Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Грунский, А. С. Сенченко, Свойства систем определяющих соотношений для автоматов, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 4, 79–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:57:30

Свойства систем определяющих соотношений для автоматов

© 2004 г. И. С. Грунский, А. С. Сенченко

Предложена каноническая система определяющих соотношений для конечных всюду определенных автоматов без выхода. Построена процедура перехода от любой конечной системы определяющих соотношений к канонической и, как следствие, процедура проверки, является ли конечная система пар слов определяющей для заданного автомата. Предложена также процедура перехода от обхода графа автомата по всем дугам к системе определяющих соотношений и наоборот.

1. Определяющие соотношения для автоматов без выхода как множества равенств слов изучались в [1], где показано, что проблемы, аналогичные проблемам Туэ (для полугрупп) для автоматов разрешимы. В [2] рассматривались как равенства, так и неравенства слов, и показана их связь с контрольными экспериментами для конечных автоматов Мили. Там же предложена процедура построения по конечному всюду определенному инициальному автомату конечной системы определяющих соотношений.

В настоящей работе для инициально-связных всюду определенных конечных автоматов без выхода вводится каноническая система определяющих соотношений. Дается процедура ее построения и процедура перехода от любой конечной системы определяющих соотношений к канонической. На этой основе предложена процедура проверки, является ли произвольное конечное множество пар слов системой определяющих соотношений для заданного автомата.

Найдены достижимые оценки числа канонических систем, а также достижимые оценки числа пар слов в них и суммарной длины всех слов, входящих в эти системы.

С помощью канонической системы исследуются взаимоотношения между обходами по всем дугам графа автомата и его системами определяющих соотношений. Предложены процедуры построения по обходу системы определяющих соотношений и наоборот.

2. Под автоматом, если не оговорено противное, понимается конечный детерминированный инициальный всюду определенный (полу)автомат [3]. Все рассматриваемые автоматы имеют один и тот же входной алфавит X . Множество всех слов конечной длины в этом алфавите обозначается X^* . Пусть $p = x_1 \dots x_k$, длина слова p обозначается $d(p)$ и $d(p) = k$. Через e обозначаем пустое слово и полагаем $d(e) = 0$. Слово p' назовем начальным отрезком слова p , если $p = p'z$ для некоторого слова $z \in X^*$. Через $P \cup Q$ и PQ обозначим объединение и конкатенацию множеств $P, Q \subseteq X^*$ соответственно.

Пусть $A = (A, X, \delta, a_0)$ — автомат, у которого A — конечное множество состояний, a_0 — начальное состояние, $\delta: A \times X \rightarrow A$ — функция переходов, $\delta(a, x)$ обозначает ax . Расширим функцию переходов на множество X^* обычным образом: $a \cdot e = a$, $a(px) = (ap)x$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются инициально связные автоматы, то есть автоматы, у которых для каждого состояния a существует слово p такое, что $a_0 p = a$. Класс всех таких автоматов обозначим $K(X)$.

Автомат A порождает на X^* правую конгруэнцию ρ_A по правилу $(p, q) \in \rho_A$, если $a_0 p = a_0 q$. Рассмотрим свободный автомат $X^* = (X^*, X, \Delta, e)$, где $\Delta(p, x) = px$. Ясно, что $X^*/\rho_A = A$.

Пусть ρ — бинарное отношение на X^* . Это отношение назовем системой определяющих соотношений (СОС) для A , если правоинвариантное замыкание $[\rho]$ отношения ρ равно ρ_A .

Покажем, что любой автомат $A \in K(X)$ имеет хоть одну конечную СОС. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$. Введем на X^* лексикографический линейный порядок $\leq$ обычным образом:

- (1) $x_i \leq x_i$;
- (2) если $d(p) < d(q)$, то $p \leq q$;
- (3) $x'_1 \dots x'_s = p \leq q = x''_1 \dots x''_s$, если либо $x'_1 = x''_1, \dots, x'_s = x''_s$, либо $x'_k \leq x''_k, x'_k \neq x''_k$ при некотором $k \leq s$ и $x'_1 = x''_1, \dots, x'_{k-1} = x''_{k-1}$.

