Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Рыбаков, Кратчайшие векторы решеток, связанных с линейным конгруэнтным генератором, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 4, 88–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:22:46

Кратчайшие векторы решеток, связанных с линейным конгруэнтным генератором

© 2004 г. А. С. Рыбаков

Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число, $\mathcal{E} \subset \mathbf{R}^s$ — полная решетка определителя $\Delta \in \mathbf{Q}$. Назовем ее ε -регулярной, если $\lambda_1(\mathcal{E}) > \Delta^{1/s}(h(\Delta))^{-\varepsilon}$, где $\lambda_1(\mathcal{E})$ — длина ненулевого кратчайшего вектора решетки $\mathcal{E}$, а $h(\Delta)$ — максимум абсолютных величин числителя и знаменателя несократимой дроби для Δ . В нашей работе рассматриваются две полные решетки пространства $\mathbf{R}^s$:

– решетка $\mathcal{L}(a, W)$, связанная с линейной конгруэнтной последовательностью

$$(x_N), \quad x_{N+1} = ax_N \pmod{W}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

– двойственная к ней решетка $\mathcal{L}^*(a, W)$.

Существует гипотеза, утверждающая, что при любом натуральном s , любом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(s)$ и любом $W > W_0(s, \varepsilon)$ все решетки $\mathcal{L}(a, W)$ и $\mathcal{L}^*(a, W)$ при $a = 0, 1, \dots, W-1$ являются ε -регулярными за исключением множества чисел a мощности, не большей $W^{1-\varepsilon}$.

В работе 1988 г. А. Фризом, Й. Хастадом, К. Каннаном, Дж. Лагариасом и А. Ша-миром было доказано чуть более слабое утверждение в случае $s = 3$ (число исключительных a в их оценке не превосходит $W^{1-\varepsilon/2}$). Кроме того, с помощью рассуждений указанной работы легко проверить справедливость гипотезы в случаях $s = 1$ и $s = 2$.

В нашей работе доказывается справедливость сформулированной гипотезы в случае $s = 4$. Кроме того, с помощью рассуждений нашей работы можно слегка уточнить результат упомянутой выше работы, установив справедливость гипотезы в случае $s = 3$.

Все указанные утверждения имеют приложения в теории восстановления линейной конгруэнтной последовательности (1) по старшим разрядам ее нескольких первых элементов.

1. Введение

Пусть $\mathcal{E}$ — полная решетка в пространстве $\mathbf{R}^s$ с фиксированным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то есть множество линейных комбинаций с целыми коэффициентами заданной системы s линейно независимых над $\mathbf{R}$ векторов, которые называются базисом решетки (см. гл. 2, §3, п. 2 в [1]).

Определителем $\mathcal{E}$ мы будем называть абсолютную величину определителя матрицы коэффициентов базиса $\mathcal{E}$ в произвольном ортонормированном базисе. Определитель решетки не зависит ни от выбора ортонормированного базиса, ни от выбора базиса решетки.

Через $\lambda_i(\mathcal{E})$ обозначим i -й последовательный минимум решетки $\mathcal{E}$, то есть такое наименьшее число $R \in \mathbf{R}_{>0}$, что замкнутый шар радиуса R с центром в нуле содержит i линейно независимых векторов решетки $\mathcal{E}$.

Определение 1. Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число, $\mathcal{E} \subset \mathbf{R}^s$ — полная решетка определителя $\Delta \in \mathbf{Q}$. Назовем ее ε -регулярной, если $\lambda_1(\mathcal{E}) > \Delta^{1/s}(h(\Delta))^{-\varepsilon}$, где $h(\Delta)$ — высота числа Δ , равная по определению максимуму абсолютных величин числителя и знаменателя несократимой дроби для Δ .

Замечание 1. Из теоремы Минковского о последовательных минимумах (см. теорему 5 гл. 8 в [2]) вытекает, что если полная решетка $\mathcal{E} \subset \mathbf{R}^s$ определителя $\Delta \in \mathbf{Q}$ является ε -регулярной, то имеет место неравенство

$$\lambda_s(\mathcal{E}) < \frac{2^s}{\gamma_s} \Delta^{1/s} (h(\Delta))^{(s-1)\varepsilon},$$

где

$$\gamma_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1 + s/2)}$$

— объем единичного шара в $\mathbf{R}^s$. Следовательно, если число ε достаточно мало, то все числа $\lambda_i(\mathcal{E})$ представляют собой величины приблизительно одного порядка.

Заметим, что существует определенная связь между ε -регулярностью решетки $\mathcal{E}$ и двойственной к ней решетки $\mathcal{E}^*$, задаваемой равенством

$$\mathcal{E}^* = \{y \in \mathbf{R}^s : \langle y, x \rangle \in \mathbf{Z} \text{ для всех } x \in \mathcal{E}\}.$$

Например, если решетка $\mathcal{E}^*$ является ε -регулярной и Δ — определитель $\mathcal{E}$, то число Δ^{-1} будет определителем $\mathcal{E}^*$ и мы получим, что $\lambda_1(\mathcal{E}^*) \geq \Delta^{-1/s}(h(\Delta))^{-\varepsilon}$. Используя неравенство (см., например, [6])

$$\lambda_s(\mathcal{E})\lambda_1(\mathcal{E}^*) \leq s^2,$$

отсюда можно получить, что $\lambda_s(\mathcal{E}) \leq s^2 \Delta^{1/s}(h(\Delta))^\varepsilon$, а тогда по теореме Минковского о последовательных минимумах найдем, что

$$\lambda_1(\mathcal{E}) \geq \frac{2^s}{s!s^{2(s-1)}\gamma_s} \Delta^{1/s} (h(\Delta))^{-\varepsilon(s-1)}.$$

Следовательно, если число ε мало, а число $h(\Delta)$ достаточно велико, то решетка $\mathcal{E}$ будет ε_0 -регулярна для некоторого малого числа ε_0 .

