство $\varphi_{\delta_i}(x) \vee \varphi_{\eta_{j_i}}(x) = \chi_{y_i, \rho_{\text{int}2}}$, где z_{j_i} есть переобозначение y_i . Следовательно, согласно теореме 1 из [3] ИГ U_V решает задачу $I = \langle X_{\text{int}2}, V, \rho_{\text{int}2} \rangle$.

Объем ИГ U_V равен

$$Q(U_V) = m + 2k + 2k + k - 1 + n + 2k + k + k - 1 \leq k(c + 9).$$

Так как мы всегда выходим либо к вершинам группы δ_i , либо к вершинам группы η_i , сложность ИГ U_V можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} T(U_V) &\leq T(U_m^1) + 1 + T(U_n^2) + 1 + \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho_{\text{int}2})) \\ &\leq 6 + \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho_{\text{int}2})). \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана.

Лемма 2. В любом множестве из $k^2 + 1$ точки вещественной плоскости, $k \in \mathbf{N}$, можно выделить слой мощности $k + 1$.

Доказательство. Для точек $y_1, y_2 \in \mathbf{R}^2$ договоримся писать $y_1 < y_2$, если $y_1 \leq y_2$ и $y_1 \neq y_2$; $y_1 \triangleleft y_2$, если y_1 и y_2 не сравнимы и абсцисса точки y_1 меньше абсциссы точки y_2 .

Значимой точкой слоя назовем точку с максимальной ординатой. Если таких точек несколько (а это возможно только для продольного слоя), то значимой будет точка с максимальной абсциссой. Иными словами, точка y^* — значимая точка слоя S , если для любого y из S , отличного от y^* , выполняется неравенство $y < y^*$ в случае продольного слоя и $y^* \triangleleft y$ в случае поперечного.

Доказательство леммы будем вести индукцией по k .

Рассмотрим базис индукции при $k = 1$. Тогда $k^2 + 1 = 2$. Две точки всегда сравнимы или несравнимы, то есть образуют слой.

Рассмотрим индуктивный переход. Пусть из любых $k^2 + 1$ точки можно выбрать слой мощности $k + 1$.

Рассмотрим множество V точек плоскости такое, что $|V| = (k + 1)^2 + 1$. Рассмотрим множество $V_1 = V$. Так как $|V_1| \geq k^2 + 1$, согласно предположению индукции в V_1 существует слой S_1 мощности $k + 1$. Пусть точка y_1 — значимая точка слоя S_1 . Определим множество $V_2 = V_1 \setminus \{y_1\}$. Так как $|V_2| \geq k^2 + 1$, согласно предположению индукции в V_2 существует слой S_2 мощности $k + 1$. Пусть точка y_2 — значимая точка слоя S_2 . Далее переходим к множеству $V_3 = V_2 \setminus \{y_2\}$ и так далее. Продолжая таким образом, на $(2k + 2)$ -м шаге получим множество $V_{2k+2} = V_{2k+1} \setminus \{y_{2k+1}\} = V \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_{2k+1}\}$, $|V_{2k+2}| = (k + 1)^2 + 1 - 2k - 1 = k^2 + 1$. По предположению индукции в V_{2k+1} существует слой S_{2k+2} мощности $k + 1$, пусть точка y_{2k+2} — значимая точка этого слоя.

Рассмотрим множество $V' = \{y_1, y_2, \dots, y_{2k+2}\}$. Разобьем его на два подмножества V'_1 и V'_2 так, что V'_1 содержит значимые точки продольных слоев, а V'_2 — значимые точки поперечных.

Возможны следующие 5 ситуаций.