Очевидно, что лексикографический порядок на X^* однозначно определяется линейным порядком на X .

Пусть $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ и v_i — кратчайшее по лексикографическому порядку слово, для которого $a_0 v_i = a_i$. Множество $V_A = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ называется [4] базисом достижимости автомата A . Определим конечное бинарное отношение κ_A на множестве $V_A \cup V_A \cdot X$ по следующему правилу. Пусть κ_A вначале пусто. Для каждого $v_i, v_j \in V_A$ и $x \in X$, если $a_0 v_i x = a_0 v_j$ и $v_i x \neq v_j$, то пару $(v_j, v_i x)$ помещаем в κ_A . Заметим, что $v_j \leq v_i x$ по определению V_A .

Теорема 1 ([5]). *Бинарное отношение κ_A является системой определяющих соотношений для A .*

Легко видеть, что построение отношения κ_A несколько экономнее способа, предложенного в [2].

3. Рассмотрим следующую задачу: для заданных автомата $A \in K(X)$ и конечного бинарного отношения ρ на X^* определить, является ли ρ СОС для A , то есть определить, равны ли $[\rho]$ и ρ_A .

Для решения этой задачи введем на ρ следующие операции.

- (1) Удалим из ρ все пары вида (p, p) .
- (2) Каждую пару $(p, q) \in \rho$ при $q \leq p$ заменим парой (q, p) .
- (3) Пусть $(p, q), (t, u) \in \rho$. Если $p = uw$ для некоторого $w \in X^*$, то пару (p, q) в ρ заменяем парой (tw, q) . Если же $q = uw$, то пару (p, q) в ρ заменяем парой (p, tw) .

Удалим повторяющиеся пары, оставляя только по одному экземпляру.

Рассмотрим процедуру редукции отношения ρ , состоящую из таких шагов:

- (a) выполняется операция 1;
- (b) выполняется операция 2;

- (с) если операция 3 неприменима, то процедура завершается, в противном случае после каждого выполнения операции 3 переходим к операции 4;
- (d) выполняется операция 4 и переходим к (а).

Легко видеть, что при выполнении этой процедуры число пар слов в отношении и длина этих слов могут только уменьшиться. Поэтому для конечного ρ процедура редукции завершается. Результат редукции обозначим $\langle \rho \rangle$.

Очевидно, что $\langle \kappa_A \rangle = \kappa_A$ и, если $(p, q) \in \langle \rho \rangle$, то $p < q$.

В [5] доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Равенство $[\rho] = \rho_A$ верно тогда и только тогда, когда $\langle \rho \rangle = \kappa_A$.*

В силу теоремы 2 систему κ_A назовем канонической. Из этой теоремы вытекают полезные следствия.

Следствие 1. *Пусть ρ — система определяющих соотношений для автомата A , а ρ' — некоторое конечное бинарное отношение на множестве X^* . Отношение ρ' является системой определяющих соотношений для A тогда и только тогда, когда $\langle \rho' \rangle = \langle \rho \rangle$.*

Доказательство. Действительно, если ρ' — СОС для A , то по теореме 2

$$\langle \rho' \rangle = \kappa_A = \langle \rho \rangle.$$

Если же $\langle \rho' \rangle = \langle \rho \rangle$, то по теореме 2 $\langle \rho \rangle = \langle \kappa_A \rangle$, значит, $\langle \rho' \rangle = \langle \kappa_A \rangle$, то есть ρ' — СОС для A .

Следствие 2. *Система κ_A — минимальная система определяющих соотношений для автомата A по количеству пар и по суммарной длине слов.*

Доказательство. Допустим, что существует система определяющих соотношений κ' для автомата A , содержащая меньше пар, чем κ_A . По теореме 2 $\langle \kappa' \rangle = \kappa_A$. Из этого следует, что процедура редукции увеличивает число пар слов, что невозможно. Допустим теперь, что существует система κ'' определяющих соотношений для автомата A , суммарная длина слов в которой меньше, чем в κ_A . По теореме 2 $\langle \kappa'' \rangle = \kappa_A$. Из этого следует, что процедура редукции увеличивает длину слов, что невозможно.