Пусть s, W — натуральные числа, a — целое число. Основным объектом исследования в данной работе будут следующие две полные решетки пространства $\mathbf{R}^s$:

(1) решетка $\mathcal{L}(a, W)$, базисные векторы которой совпадают со строками матрицы

$$\begin{pmatrix} W & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{s-1} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

- (2) двойственная к ней решетка $\mathcal{L}^*(a, W)$, базисные векторы которой совпадают со строками матрицы

$$\begin{pmatrix} 1/W & a/W & a^2/W & \dots & a^{s-1}/W \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее на протяжении всей работы размерность пространства s будет считаться фиксированной, а числа W и a будут пробегать некоторые подмножества неотрицательных целых чисел. Легко видеть, что решетки $\mathcal{L}(a, W)$ и $\mathcal{L}^*(a, W)$ будут одни и те же для сравнимых между собой чисел a по модулю W , поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $a \in I_W = \{0, 1, \dots, W-1\}$.

Решетки $\mathcal{L}(a, W)$ и $\mathcal{L}^*(a, W)$ рассматривались в 1988 г. в [6] в связи с исследованием задачи восстановления линейной рекуррентной последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq x_N < W, \quad x_{N+1} = ax_N \pmod{W}, \quad (2)$$

при известных a, W в случае, если заданы l старших двоичных разрядов каждого из чисел $x_i, i = 1, \dots, s$, где l — некоторый параметр, зависящий от a, W и s .

В [6] были доказаны две следующие теоремы.

Теорема 1 ([6]). Пусть число W пробегает множество натуральных чисел, не делящихся на квадрат простого числа. Тогда при любом $0 < \varepsilon < 1/s$ и $W > W_0(s, \varepsilon)$ все решетки $\mathcal{L}(a, W)$ и $\mathcal{L}^*(a, W)$ при $a \in I_W$ будут ε -регулярны за исключением множества чисел a мощности, не большей $W^{1-\varepsilon}$.

Теорема 2 ([6]). Пусть $s = 3$, а число W пробегает множество всех натуральных чисел. Тогда при любом $0 < \varepsilon < 1/3$ и любом $W > W_0(s, \varepsilon)$ все решетки $\mathcal{L}(a, W)$ и $\mathcal{L}^*(a, W)$ при $a \in I_W$ будут ε -регулярны за исключением множества чисел a мощности, не большей $W^{1-\varepsilon/2}$.

Замечание 2. В [6] доказывалась ε -регулярность решеток $\mathcal{L}^*(a, W)$ для почти всех a , но из доказательства теорем легко вытекает соответствующее утверждение для решеток $\mathcal{L}(a, W)$.

С помощью теорем 1 и 2 был установлен следующий основной результат.

Теорема 3 ([6]). Пусть число W пробегает множество натуральных чисел, не делящихся на квадрат простого числа, либо $s = 3$ и W пробегает множество всех натуральных чисел. Тогда при любом $0 < \varepsilon < 1/s$ и любом $W > W_0(s, \varepsilon)$ существует такое исключительное множество $E = E(W, s, \varepsilon) \subset I_W$ мощности, не большей $W^{1-\varepsilon/2}$, что при любом $a \in I_W \setminus E$ верно следующее. Числа $x_1, \dots, x_s$ последовательности (2) однозначно определены при задании своих $l = \lfloor (1/s + \varepsilon) \log_2 W \rfloor$ старших двоичных разрядов и существует алгоритм нахождения этих чисел, имеющий полиномиальное относительно $\log_2 W + s$ время работы.

Цель данной работы состоит в доказательстве аналога теоремы 2 для $s = 4$. Основной результат нашей работы имеет следующий вид.

Теорема 4. Пусть $s = 4$, а число W пробегает множество всех натуральных чисел. Тогда при любом $0 < \varepsilon < 1/48$ и любом $W > W_0(s, \varepsilon)$ все решетки $\mathcal{L}(a, W)$ и $\mathcal{L}^*(a, W)$ при $a \in I_W$ будут ε -регулярны за исключением множества чисел a мощности, не большей $W^{1-\varepsilon}$.

Помимо этого, интерес может представлять теорема 5, которую мы формулируем в разделе 3, а также некоторые утверждения о числе корней многочлена над кольцом вычетов, формулируемые в разделе 2.

Из теоремы 4 можно извлечь очевидное уточнение теоремы 3. Формулировку мы опускаем. Кроме того, используя те же аргументы, что приводятся ниже для доказательства теоремы 4, несложно показать, что при $0 < \varepsilon < 1/18$ оценку $W^{1-\varepsilon/2}$ для количества исключительных чисел теоремы 2 можно заменить на $W^{1-\varepsilon}$.

Отметим еще одну интересную аналогию между известной гипотезой К. Малера (см. замечание к главе 7 в [2]) и гипотезой об ε -регулярности решетки $\mathcal{L}^*(a, W)$ для почти всех a . Пусть $|x|_{\mathbf{Z}}$ — расстояние от числа $x \in \mathbf{R}$ до ближайшего целого. Гипотеза К. Малера утверждает, что при любом $\varepsilon > 0$ множество чисел $x \in \mathbf{R}$, для которых неравенство

$$\max_{j=1, \dots, s} |qx^j|_{\mathbf{Z}} \leq q^{-1/s-\varepsilon}$$

имеет бесконечное число целых решений q , есть множество лебеговой меры 0. Для доказательства гипотезы об ε -регулярности решетки $\mathcal{L}^*(a, W)$ для почти всех a надо в свою очередь показать, что при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ и любом $W > W_0(s, \varepsilon)$ множество тех чисел $a \in I_W$, для которых неравенство

$$\max_{j=0, \dots, s-1} |ta^j/W|_{\mathbf{Z}} \leq W^{-1/s-\varepsilon}$$

имеет нетривиальное решение $t \in I_W$, есть множество мощности, не большей $W^{1-\varepsilon}$.