- (1) $|V'_1| \geq k+1$ и в V'_1 существует пара y_{l_1}, y_{l_2} сравнимых точек. Пусть $y_{l_1} < y_{l_2}$. Так как y_{l_1} — значимая точка слоя S_{l_1} , то $y_{l_2} \notin S_{l_1}$. Поскольку отношение $\leq$ ассоциативно, множество $S = S_{l_1} \cup \{y_{l_2}\}$ образует продольный слой и $|S| = k+2$.
- (2) $|V'_2| \geq k+1$ и в V'_2 существует пара несравнимых точек y_{j_1}, y_{j_2} . Пусть $y_{j_1} \triangleleft y_{j_2}$. Так как y_{j_2} — значимая точка слоя S_{j_2} , абсцисса точки y_{j_1} меньше абсциссы любой из точек из S_{j_2} , а ордината точки y_{j_1} больше ординаты любой из точек из S_{j_2} , и $y_{j_1} \notin S_{j_2}$. Следовательно, множество $S' = \{y_{j_1}\} \cup S_{j_2}$ образует поперечный слой мощности $k+2$.
- (3) $|V'_1| > k+1$ и в V'_1 все точки попарно несравнимы. Тогда V'_1 образует поперечный слой мощности, не меньшей $k+2$.
- (4) $|V'_2| > k+1$ и в V'_2 все точки попарно сравнимы. Тогда V'_2 образует продольный слой мощности, не меньшей $k+2$.
- (5) $|V'_1| = |V'_2| = k+1$ и в V'_1 все точки попарно несравнимы, а в V'_2 все точки попарно сравнимы, то есть V'_1 образует поперечный слой, а V'_2 — продольный. Пусть y_p — значимая точка V'_1 , y_q — значимая точка V'_2 . Возможны следующие 4 подслучая.
  - (a) $y_p < y_q$. Тогда множество $S_p \cup \{y_q\}$ образует продольный слой мощности $k+2$.
  - (b) $y_q < y_p$. Тогда множество $V'_2 \cup \{y_p\}$ образует продольный слой мощности $k+2$.
  - (c) $y_p \triangleleft y_q$. Тогда множество $\{y_p\} \cup S_q$ образует поперечный слой мощности $k+2$.
  - (d) $y_q \triangleleft y_p$. Тогда множество $\{y_q\} \cup V'_1$ образует поперечный слой мощности $k+2$.

Тем самым, мы показали, что всегда можно найти слой мощности, не меньшей, чем $k+2$, и доказали лемму.

Следствие 1. В множестве из k точек вещественной плоскости всегда можно выделить слой мощности $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Рассмотрим вещественнозначную функцию натурального аргумента, задаваемую рекурсивно,

$$f(1) = \sqrt{k}, \quad f(i) = \sqrt{k - \sum_{j=1}^{i-1} f(j)},$$

где k — некоторая натуральная постоянная.

Докажем некоторые свойства этой функции.

Свойство 1. Для любого $i > 1$ из области определения функции f справедливо неравенство

$$f(i-1) - f(i) > 1/2.$$

Доказательство. Согласно определению

$$f^2(i) = k - \sum_{j=1}^{i-1} f(j), \quad f^2(i-1) = k - \sum_{j=1}^{i-2} f(j).$$

Вычитая эти равенства одно из другого, находим, что

$$\begin{aligned} f^2(i) - f^2(i-1) &= -f(i-1), \\ f^2(i) &= (f(i-1) - 1/2)^2 - 1/4, \\ f^2(i) &< (f(i-1) - 1/2)^2, \\ f(i) &< f(i-1) - 1/2, \\ f(i-1) - f(i) &> 1/2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. Функция $f(i)$ строго убывающая.

Свойство 2. Областью определения функции $f(i)$ является начальный отрезок натурального ряда $\{1, 2, \dots, t_f\}$, где $t_f < 2\sqrt{k} + 1$.

Доказательство. Из того, что функция $f(i)$ неотрицательна и строго убывает с шагом, не меньшим $1/2$, следует, что область определения функции является начальным отрезком натурального ряда. Обозначим через t_f максимальное число из области определения. Из свойства 1 следует, что

$$f(i) < f(1) - (i-1)/2 = \sqrt{k} - (i-1)/2.$$

Поскольку

$$f(2\sqrt{k} + 1) < \sqrt{k} - 2\sqrt{k}/2 = 0,$$

то

$$t_f < 2\sqrt{k} + 1,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим следующую функцию натурального аргумента, принимающую натуральные значения и задаваемую рекурсивно:

$$g(1) =]\sqrt{k}[, \quad g(i) = \left\lfloor \sqrt{k - \sum_{j=1}^{i-1} g(j)} \right\rfloor ,$$

где k — некоторая натуральная постоянная.