4. Оценим число и сложность канонических СОС для данного автомата $A \in K(X)$, у которого $|X| = m$ и $|A| = n$.

Через $N(V_A)$ и $N(\kappa_A)$ обозначим число различных базисов достижимости V_A и число различных κ_A при всевозможных лексикографических порядках на X^* .

Теорема 3. *Справедливы неравенства $1 \leq N(V_A) \leq m!$, причем эти оценки достижимы для всех m .*

Доказательство. По определению базиса достижимости он полностью определяется линейным порядком на X . Поэтому $1 \leq N(V_A) \leq m!$. Покажем, что эти оценки достижимы. Рассмотрим автомат $B = (B, X, \delta, b_0)$, у которого $B = \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$, $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ и функция переходов автомата определяется соотношениями $\delta(b_i, x_1) = b_{i+1}$ для $0 \leq i \leq n-2$, $\delta(b_{n-1}, x_1) = b_{n-1}$, а для всех $x \neq x_1$ $\delta(b_i, x) = b_i$ при $0 \leq i \leq n-1$. Легко видеть, что $V_B = \{e, x_1, x_1^2, \dots, x_1^n\}$ — единственный базис достижимости B . Здесь

x_1^i — слово, состоящее из i букв x_1 . Следовательно, нижняя оценка достижима для всех $n \geq 2, m \geq 1$.

Покажем достижимость верхней оценки.

Пусть $n = \binom{m}{2}$ и автомат $C = (C, X, \gamma, c_0)$ задан следующей таблицей:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_{m-1}	x_m
c_0	c_1	c_1	c_0	c_0	$\dots$	c_0	c_0
c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	$\dots$	c_1	c_1
c_2	c_3	c_2	c_2	c_3	$\dots$	c_2	c_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_{n-1}	c_{n-1}	c_{n-1}	c_{n-1}	c_{n-1}	$\dots$	c_n	c_n
c_n	c_n	c_n	c_n	c_n	$\dots$	c_n	c_n

Из таблицы видно, что каждому состоянию $c_i, 0 \leq i \leq n-1$ поставлено во взаимно однозначное соответствие двухэлементное множество $X_i \subseteq X$, для которого

$$\gamma(c_i, x) = \begin{cases} c_{i+1}, & \text{при } x \in X_i, \\ c_i, & \text{при } x \notin X_i. \end{cases}$$

Так, $X_0 = \{x_1, x_2\}, X_1 = \{x_1, x_3\}, \dots, X_{n-1} = \{x_{m-1}, x_m\}$.

Пусть $V_C = \{e, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ — некоторый базис достижимости автомата C . Легко видеть, что $v_j \in X_0 X_1 \dots X_{j-1}$.

Пусть P_1, P_2 — два различных лексикографических порядка множества X , и пусть $x_i, x_j \in X$ таковы, что $x_i \leq x_j$ в P_1 и $x_j \leq x_i$ в $P_2, i \neq j$. Тогда в автомате C существует состояние c_z , для которого $c_z x_i = c_z x_j = c_{z+1}$, то есть $X_z = \{x_i, x_j\}$. Пусть v — кратчайшее слово по порядку P_1 , для которого $c_0 v = c_z$. Тогда слово $v x_i$ входит в базис достижимости при P_1 и не входит в базис достижимости при порядке P_2 . Следовательно, $N(V_C) = m!$.

Таким образом, для всех $m \geq 2$ существует автомат C с $\binom{m}{2}$ состояниями, для которого верхняя оценка достижима.

Следствие 3. Справедливы неравенства $1 \leq N(\kappa_A) \leq m!$, причем эти оценки достижимы для всех m .