2. Оценка числа корней многочлена над кольцом вычетов

Следующие обозначения будут общими для всех утверждений этого раздела:

p — фиксированное простое число,

$v_p(x)$ — p -показатель числа $x \in \mathbf{Q}$, определяющийся следующим образом: $v_p(0) = \infty$, для целого числа $x \neq 0$ показатель $v_p(x)$ есть наибольшее целое m , для которого $p^m \mid x$, наконец, для рационального $x = a/b$ с целыми a и b показатель $v_p(x)$ равен разности $v_p(a) - v_p(b)$;

$\mathbf{Q}_p$ — поле p -адических чисел, то есть пополнение поля $\mathbf{Q}$ по метрике $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, порожденной p -показателем v_p ; эта метрика однозначно продолжается до метрики на алгебраическом замыкании поля $\mathbf{Q}_p$ и его пополнении (см. [3, 1]); всюду ниже символ $|\cdot|_p$ рассматривается в этом более широком смысле;

$\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p -адических чисел, которое можно определить двумя способами, либо как замыкание кольца $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Q}_p$, либо как единичный шар $\{x \in \mathbf{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ (см. гл. 4, §1, п. 4 в [1]);

K — конечное расширение поля $\mathbf{Q}_p$;

$\mathbf{Z}_K$ — целое замыкание кольца $\mathbf{Z}_p$ в K , которое совпадает с единичным шаром $\{x \in K : |x|_p \leq 1\}$ в K (см. гл. 4, § 1, п. 4 в [1]);

$f(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) \in \mathbf{Z}[z]$ — многочлен степени n , разлагающийся в K на линейные множители;

$D_f = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ — дискриминант f .

Доказательство следующей леммы можно найти, например, в [8], но на русском языке оно, по всей видимости, не опубликовано. В целях полноты мы предпочли включить это доказательство.

Лемма 1 (лемма 3.1 в [8]). *Имеет место равенство*

$$|a_n|_p \prod_{i=1}^n \max(1, |\alpha_i|_p) = |d|_p,$$

где d — наибольший общий делитель коэффициентов многочлена f .

Доказательство. Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ занумерованы так, что $|\alpha_1|_p \leq \dots \leq |\alpha_n|_p$ и a_i — коэффициент $f(z)$ при степени z^i . По формулам Виета

$$a_{n-i}/a_n = (-1)^i \sum_{1 \leq s_1 < \dots < s_i \leq n} \alpha_{s_1} \dots \alpha_{s_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть j есть максимум множества $\{i : |\alpha_i|_p \leq 1\}$, если это множество непусто, и $j = 0$, если оно пусто. Поскольку самым большим в метрике $|\cdot|_p$ из слагаемых сумм (2) будет слагаемое $\alpha_{j+1} \dots \alpha_n$ суммы для a_j/a_n , в силу неархимедовости метрики $|\cdot|_p$ справедливы равенства

$$\max\{|a_{n-i}/a_n|_p : i = 0, 1, \dots, n\} = |a_j/a_n|_p = |\alpha_{j+1} \dots \alpha_n|_p = \prod_{i=1}^n \max(1, |\alpha_i|_p),$$

следовательно,

$$|d|_p = \max\{|a_i|_p : i = 0, 1, \dots, n\} = |a_n|_p \prod_{i=1}^n \max(1, |\alpha_i|_p),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если $u, u_1, \dots, u_n$ — произвольные неотрицательные целые числа и $u \geq \max(u_1, \dots, u_n)$, то число $a_n^u \alpha_1^{u_1} \dots \alpha_n^{u_n}$ принадлежит $\mathbf{Z}_K$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно исследовать случай $u = 1$, $u_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, поскольку рассматриваемое в условии следствия число можно представить в виде произведения чисел, у которых u и $u_1, \dots, u_n$ имеют указанный вид. Так как

$$|a_n \alpha_1^{u_1} \dots \alpha_n^{u_n}|_p \leq |a_n|_p \prod_{i=1}^n \max(1, |\alpha_i|_p) \leq 1$$

(второе неравенство справедливо в силу леммы 1), число $a_n \alpha_1^{u_1} \dots \alpha_n^{u_n}$ принадлежит единичному шару в K , а значит, и $\mathbf{Z}_K$.

Идея доказательства следующих двух лемм, точнее говоря, идея о том, что для оценки снизу значения многочлена в любой точке w , являющейся его корнем по модулю p^e , следует рассмотреть разности $w - \alpha_i$ в поле K , навеяна леммой 1.7 книги [5], где аналогичная ситуация рассмотрена по отношению к обычной метрике модуля и конечному расширению поля $\mathbf{Q}$.

Лемма 2. Для любого $w \in K$ имеет место оценка

$$|f(w)|_p \geq |w - \alpha_s|_p |f'(w)|_p,$$

где α_s — ближайший к w корень многочлена f .

Доказательство. При любом $i = 1, \dots, n$ ввиду неравенства $|w - \alpha_s|_p \leq |w - \alpha_i|_p$ имеет место оценка

$$\prod_{j: j \neq i} |w - \alpha_j|_p \leq \prod_{j: j \neq s} |w - \alpha_j|_p,$$

отсюда в силу неархимедовости метрики $|\cdot|_p$ следует оценка

$$|f'(w)|_p = |a_n|_p \left| \sum_{i=1}^n \prod_{j: j \neq i} (w - \alpha_j) \right|_p \leq |a_n|_p \prod_{j: j \neq s} |w - \alpha_j|_p = |f(w)|_p / |w - \alpha_s|_p,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Для любого $w \in K$ имеет место оценка

$$|f(w)|_p \geq |w - \alpha_s|_p p^{-r/2},$$

где s — то же, что и в лемме 2, а $r = v_p(D_f)$.