Докажем некоторые свойства этой функции.

Свойство 3. Функция $g(i)$ не возрастает, и областью ее определения является начальный отрезок натурального ряда.

Доказательство. Поскольку для любого i из области определения $g(i) \geq 1$ (функция g принимает натуральные значения), функция $k - \sum_{j=1}^{i-1} g(j)$ строго убывающая с шагом, не меньшим 1. Откуда сразу следует, что $g(i)$ — невозрастающая функция и область ее определения есть начальный отрезок натурального ряда, что и требовалось доказать.

Обозначим через t_g максимальное число из области определения функции $g(i)$.

Свойство 4. Справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{t_g} g(j) = k.$$

Доказательство. Пусть $\sum_{j=0}^{t_g-1} g(j) = a$. В точке t_g функция g определена и $g(t_g) \geq 1$, поэтому $k - a \geq 1$ и $g(t_g) = \lfloor \sqrt{k - a} \rfloor \leq k - a$, причем равенство возможно только при $k - a \in \{1, 2\}$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{t_g} g(j) = a + g(t_g) \leq a + k - a = k.$$

Если предположить, что $\sum_{j=1}^{t_g} g(j) < k$, то $k - \sum_{j=1}^{t_g} g(j) \geq 1$ и, следовательно, определено значение $\lfloor \sqrt{k - \sum_{j=1}^{t_g} g(j)} \rfloor$, что противоречит максимальнойности t_g .

Тем самым выполнение свойства доказано.

Свойство 5. Для любого натурального $n \leq t_g$, выполняются неравенства

$$n \leq t_f, \quad \sum_{i=1}^n g(i) \geq \sum_{i=1}^n f(i).$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n .

Рассмотрим базис индукции при $n = 1$. Ясно, что

$$g(1) = \lfloor \sqrt{k} \rfloor \geq f(1) = \sqrt{k}.$$

Рассмотрим индуктивный переход. Пусть $n \leq t_g$. Сделаем индуктивное предположение:

$$n - 1 \leq t_f, \quad \sum_{i=1}^{n-1} g(i) \geq \sum_{i=1}^{n-1} f(i).$$

Введем обозначение

$$a = \sum_{i=1}^{n-1} f(i).$$

Если

$$\sum_{i=1}^{n-1} g(i) = a,$$

то

$$g(n) = \lfloor \sqrt{k - a} \rfloor \geq \sqrt{k - a} = f(n).$$

Следовательно,

$$n \leq t_f, \quad \sum_{i=1}^n g(i) \geq \sum_{i=1}^n f(i).$$

Пусть теперь

$$\sum_{i=1}^{n-1} g(i) = a + b,$$

где $b > 0$. Так как $n \leq t_g$, то $k - a - b \geq 1$ и $g(n) = \lfloor \sqrt{k - a - b} \rfloor$. Тогда $k - a \geq 1 + b > 1$ и $f(n) = \sqrt{k - a}$ определено, то есть $n \leq t_f$. Используя неравенство $c + \sqrt{d - c} \geq \sqrt{d}$, которое выполняется для любого $d \geq 1$ и любого $c \in [0, d]$, находим, что

$$\sum_{i=1}^n g(i) = a + b + \lfloor \sqrt{k - a - b} \rfloor \geq a + \lfloor \sqrt{k - a} \rfloor \geq \sum_{j=1}^n f(j).$$

В самом деле, при возведении в квадрат обеих частей неравенства получаем, что

$$c^2 + 2c\sqrt{d - c} + d - c \geq d.$$

При $c \geq 1$ это неравенство очевидно. Рассмотрим случай, когда $c < 1$. При $d \geq 1$ очевидно, что

$$c(c + 2\sqrt{d - c} - 1) \geq 0, \quad 2\sqrt{d - c} \geq 1 - c, \quad 4(d - c) \geq (1 - c)^2.$$

Тем самым свойство доказано.