Доказательство. Покажем, что $N(V_A) = N(\kappa_A)$. Неравенство $N(\kappa_A) \leq N(V_A)$ очевидно. Покажем, что выполняется обратное неравенство. Пусть $m \geq 2, V_1, V_2$ — базисы достижимости автомата A , упорядоченные по лексикографическим порядкам P_1, P_2 на X^* и $V_1 \neq V_2$. Пусть также v_i — слово наименьшей длины, принадлежащее одному базису достижимости и не принадлежащее другому. Для определенности полагаем, что $v_1 \in V_1 - V_2$. Тогда $v_1 = v'x$ для некоторых $v' \in V_1 \cap V_2$ и $x \in X$. Пусть v_2 — такое слово из V_2 , что $a_0 v_1 = a_0 v_2$. Из правил построения канонических СОС вытекает, что $(v_2, v'x)$ входит в каноническую СОС при P_2 и не входит в каноническую СОС при порядке P_1 , так как $v_2 \leq v'x$ при P_2 и $v'x \leq v_2$ при порядке P_1 . Поэтому $N(\kappa_A) \geq N(V_A)$, то есть $N(\kappa_A) = N(V_A)$. Из теоремы 3 вытекает искомого неравенство.

Оценим сложность канонических СОС. Покажем, что число $|\kappa_A|$ пар слов в κ_A равно $(m-1)n + 1$. Действительно, множество $V_A \setminus X$ мощности mn содержит $(n-1)$ слов из V_A . Поэтому в правой части пар $(p, q) \in \kappa_A$ содержится $mn - n + 1$ слов из $V_A \setminus X$.

Пусть $(v_j, v_i x) \in \kappa_A$. Длиной этой пары назовем величину $d(v_j) + d(v_i) + 1$. Через $S(\kappa_A)$ обозначим сумму длин всех пар слов из κ_A . Пусть $V_A = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ и $i < j$ влечет $v_i \leq v_j$. Из определения базиса достижимости индукцией по i легко показать,

что $d(v_i) \leq i$. Из правил построения канонической СОС следует, что $v_j \leq v_i x$, то есть $d(v_j) \leq d(v_i x)$. Следовательно, длина пары $(v_j, v_i x)$ не превосходит $2(i+1)$. В множестве $V_A X$ для каждого i , $0 \leq i \leq n-2$, содержится не более m слов вида $v_i x_l$, $x_l \in X$, следовательно, суммарная длина пар слов вида $(v_j, v_i x_l)$ не превосходит $2m(d(v_i) + 1)$. Для каждого i , $0 \leq i \leq n-1$, пара (v_i, v_i) длины $2d(v_i)$ не входит в κ_A . Для $i = n-1$ длина пары $(v_j, v_i x_l)$ не превосходит $2d(v_i) + 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S(\kappa_A) &\leq \sum_{i=0}^{n-2} (2m(d(v_i) + 1) - 2d(v_i)) + m(2d(v_{n-1}) + 1) - 2d(v_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2((m-1)d(v_i) + m) - m = (m-1)n(n-1) + 2mn - m \\ &= (m-1)n(n-1) + m(2n-1). \end{aligned}$$

Покажем, что эта оценка достижима для всех $n \geq 2$, $m \geq 1$. Рассмотрим автомат $\mathbf{D} = (D, X, \delta, d_0)$, у которого $D = \{d_0, \dots, d_{n-1}\}$, $x_1 \leq \dots \leq x_m$, $\delta(d_i, x) = d_{i+1}$ для всех $x \in X$ и $0 \leq i \leq n-2$. Пусть также $\delta(d_{n-1}, x) = d_{n-1}$ для всех $x \in X$. Легко видеть, что $V_{\mathbf{D}} = \{e, x_1, x_1^2, \dots, x_1^n\}$ и $\kappa_{\mathbf{D}}$ содержит для каждого i , $0 \leq i \leq n-2$, ровно $(m-1)$ пар вида $(x_1^{i+1}, x_1^i x)$, где $x \neq x_1$, длины $2(i+1)$, а также содержит ровно m пар вида $(x_1^{n-1}, x_1^{n-1} x)$, где $x \in X$, длины $2n-1$. Поэтому

$$S(\kappa_{\mathbf{D}}) = n(m-1)(n-1) + m(2n-1).$$

5. Конечное множество $\Omega = \{w_1, \dots, w_k\}$ слов в алфавите X назовем обходом автомата $\mathbf{A} \in K(X)$, если для любых $a \in A$ и $x \in X$ найдется такое слово w' , что $a_0 w' = a$ и слово $w'x$ является начальным отрезком некоторого слова $w_i \in \Omega$. При $k = 1$ обход называется простым и в противном случае кратным.