Доказательство. При $D_f = 0$ утверждение очевидно. Пусть $D_f \neq 0$, то есть все корни α_i попарно различны. Будем для простоты считать, что $s = 1$. Поскольку $|w - \alpha_1|_p \leq |w - \alpha_j|_p$ при любом j , то $|\alpha_1 - \alpha_j|_p = |\alpha_1 - w + w - \alpha_j|_p \leq |w - \alpha_j|_p$, отсюда

$$|f(w)|_p \geq |w - \alpha_1|_p |a_n|_p \prod_{j \geq 2} |\alpha_1 - \alpha_j|_p. \quad (3)$$

Рассмотрим число

$$\begin{aligned} \sqrt{D_f} &= a_n^{n-1} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j) = a_n \prod_{j \geq 2} (\alpha_1 - \alpha_j) D', \\ D' &= a_n^{n-2} \prod_{i \geq 2} \prod_{j > i} (\alpha_i - \alpha_j). \end{aligned}$$

В силу следствия 1 леммы 1 число D' принадлежит $\mathbf{Z}_K$, следовательно, $|D'|_p \leq 1$. Отсюда вытекает, что

$$p^{-r/2} = |\sqrt{D_f}|_p \leq |a_n|_p \prod_{j \geq 2} |\alpha_1 - \alpha_j|_p,$$

следовательно, в силу (3) справедливо неравенство $|f(w)|_p \geq |w - \alpha_1|_p p^{-r/2}$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. Число корней многочлена f по модулю p^e не превосходит np^v , где

$$v = \max\{v_p(f'(x)) : x \in \mathbf{Z}, f(x) \equiv 0 \pmod{p^e}\}.$$

Доказательство. При $v \geq e$ утверждение очевидно. Пусть $v \leq e - 1$ и $w_1, \dots, w_N$ — все корни f по модулю p^e . Разобьем их на группы. В i -ю группу включаются те w_j , для которых ближайшим корнем f в K будет α_i (если два корня из K одинаково близки к некоторому w_j , то число w_j включается в любую из соответствующих двух групп). Допустим противное, то есть, что $N > np^v$. Тогда одна из групп, например, первая, содержит больше p^v элементов. Пусть для простоты $w_1, \dots, w_{N_0}$ — все элементы первой группы, где $N_0 > p^v$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$0 \leq w_1 < w_2 < \dots < w_{N_0} < p^e. \quad (4)$$

По определению числа v все числа $|f'(w_i)|_p$ будут не меньше p^{-v} , отсюда по лемме 2

$$|f(w_i)|_p \geq |\alpha_1 - w_i|_p p^{-v}, \quad i = 1, \dots, N_0.$$

Последнее означает, что

$$|\alpha_1 - w_i|_p \leq p^{-e+v}, \quad i = 1, \dots, N_0,$$

то есть, что

$$|w_i - w_j|_p \leq p^{-e+v}, \quad i, j = 1, \dots, N_0,$$

то есть, что

$$p^{e-v} \mid (w_i - w_j), \quad i, j = 1, \dots, N_0.$$

Отсюда ввиду (4) вытекает оценка

$$w_{N_0} \geq w_1 + p^{e-v}(N_0 - 1) \geq w_1 + p^{e-v}(p^v + 1 - 1) \geq p^e,$$

противоречащая (4), что и доказывает лемму.

Следствие 2. Пусть v — фиксированное целое неотрицательное число. Тогда число корней w многочлена f по модулю p^e , удовлетворяющих неравенству $v_p(f'(w)) \leq v$, не превосходит np^v .

Лемма 5. Число корней многочлена f по модулю p^e не превосходит $np^{\lfloor r/2 \rfloor}$, где $r = v_p(D_f)$ и $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть снизу.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 4, только вместо оценки

$$|f(w_i)|_p \geq |\alpha_1 - w_i|_p |f'(w_i)|_p, \quad i = 1, \dots, N_0,$$

леммы 2 мы пользуемся оценкой леммы 3

$$|f(w_i)|_p \geq |\alpha_1 - w_i|_p p^{-r/2}, \quad i = 1, \dots, N_0.$$

В предположении, что $N > np^{\lfloor r/2 \rfloor}$, то есть, что $N_0 > p^{\lfloor r/2 \rfloor}$, получаем оценки

$$|w_i - w_j|_p \leq p^{-e+r/2}, \quad i, j = 1, \dots, N_0,$$

то есть

$$v_p(w_i - w_j) \geq e - r/2, \quad i, j = 1, \dots, N_0.$$

Числа $v_p(w_i - w_j)$ целые, значит,

$$v_p(w_i - w_j) \geq e - \lfloor r/2 \rfloor, \quad i, j = 1, \dots, N_0.$$

Отсюда точно так же, как в лемме 3, вытекает противоречие с (4) и лемма тем самым доказана.

3. Редукция

Прежде чем доказывать теорему 4, нам будет удобно ввести несколько определений и обозначений.

Высотой многочлена $\varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$ мы будем называть максимум модулей его коэффициентов. Многочлен $\varphi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ назовем W -примитивным, если для любого простого числа $p \mid W$ найдется коэффициент φ , не делящийся на p . Символ O во всех оценках ниже скрывает в себе абсолютную постоянную.

Далее, пусть $d(n)$ — число натуральных делителей натурального числа n , $\omega(n)$ — число простых делителей натурального числа n .

Имеют место оценки, которые ниже будут часто использоваться (см. теорему 5.2 главы 1 в [4] для величины $d(n)$ и формулу (5.5) в сочетании с теоремой 3.3 этой же главы для величины $\omega(n)$),

$$d(n) = e^{O((\ln n)/\ln \ln n)}, \quad \omega(n) = O((\ln n)/\ln \ln n), \quad n \geq 3.$$

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы вывести сформулированную выше теорему 4 из следующей теоремы.

Теорема 5. Для любых достаточно большого натурального числа W и вещественного $1 \leq R \leq W^{1/4}$ количество чисел a из множества $I_W = \{0, 1, \dots, W-1\}$, для которых существует многочлен $0 \neq \varphi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени, не большей 3, и высоты, не большей R , такой, что $\varphi(a) \equiv 0 \pmod{W}$, не превосходит величины $W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{2/13})$.