Свойство 6. Справедливо неравенство $t_g < 2\sqrt{k}$.

Доказательство. Согласно свойству 4

$$\sum_{j=0}^{t_g} g(j) = k.$$

Согласно свойству 5

$$\sum_{i=1}^{t_g} g(i) \geq \sum_{i=1}^{t_g} f(i).$$

Следовательно,

$$k - \sum_{i=1}^{t_g} f(i) \geq 0,$$

и поэтому

$$f(t_g + 1) = \sqrt{k - \sum_{i=1}^{t_g} f(i)}$$

Рис. 1. ИГ U

определено. Отсюда, вспоминая свойство 2, находим, что

$$t_g \leq t_f - 1 < 2\sqrt{k},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Любое множество из k точек вещественной плоскости можно представить в виде прямой суммы менее, чем $2\sqrt{k}$ слоев.

Доказательство. Пусть $V \subseteq \mathbf{R}^2$ такое, что $|V| = k$. Согласно следствию 1 в множестве $V_1 = V$ можно выделить слой S_1 такой, что $|S_1| = \lfloor \sqrt{k} \rfloor = g(1)$. В оставшемся множестве $V_2 = V_1 \setminus S_1$ мощности $k - g(1)$ можно выделить слой S_2 мощности

$$\lfloor \sqrt{k - g(1)} \rfloor = g(2).$$

Далее переходим к рассмотрению множества $V_3 = V_2 \setminus S_2$, в котором есть слой S_3 мощности

$$\left\lfloor \sqrt{k - \sum_{i=1}^2 g(i)} \right\rfloor = g(3)$$

и так далее, пока не исчерпаем множество V . Понятно, что мощность i -го слоя будет равна $g(i)$ и согласно свойству 4 число слоев будет равно t_g . Вспоминая свойство 6, получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Пусть дана двумерная задача интервального поиска $I = \langle X_{\text{int}2}, V, \rho_{\text{int}2} \rangle$, где $|V| = k$. Согласно лемме 3 множество V можно представить в виде прямой суммы t_g слоев

$$V = \bigcup_{i=1}^{t_g} S_i.$$

Предлагаемый алгоритм решения этой задачи состоит в том, чтобы для каждого слоя независимо воспользоваться алгоритмом, описанным в лемме 1.

Этому алгоритму соответствует ИГ U , изображенный на рисунке 1, где U_{S_i} — ИГ, описанный в лемме 1 и решающий ЗИП $\langle X_{\text{int}2}, S_i, \rho_{\text{int}2} \rangle$, $i = 1, \dots, t_g$.

Очевидно, что данный ИГ U решает ЗИП I и

$$Q(U) = t_g + \sum_{i=1}^{t_g} Q(U_{S_i}) \leq t_g + \sum_{i=1}^{t_g} |S_i|(c+9) < k(c+9) + 2\sqrt{k},$$

$$T(U) = t_g + \sum_{i=1}^{t_g} T(U_{S_i}) \leq 7t_g + \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho_{\text{int } 2})) < 14\sqrt{k} + \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho_{\text{int } 2})).$$

Тем самым теорема 1 доказана.

Список литературы

1. Гасанов Э. Э., Кузнецова И. В., О функциональной сложности двумерной задачи интервального поиска. *Дискретная математика* (2002) **14**, №1, 114–141.
2. Гасанов Э. Э., О линейном по памяти непереборном алгоритме двумерного интервального поиска. В сб.: *Тезисы докладов XIII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики»*. Казань, 2002, с. 44.
3. Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б., *Теория хранения и поиска информации*. Физматлит, Москва, 2002.
4. Гасанов Э. Э., Об одной математической модели информационного поиска. *Дискретная математика* (1991) **3**, №2, 69–76.
5. Гасанов Э. Э., Мгновенно решаемые задачи поиска. *Дискретная математика* (1996) **8**, №3, 119–134.

Статья поступила 31.10.2002.