Рассмотрим взаимосвязь между обходами автомата и его СОС.

Пусть Ω — некоторый обход автомата. По обходу Ω построим множество W_Ω всех таких слов $p \in X^*$, которые являются начальными отрезками слов из Ω . Пусть теперь $F = \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ — некоторый базис достижимости автомата $\mathbf{A}$, то есть $a_0 f_i = a_i$. Базис достижимости, у которого все f_i являются кратчайшими словами по соответствующему порядку $\leq$, будем называть кратчайшим. По обходу Ω и базису достижимости F определим отношение $\rho(W_\Omega, F) = \{(f, w)\}$, где $f \in F$, $w \in W_\Omega$ и $a_0 f = a_0 w$.

Теорема 4. Для всякого обхода Ω автомата $\mathbf{A} \in K(X)$ и всякого его базиса достижимости F отношение $\rho(W_\Omega, F)$ является СОС для $\mathbf{A}$.

Докажем сначала частный случай.

Лемма 1. Для всякого обхода Ω автомата $\mathbf{A} \in K(X)$ и кратчайшего (по лексикографическому порядку $\leq$) базиса достижимости V_A отношение $\rho(W_\Omega, V_A)$ является СОС для $\mathbf{A}$.

Доказательство. Поскольку κ_A — система определяющих соотношений для автомата A , то $\rho(W_\Omega, V_A) \subseteq [\kappa_A] = \rho_A$. Покажем теперь, что $\kappa_A \subseteq [\rho(W_\Omega, V_A)]$.

Пусть пара $(v_i, v_k x) \in \kappa_A$, $v_i, v_k \in V_A$, $x \in X$. По определению обхода, W_Ω содержит начальные отрезки w_j , w_s такие, что $a_0 w_j = a_0 v_i$, $a_0 w_s = a_0 v_k$ и $w_j = w_s x$. Если $w_s \neq v_k$, то по построению отношения $\rho(W_\Omega, V_A)$ пара $(v_k, w_s) \in \rho(W_\Omega, V_A)$, в противном случае $(v_k, w_s) \in [\rho(W_\Omega, V_A)]$. Аналогично, пара $(v_i, w_j) \in [\rho(W_\Omega, V_A)]$. Тогда пара $(v_i, v_j x)$ принадлежит $[\rho(W_\Omega, V_A)]$ в результате применения транзитивного замыкания. По свойствам замыкания $[\rho(W_\Omega, V_A)] = [\kappa_A] = \rho_A$. Лемма 1 доказана.

Для доказательства теоремы 4 нам понадобится следующее очевидное утверждение.

Лемма 2. Пусть ρ — система определяющих соотношений для автомата A и τ — конечное множество пар слов, причем $\tau \subseteq [\rho]$. Тогда $\xi = \rho \cup \tau$ — система определяющих соотношений для автомата A .

Рассмотрим теперь доказательство общего случая.

Доказательство теоремы 4. Пусть $V_A = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ — кратчайший базис достижимости автомата A по лексикографическому порядку $\leq$, причем $a_0 v_i = a_0 f_i$ для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Через λ обозначим множество пар слов $\{(v_i, f_i)\}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, таких, что $v_i \neq f_i$. Пусть $\varphi = \rho(W_\Omega, F) \cup \lambda$, $\psi = \rho(W_\Omega, V_A) \cup \lambda$. По лемме 1 $\lambda \subset [\rho(W_\Omega, V_A)] = \rho_A$, то есть $[\psi] = [\rho(W_\Omega, V_A)] = \rho_A$.

Покажем, что $[\rho(W_\Omega, F)] = [\varphi]$. Для этого индукцией по длине слов $v_i \in V_A$ покажем, что каждая пара $(v_i, f_i) \in \lambda$ входит в $[\rho(W_\Omega, F)]$. Пусть l — максимальная длина слов из V_A .

Если $d(v_i) = 0$, то $v_i = e$. По условию теоремы пара $(e, f_i) \in \rho(W_\Omega, F)$.