Сначала оценим число N решеток $\mathcal{L}(a, W)$, $a \in I_W$, которые не являются ε -регулярными и для которых согласно определению число a должно принадлежать множеству

$$\left\{ a \in I_W : \text{существует многочлен } 0 \neq \varphi(x) = \sum_{j=0}^3 \varphi_j x^j \in \mathbb{Z}[x] \text{ такой, что} \right. \\ \left. \sqrt{\sum_{j=0}^3 \varphi_j^2} \leq W^{1/4-\varepsilon} \text{ и } \varphi(a) \equiv 0 \pmod{W} \right\}.$$

Возьмем $R = W^{1/4-\varepsilon}$, тогда по теореме 5

$$N \leq W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{2/13}).$$

Первый множитель правой части этого неравенства при достаточно большом W не превосходит $W^{\varepsilon/2}$, поэтому остается показать, что

$$\frac{\varepsilon}{2} + \max\left(1 - 4\varepsilon, \frac{12}{13} + \frac{2}{13}\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\right) \leq 1 - \varepsilon$$

или что

$$13\varepsilon + \max(26 - 104\varepsilon, 25 - 4\varepsilon) \leq 26 - 26\varepsilon$$

при $\varepsilon < 1/48$. Последнее неравенство легко проверяется непосредственно.

Для числа N^* решеток $\mathcal{L}^*(a, W)$, $a \in I_W$, которые не являются ε -регулярными, рассуждение будет немного сложнее. Заметим, что ввиду равенства

$$WW^{-1/4-\varepsilon} = W^{3(1/4-\varepsilon_0)}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon/3,$$

ε -регулярность решетки $\mathcal{L}^*(a, W)$ с определителем W^{-1} равносильна ε_0 -регулярности решетки $W\mathcal{L}^*(a, W) = \{Wx : x \in \mathcal{L}(a, W)\}$ с определителем W^3 , поэтому число N^* равно также числу решеток $W\mathcal{L}^*(a, W)$, не являющихся ε_0 -регулярными. Пусть $R = W^{1/4-\varepsilon_0}$. Свойство решетки $W\mathcal{L}^*(a, W)$ не быть ε_0 -регулярной по определению означает, что число a принадлежит множеству

$$S_R = \{a \in I_W : \text{существует такое } t, 1 \leq t \in I_W, \text{ что } |ta^i|_{WZ} \leq R^3 \text{ для } i = 0, 1, 2, 3\},$$

где через $|x|_{WZ}$ обозначено расстояние (в обычной метрике) от числа $x \in \mathbf{R}$ до множества WZ целых чисел, кратных числу W .

Следуя работе [6], рассмотрим при любом фиксированном натуральном $d \mid W$ множество

$$S_{R,d} = \{a \in I_W : \text{существует такое } t, 1 \leq t \in I_W,$$

$$\text{что наибольший общий делитель } t \text{ и } W \text{ равен } d \text{ и } |ta^i|_{WZ} \leq R^3, i = 0, \dots, 3\}.$$

Тогда $S_R = \bigcup_{d \mid W} S_{R,d}$ и $d \leq R^3$ по определению множества $S_{R,d}$. Для оценки числа элементов множества $S_{R,d}$ мы используем лемму 3.2 работы [6], согласно которой при любом $a \in S_{R,d}$ существует многочлен $0 \neq \varphi(x) \in \mathbf{Z}[x]$ степени, не большей 3, и высоты, не большей $(8R^3/d)^{1/3} = 2R/d^{1/3}$, такой, что $\varphi(a) \equiv 0 \pmod{W/d}$. Применяя теорему 5, получим, что число таких a по модулю W/d (то есть число классов вычетов $\{a \pmod{W/d} : a \in S_{R,d}\}$) не превосходит величины

$$W^{O(1/\ln \ln W)} \max\left(\left(\frac{2R}{d^{1/3}}\right)^4, \left(\frac{W}{d}\right)^{12/13} \left(\frac{2R}{d^{1/3}}\right)^{2/13}\right),$$

соответственно, число таких a по модулю W для фиксированного d не превосходит величины

$$\begin{aligned} dW^{O(1/\ln \ln W)} \max\left(\left(\frac{2R}{d^{1/3}}\right)^4, \left(\frac{W}{d}\right)^{12/13} \left(\frac{2R}{d^{1/3}}\right)^{2/13}\right) \\ = W^{O(1/\ln \ln W)} \max\left(\frac{R^4}{d^{1/3}}, W^{12/13} R^{2/13} d^{1/39}\right). \end{aligned}$$

Так как $d \leq R^3$, число элементов множества $S_{R,d}$ не превосходит величины

$$W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{3/13}),$$

поэтому число N^* элементов множества S_R не превосходит величины

$$\begin{aligned} \sum_{d|W} W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{3/13}) &= d(W) W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{3/13}) \\ &= W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{3/13}). \end{aligned} \quad (5)$$

По условию число $\delta = 1/48 - \varepsilon$ положительно, поэтому первый множитель в (5) при достаточно большом W не будет превосходить $W^{\varepsilon\delta}$. Нам остается показать, что

$$\varepsilon\delta + \max\left(1 - 4\varepsilon_0, \frac{12}{13} + \frac{3}{13}\left(\frac{1}{4} - \varepsilon_0\right)\right) \leq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon/3,$$

или что

$$\varepsilon\delta + \max\left(1 - \frac{4\varepsilon}{3}, \frac{12}{13} + \frac{3}{52} - \frac{\varepsilon}{13}\right) \leq 1 - \varepsilon,$$

или что

$$156\varepsilon\delta + \max(156 - 208\varepsilon, 153 - 12\varepsilon) \leq 156 - 156\varepsilon,$$

или что

$$156\varepsilon\delta + 144\varepsilon \leq 3.$$

Последнее неравенство легко проверить непосредственно.

Тем самым, мы показали, что теорема 4 вытекает из теоремы 5. Теперь покажем, что теорему 5 можно в свою очередь вывести из следующей теоремы.

Теорема 6. Для любых достаточно большого натурального числа W и вещественного R , $1 \leq R \leq W^{1/4}$, число тех a из множества $I_W = \{0, 1, \dots, W-1\}$, для которых существует W -примитивный многочлен $0 \neq \varphi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени, не большей 3, и высоты, не большей R , такой, что $\varphi(a) \equiv 0 \pmod{W}$, не превосходит величины $W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{2/13})$.

Пусть $a \in I_W$ обладает тем свойством, что существует многочлен $0 \neq \varphi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени, не большей 3, и высоты, не большей R , такой, что $\varphi(a) \equiv 0 \pmod{W}$. Тогда при некотором натуральном $d \mid W$, $d \leq R$, число a будет обладать тем свойством, что существует W -примитивный многочлен $0 \neq \varphi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени, не большей 3, и высоты, не большей R/d , такой, что $\varphi(a) \equiv 0 \pmod{W/d}$. По теореме 6 число таких a по модулю W/d не превосходит величины

$$W^{O(1/\ln \ln W)} \max\left(\left(\frac{R}{d}\right)^4, \left(\frac{W}{d}\right)^{12/13} \left(\frac{R}{d}\right)^{2/13}\right),$$

соответственно число таких a по модулю W для фиксированного d не превосходит величины

$$dW^{O(1/\ln \ln W)} \max \left(\left(\frac{R}{d} \right)^4, \left(\frac{W}{d} \right)^{12/13} \left(\frac{R}{d} \right)^{2/13} \right) \leq W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{2/13}).$$

Общее количество чисел a теоремы 5 не будет превосходить величины

$$\begin{aligned} \sum_{d|W} W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{2/13}) &= d(W) W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{2/13}) \\ &\leq W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{2/13}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, для доказательства теоремы 4 нам достаточно доказать теорему 6, чему будут посвящены следующие пять разделов.

4. Отображение η

Пусть $W = p_1^{F_1} \dots p_r^{F_r}$, где p_i — простые числа, $F_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, r$, — каноническое разложение числа W . Пусть $I_W = \{0, 1, \dots, W-1\}$ и

$$E(R, W) = \{a \in I_W : \varphi(a) = 0 \pmod{W} \text{ для некоторого } W\text{-примитивного многочлена } 0 \not\equiv \varphi(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ степени, не большей 3, и высоты, не большей } R\}.$$

Сопоставим произвольному элементу $a \in E(R, W)$ некоторое множество наборов $\eta(a) = \{(a_0, w, w', v, \varphi)\}$ следующим образом. Прежде всего возьмем произвольный W -примитивный ненулевой многочлен φ с целыми коэффициентами степени, не большей 3, и высоты, не большей R , такой, что $\varphi(a) = 0 \pmod{W}$ (если существует несколько таких многочленов, то следующие ниже действия выполняются для каждого из них). Далее, пусть

$$\begin{aligned} f_i &= \min(\lfloor F_i/2 \rfloor, v_{p_i}(\varphi'(a))), \quad i = 1, \dots, r, \\ w &= \prod_{i=1}^r p_i^{f_i}, \quad a_0 = a \pmod{w}, \quad a_0 \in I_w = \{0, 1, \dots, w-1\}. \end{aligned}$$

Нам остается определить числа w' и v . Заметим, что при любом $i = 1, \dots, r$ число a_0 удовлетворяет системе сравнений Σ_i

$$\varphi(a_0) = 0 \pmod{p_i^{2f_i}}, \quad \varphi'(a_0) = 0 \pmod{p_i^{f_i}},$$

потому что этой системе удовлетворяет число a (по определению) и этой же системе будет удовлетворять любое число, сравнимое с a по модулю $p_i^{f_i}$ (в силу формулы Тейлора).

Положим $f'_i = f_i + 1$, если $2 \nmid F_i$, $f_i = \lfloor F_i/2 \rfloor > 0$ и a_0 удовлетворяет расширенной системе Σ'_i

$$\varphi(a_0) = 0 \pmod{p_i^{2f_i+1}}, \quad \varphi'(a_0) = 0 \pmod{p_i^{f_i+1}}, \quad \varphi''(a_0)/2 = 0 \pmod{p_i}.$$

В противном случае полагаем $f'_i = f_i$. После этого возьмем

$$w' = \prod_{i=1}^r p_i^{f'_i}, \quad v = \frac{w'}{w}.$$

Этим описание множества $\eta(a)$ для чисел $a \in E(R, W)$ завершается.

Лемма 6. Если прообраз $\eta^{-1}(a_0, w, w', v, \varphi)$ не пуст, то его мощность N удовлетворяет неравенствам $w' \leq N \leq 3^r w'$, где r — число простых, входящих в разложение W .

Доказательство. Пусть $\emptyset \neq E'$ — рассматриваемый прообраз. По китайской теореме об остатках достаточно показать, что число N_0 элементов множества $\{a \pmod{p_i^{F_i}} : a \in E'\}$ удовлетворяет неравенствам $p_i^{f'_i} \leq N_0 \leq 3p_i^{f'_i}$. Для этого рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $f_i < \lfloor F_i/2 \rfloor$. Тогда $f'_i = f_i$. Для доказательства нижней оценки $N_0 \geq p_i^{f'_i}$ заметим, что если $a \in E'$, то для любого целого t , делящегося на $W'_i = W/p_i^{F_i}$, наименьший неотрицательный вычет числа $a + p_i^{F_i-f_i}t$ по модулю W также будет принадлежать множеству E' .

Действительно, пусть $\tilde{a} \in I_W$, $\tilde{a} = a + p_i^{F_i-f_i}t \pmod{W}$. Тогда из формулы Тейлора и определения числа f_i следует, что $\varphi(\tilde{a}) = 0 \pmod{W}$. Таким образом, $\tilde{a} \in E(R, W)$. Далее, из тех же соображений легко вытекает, что и остальные компоненты в наборе $(\tilde{a}_0, \tilde{w}, \tilde{w}', \tilde{v}, \varphi) \in \eta(\tilde{a})$ будут теми же, что и в наборе (a_0, w, w', v, φ) . Тем самым наше утверждение доказано.

Возьмем теперь систему из $p_i^{f'_i}$ чисел t , сравнимых с 0 по модулю W'_i и сравнимых соответственно с числами $0, 1, \dots, p_i^{f'_i} - 1$ по модулю $p_i^{F_i}$. Тогда соответствующая система наименьших неотрицательных вычетов чисел $a + p_i^{F_i-f_i}t$ по модулю W для таких t будет состоять точно из $p_i^{f'_i}$ элементов, несравнимых друг с другом по модулю $p_i^{F_i}$, следовательно, $N_0 \geq p_i^{f'_i}$.