Допустим, что все пары $(v_i, f_i) \in \lambda$ такие, что $0 \leq d(v_i) \leq r-1 < l$ принадлежат $[\rho(W_\Omega, F)]$. Пусть $(v_k, f_k) \in \lambda$ и $d(v_k) = r$. Покажем, что пара (v_k, f_k) также принадлежит $[\rho(W_\Omega, F)]$. Из определения кратчайшего базиса V_A следует, что если $v_k = v_z x$, то $v_z \in V_A$. По определению обхода существует начальный отрезок $w_t \in W_\Omega$ такой, что $a_0 w_t = a_0 v_k$, $a_0 w_{t-1} = a_0 v_z$ и $w_t = w_{t-1} x$. По условию теоремы $(f_z, w_{t-1}), (f_k, w_t) \in \rho(W_\Omega, F)$. Пусть $v_z \neq f_z$, тогда $d(v_z) = r-1$, и по предположению индукции $(v_z, f_z) \in [\rho(W_\Omega, F)]$. Тогда в $[\rho(W_\Omega, F)]$ содержится пара (v_z, w_{t-1}) . Если же $v_z = f_z$, то пара $(v_z, w_{t-1}) \in \rho(W_\Omega, F)$. В любом случае, в $[\rho(W_\Omega, F)]$ содержится пара $(v_z x, f_k)$. Таким образом, $[\rho(W_\Omega, F)] = [\varphi]$.

Покажем, что $[\rho(W_\Omega, V_A)] \subseteq [\rho(W_\Omega, F)]$. Пусть $(v_i, w) \in \rho(W_\Omega, V_A)$. Тогда $(f_i, w) \in \rho(W_\Omega, F)$ и по сказанному выше $(v_i, f_i) \in [\rho(W_\Omega, F)]$. Следовательно, (v_i, w) содержится в транзитивном замыкании отношения $[\rho(W_\Omega, F)]$, а поскольку оно замкнуто, то $(v_i, w) \in [\rho(W_\Omega, F)]$. Отсюда, $\rho_A = [\rho(W_\Omega, V_A)] = [\rho(W_\Omega, F)]$. Теорема 4 доказана.

Пусть Ω есть некоторый обход (возможно, кратный) автомата $A \in K(X)$, $W_\Omega = \{w_0, w_1, \dots, w_l\}$ — множество начальных отрезков обхода Ω . Пусть $a \in A$, $x \in X$. Тогда через $R(a, x)$ обозначим множество таких слов $w'x \in W_\Omega$, что $a_0 w' = a$. Подмножество V_Ω множества W_Ω назовем внутренним базисом достижимости относительно Ω , если для каждого состояния $a_i \in A$ существует, и притом единственное, слово $v_i \in V_\Omega$ такое, что $a_0 v_i = a_i$. Зафиксируем некоторый внутренний базис V_Ω .

В множестве W_Ω из каждого $R(a, x)$ оставим кратчайшее слово $w(a, x)$ в лексикографическом порядке $\leq$, а остальные удалим, затем удалим V_Ω . Обозначим получившееся множество через W'_Ω .

Справедливо следующее утверждение.

Следствие 4. Для всякого обхода Ω автомата $A \in K(X)$ и всякого его внутреннего базиса достижимости V_Ω отношение $\rho(W'_\Omega, V_\Omega)$ является СОС для A .

Доказательство. По теореме 4, $\rho(W_\Omega, V_\Omega)$ является системой определяющих соотношений для автомата A . Пусть l — максимальная длина слов из W_Ω . Индукцией по длине слов множества W_Ω покажем, что $\rho(W_\Omega, V_\Omega) \subseteq [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$.

Если $d(p) = 0$, то $p = e$. По построению пара (v, e) такова, что $a_0v = a_0$, принадлежит $\rho(W'_\Omega, V_\Omega)$.

Допустим, что для всех слов $p \in W_\Omega$, $d(p) < k < l$, пары $(v, p) \in [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$, где $v \in V_\Omega$, $a_0p = a_0v$. Пусть $q \in W_\Omega$, $d(q) = k + 1$, $v \in V_\Omega$ и $a_0q = a_0v$. Покажем, что пара $(v, q) \in [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$.