Оценка сверху для N_0 имеет место в силу следствия 2 леммы 4.

2. Пусть $f_i = \lfloor F_i/2 \rfloor$ и $2 \mid F_i$. Тогда снова $f'_i = f_i$, так что оценка снизу для N_0 сразу вытекает из рассуждений предыдущего пункта. Оценка сверху вытекает из того, что всякое $a \in E'$ должно быть по определению сравнимо с a_0 по модулю $p_i^{f'_i}$, а число таких попарно несравнимых друг с другом вычетов по модулю $p_i^{F_i}$ равно $p_i^{F_i-f_i} = p_i^{f'_i}$.

3. Пусть $f_i = \lfloor F_i/2 \rfloor$ и $2 \nmid F_i = 1$. Тогда снова $f'_i = f_i$, так что оценка снизу для N_0 сразу вытекает из рассуждений пункта 1. Оценка сверху вытекает из того, что число значений $a \in E'$ по простому модулю p_i не превосходит числа корней многочлена φ по модулю p_i , которое в свою очередь не превосходит 2, так как не все коэффициенты φ делятся на p_i (многочлен φ является W -примитивным).

4. Пусть $f_i = \lfloor F_i/2 \rfloor$, $2 \nmid F_i > 1$ и число a_0 не удовлетворяет расширенной системе Σ'_i . Тогда снова $f'_i = f_i$, так что оценка снизу для N_0 сразу вытекает из рассуждений пункта 1. Оценка сверху вытекает из следующего замечания, которое имеет место в силу формулы Тейлора. Для того чтобы наименьший неотрицательный вычет числа $a_0 + p_i^{f'_i}t$ по модулю W принадлежал E' , необходимо, чтобы выполнялось сравнение

$$\frac{\varphi(a_0)}{p_i^{2f_i}} + \frac{\varphi'(a_0)}{p_i^{f_i}}t + \frac{\varphi''(a_0)}{2}t^2 \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Число a_0 не удовлетворяет расширенной системе Σ'_i , поэтому не все коэффициенты этого многочлена от t делятся на p_i , следовательно, он имеет не более 2 корней по модулю p_i , а число вычетов по модулю $p_i^{f_i}$ элементов a из E' не превосходит

$$2p_i^{f_i} / p_i^{f_i+1} = 2p_i^{f_i}.$$

5. Пусть $f_i = \lfloor F_i/2 \rfloor$, $2 \nmid F_i > 1$ и число a_0 удовлетворяет расширенной системе Σ'_i . Рассмотрим систему наименьших неотрицательных вычетов по модулю W чисел $a = a_0 + p_i^{f_i}t$, где t пробегает систему чисел, сравнимых с 0 по модулю W'_i и сравнимых соответственно с числами $0, 1, \dots, p_i^{f_i+1} - 1$ по модулю $p_i^{f_i}$. Число таких вычетов равно точно $p_i^{f_i'} = p_i^{f_i+1}$ и все они принадлежат множеству E' , так как число a_0 удовлетворяет расширенной системе Σ'_i . Отсюда вытекает оценка снизу для N_0 . Оценка сверху вытекает из рассуждений, аналогичных приведенным в п. 2.

Для доказательства теоремы 6 нам надо показать, что

$$|E(R, W)| \leq W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{2/13})$$

при любом достаточно большом числе W и любом R , $1 \leq R \leq W^{1/4}$. Для этого мы разобьем множество $E(R, W)$ на четыре (вообще говоря, пересекающихся) подмножества

$$E(R, W) = \bigcup_{j=1}^4 E_j(R, W) \quad (6)$$

и покажем, что приведенная только что оценка выполняется для каждого из них, то есть, что

$$|E_j(R, W)| \leq W^{O(1/\ln \ln W)} \max(R^4, W^{12/13} R^{2/13}), \quad j = 1, \dots, 4. \quad (7)$$

Этого будет достаточно для доказательства теоремы 6.

Описание и исследование множеств $E_j(R, W)$ дается в следующих четырех разделах.

5. Множество $E_1(R, W)$

Пусть $T \in \mathbf{R}_{>0}$ — параметр, который мы определим позже. Зададим множество $E_1(R, W)$ как совокупность тех элементов $a \in E(R, W)$, для которых хотя бы в одном из наборов $(a_0, w, w', v, \varphi) \in \eta(a)$ имеет место неравенство $ww' \leq T^2$.

Лемма 7. *Справедлива оценка*

$$|E_1(R, W)| \leq W^{O(1/\ln \ln W)} (R^4 + T^2 R^2).$$

Доказательство. Для наборов $(a_0, w, w', v, \varphi) \in \eta(a)$ при $a \in E(R, W)$ справедлива система Σ' :

$$\begin{aligned} \varphi(a_0) &= \varphi_3 a_0^3 + \varphi_2 a_0^2 + \varphi_1 a_0 + \varphi_0 = 0 \pmod{ww'}, \\ \varphi'(a_0) &= 3\varphi_3 a_0^2 + 2\varphi_2 a_0 + \varphi_1 = 0 \pmod{w'}, \\ \frac{1}{2}\varphi''(a_0) &= 3\varphi_3 a_0 + \varphi_2 = 0 \pmod{v}. \end{aligned}$$

Пусть $N_0 = N_0(a_0, w, w')$ — число ненулевых многочленов φ с целыми коэффициентами степени, не большей 3, и высоты, не большей R , удовлетворяющих такой системе при условии, что числа a_0, w и w' фиксированы и $ww' \leq T^2$. Тогда количество элементов множества $E_1(R, W)$ не превосходит максимума величины

$$N = d^2(W)wN_0(3^{\omega(W)}w'), \quad (8)$$

взятого по всем a_0, w и w' с условием $ww' \leq T^2$. Первый множитель в произведении (8) есть оценка сверху для количества всевозможных пар (w, w') , потому что числа w и w' делят W . Второй множитель дает оценку сверху для количества чисел a_0 при фиксированных w и w' . Третий множитель есть число многочленов φ для фиксированного набора a_0, w, w' . Последний множитель есть согласно лемме 6 оценка сверху для числа элементов в прообразе $\eta^{-1}(a_0, w, w', v, \varphi)$ при условии, что он не пуст.