Если $q \in W'_\Omega$, то $(v, q) \in [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$. Если $q \in V_\Omega$, то $q = v'$ и $(v, v) \in [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$. Рассмотрим случай, когда $q \notin V_\Omega \cup W'_\Omega$. Пусть $q = q'x$, $x \in X$, $a_0q' = a$ и v_a — такое слово из V_Ω , что $a_0v_a = a$. По построению $\rho(W'_\Omega, V_\Omega)$ слово q не является кратчайшим в множестве $R(a, x)$ по лексикографическому порядку $\leq$. Пусть $t = t'x$ — кратчайшее слово множества $R(a, x)$ по $\leq$. Очевидно, что $d(t) \leq d(q)$, следовательно, $d(t') < k$. По предположению индукции пары (v_a, t') , $(v_aq') \in [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$, следовательно, пара $(t'x, q'x) \in [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$. Если $t \in V_\Omega$, то $t = v$, в противном случае $(v, t) \in [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$. В любом случае пара $(v, t) \in [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$, следовательно, пара (v, q) также принадлежит $[\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$. Таким образом, $\rho(W_\Omega, V_\Omega) \subseteq [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)]$ и, значит,

$$\rho_A = [\rho(W_\Omega, V_\Omega)] = [\rho(W'_\Omega, V_\Omega)].$$

Следствие доказано.

Следствие 5. Для всякого обхода Ω автомата $A \in K(X)$ и кратчайшего внутреннего базиса достижимости V_Ω система определяющих соотношений $\rho(W'_\Omega, V_\Omega)$ приведена по удалению пар.

Доказательство. По построению количество пар в $\rho(W'_\Omega, V_\Omega)$ равно мощности множества W'_Ω . Пусть $|A| = n$, $|X| = m$. Тогда существует nm различных классов $R(a, x)$. При построении W'_Ω сначала выбирается mn непустых слов по одному из каждого $R(a, x)$. Поскольку эти слова кратчайшие по $\leq$, то $n - 1$ из них принадлежат кратчайшему базису V_Ω . Следовательно,

$$|W'_\Omega| = (m - 1)n + 1 = |\rho(W'_\Omega, V_\Omega)|.$$

По следствию 4 $\rho(W'_\Omega, V_\Omega)$ — СОС для A и по теореме 2 $\langle \rho(W'_\Omega, V_\Omega) \rangle = \kappa_A$. По свойствам процедуры редукции $|\rho(W'_\Omega, V_\Omega)| \geq |\kappa_A| = (m - 1)n + 1$. Следовательно, мощность любой СОС для A не может быть меньше $(m - 1)n + 1$. Поэтому $\rho(W'_\Omega, V_\Omega)$ приведена по удалению пар.

6. Обход $\Omega = \{w_1, \dots, w_k\}$ автомата $A \in K(X)$ назовем избыточным, если $w_i = w_jz$, $i \neq j$, для некоторых слов $w_i, w_j \in \Omega$, $z \in X^*$, в противном случае обход считаем неизбыточным.

Обозначим через O_A множество неизбыточных обходов автомата $A \in K(X)$, а через C_A множество его систем определяющих соотношений.

Пусть $\rho \in C_A$. Через W_ρ обозначим множество начальных отрезков всех слов из ρ .

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Множество W_ρ является обходом автомата A .

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно. Тогда существует состояние $a \in A$ и входной символ $x \in X$ такие, что для любого слова $p \in X^*$, для которого $a_0 p = a$, слово $px \notin W_\rho$. По теореме 2 $\langle \rho \rangle = \kappa_A$. По построению пара (q, px) принадлежит κ_A для некоторых слов q , причем $a_0 p = a$. Операции редукции 1, 2 и 4 не добавляют новых слов, а операция 3 может добавить слово px , только если в W_ρ существует некоторое слово $p'x$, причем $a_0 p' = a$. По допущению такого слова в W_ρ не существует. Таким образом, пару (q, px) невозможно получить из ρ операциями редукции. Следовательно, наше допущение неверно. Теорема доказана.

Введем отображения $f: O_A \rightarrow C_A$ и $g: C_A \rightarrow O_A$.

Пусть $\Omega \in O_A$, W_Ω — множество всех начальных отрезков обхода Ω , V_Ω — кратчайший по лексикографическому порядку $\leq$ внутренний базис достижимости автомата A относительно Ω . Пусть $\lambda = \{(v_i, w_j)\}$ — множество всех таких пар слов, что $a_0 v_i = a_0 w_j$, $v_i \in V_\Omega$, $w_j \in W_\Omega$. Удалим из λ все пары вида (p, p) . Полученное отношение обозначим через τ . Положим $\Omega f = \tau$. По теореме 4 $\tau \in C_A$.

Пусть $\rho \in C_A$. Исключим из W_ρ все слова, являющиеся начальными отрезками других слов из W_ρ . Обозначим полученное множество через $]W_\rho[$. Положим $\rho g =]W_\rho[$. По теореме 5 W_ρ — обход, поэтому $]W_\rho[$ — избыточный обход из O_A .

Рассмотрим свойства отображений f и g . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Отображения f — инъекция, а g — сюръекция, причем $\Omega f g = \Omega$ для любого избыточного обхода $\Omega \in O_A$.

Доказательство. Докажем инъективность отображения f .

Пусть $\Omega, \Theta \in O_A$ и $\Theta \neq \Omega$. Тогда существует слово w , принадлежащее одному обходу и не принадлежащее другому. Пусть для определенности $w \in \Omega - \Theta$. Если в Θ нет таких слов w' , что $w' = wz$ для некоторого непустого $z \in X^*$, то $W_\Omega \neq W_\Theta$. Пусть такое слово w' существует. Поскольку обход Ω избыточен, то $w' \in \Theta - \Omega$. Если существует $w'' = w'z''$ для непустого z'' и $w'' \in \Omega$, то Ω избыточен, что невозможно. Поэтому $w' \in W_\Omega - W_\Theta$. Следовательно, в любом случае $W_\Omega \neq W_\Theta$.

Из определения отображения f следует, что $\Omega f = \Theta f$ тогда и только тогда, когда $W_\Omega = W_\Theta$. Поэтому f — инъекция.

Пусть $\Omega \in O_A$. Докажем, что $\Omega f g = \Omega$. Пусть $\Omega f g = \Psi$ и слово $w \in \Omega$. Тогда оно входит хотя бы в одну пару системы Ωf . Так как обход Ω избыточен, то $wz \notin \Omega$ для любого непустого $z \in X^*$, а следовательно, слово wz не входит ни в одну из пар Ωf . По определению отображения g справедливо включение $w \in \Psi$, то есть $\Omega \subseteq \Psi$.

Пусть теперь $w \in \Psi$. Так как обход Ψ избыточный, для каждого непустого слова z слово $wz \notin \Psi$. Следовательно, слово w входит хотя бы в одну пару $\text{СОС } \Omega f$. Тогда $wu \in \Omega$ для некоторого слова $u \in X^*$. Если $u \neq e$, то слово wu входит хотя бы в одну из пар Ωf , и следовательно, $wu \in \Psi$, что невозможно. Получили, что $w \in \Omega$, то есть $\Psi \subseteq \Omega$. Следовательно, $\Omega = \Psi$.

Из равенства $\Omega f g = \Omega$ следует, что для каждого обхода $\Omega \in O_A$ существует система определяющих соотношений $\rho = \Omega f$, принадлежащая C_A такая, что $\rho g = \Omega$. Следовательно g — сюръекция. Теорема доказана.

Список литературы

1. Соркин Ю. И., Теория определяющих соотношений для автоматов. *Проблемы кибернетики* (1961) **9**, 45–69.
2. Грунский И. С., Определяющие соотношения для автоматов. В сб.: *Третья Алгебраическая конференция в Украине*. Изд-во Сумского пед. ун-та, Сумы, 2001, с. 159–160.
3. Богомолов А. М., Салий В. Н., *Алгебраические основы теории дискретных систем*. Наука, Москва, 1997.
4. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
5. Грунский И. С., Сенченко А. С., Каноническая система определяющих соотношений для автоматов. *Труды ИПММ НАН Украины* (2002) **7**, 58–63.

Статья поступила 24.01.2004.