Для оценки числа N нам надо оценить N_0 . Для этого рассмотрим два случая.

1. Пусть максимум величины N достигается на наборе a_0, w, w' , в котором $w \leq R$. Тогда $v \leq R$, потому что всегда $v \mid w$. Количество возможных значений φ_3 не превосходит $2R + 1 \leq 3R$. Если фиксировать одно из них, то для φ_2 из третьего равенства системы Σ' получим ограничение вида $\varphi_2 = \varphi_{2,0} \pmod{v}$ с известным $\varphi_{2,0}$, следовательно, количество возможных значений φ_2 при фиксированном φ_3 не превосходит $2R/v + 1 \leq 3R/v$. Аналогичным образом, количество возможных значений φ_1 при фиксированных φ_3, φ_2 не превосходит $2R/w + 1 \leq 3R/w$ и такая же оценка будет иметь место для количества возможных значений φ_0 при фиксированных φ_3, φ_2 и φ_1 . Подводя итог, получим, что

$$N_0 \leq 3R \frac{3R}{v} \frac{3R}{w} \frac{3R}{w} = \frac{(3R)^4}{ww'},$$

$$N \leq d^2(W)w \frac{(3R)^4}{ww'} (3^{\omega(W)}w') = W^{O(1/\ln \ln W)} R^4,$$

и лемма в этом случае доказана.

2. Пусть максимум величины N достигается на наборе a_0, w, w' , в котором $w > R$. Тогда из тех же соображений, что и в п. 1, для числа N_0 справедлива оценка

$$N_0 \leq (3R)(3R)3 \cdot 3 = 3^4 R^2,$$

поэтому

$$N \leq d^2(W)w(3^4 R^2)(3^{\omega(W)}w') = W^{O(1/\ln \ln W)} T^2 R^2,$$

и доказательство леммы закончено.

6. Множество $E_2(R, W)$

При доказательстве теоремы 6 мы будем неоднократно использовать следующее утверждение.

Лемма 8 (лемма 2.7 в [5]). Пусть $P(z) \in \mathbb{C}[z]$, $n = \deg P$, $P(z) = P_1(z) \dots P_m(z)$, $P_1(z), \dots, P_m(z) \in \mathbb{C}[z]$. Тогда

$$2^{-n} L(P_1) \dots L(P_m) \leq L(P) \leq L(P_1) \dots L(P_m),$$

где через $L(P)$ обозначена сумма модулей коэффициентов многочлена P .

Всюду ниже через D_φ обозначается дискриминант многочлена φ .

Зададим множество $E_2(R, W)$ в виде

$$E_2(R, W) = E_{2,1}(R, W) \cup E_{2,2}(R, W),$$

где $E_{2,1}(R, W)$ — совокупность тех элементов $a \in E(R, W)$, для которых хотя бы в одном из наборов $(a_0, w, w', v, \varphi) \in \eta(a)$ имеет место равенство $\deg \varphi = 1$, а $E_{2,2}(R, W)$ — совокупность тех элементов $a \in E(R, W)$, для которых хотя бы в одном из наборов $(a_0, w, w', v, \varphi) \in \eta(a)$ выполняются условия $\deg \varphi \geq 2$ и $D_\varphi = 0$.

Лемма 9. *Справедлива оценка*

$$|E_2(R, W)| \leq W^{O(1/\ln \ln W)} W^{2/3} R.$$

Доказательство. Так как любой W -примитивный многочлен φ степени 1 имеет точно один корень по модулю W , количество элементов множества $E_{2,1}(R, W)$ совпадает с количеством допустимых многочленов φ степени 1, то есть не больше $(3R)^2$. Поскольку $R^2 < W^{2/3} R$, число элементов множества $E_{2,1}(R, W)$ удовлетворяет оценке из условия леммы.

Элементы множества $E_{2,2}(R, W)$ являются в $\mathbf{Z}/W\mathbf{Z}$ корнями W -примитивных многочленов φ степени 2 или 3, для которых $D_\varphi = 0$. Каждый такой многочлен разлагается над кольцом $\mathbf{Z}$ на линейные множители:

$$\varphi(x) = \psi^2(x)\chi(x), \quad \psi(x), \chi(x) \in \mathbf{Z}[x], \quad \deg \psi = 1, \quad \deg \chi \leq 1,$$

которые ввиду его W -примитивности будут также W -примитивны.

Определим для каждого многочлена φ натуральные числа W_1 и W_2 с помощью следующих двух формул:

$$\begin{aligned} W_1 &= \max\{W' : W' \mid W, \psi(a) \equiv 0 \pmod{W'}\}, \\ W_2 &= \max\{W' : W' \mid W, \chi(a) \equiv 0 \pmod{W'}\}. \end{aligned}$$

Тогда, поскольку $\varphi(a) \equiv 0 \pmod{W}$, то $W_1^2 W_2 \geq W$.

Пусть

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_1 x + \psi_0, & \chi(x) &= \chi_1 x + \chi_0, \\ R_\psi &= \max(|\psi_1|, |\psi_0|), & R_\chi &= \max(|\chi_1|, |\chi_0|). \end{aligned}$$

Тогда, пользуясь леммой 8, находим, что $2^{-3} R_\psi^2 R_\chi \leq 4R$, то есть $R_\psi^2 R_\chi \leq 2^5 R$.

Множество $E_{2,2}(R, W)$ можно представить в виде объединения подмножества $E_{2,2}^{(1)}(R, W)$, совокупности чисел $a \in E_{2,2}(R, W)$, для которых по крайней мере на одном из элементов множества $\eta(a)$ имеет место неравенство $W_1 \geq W^{3/8}$, и подмножества $E_{2,2}^{(2)}(R, W)$, совокупности чисел $a \in E_{2,2}(R, W)$, для которых по крайней мере на одном из элементов множества $\eta(a)$ имеет место неравенство $W_1 < W^{3/8}$.

Заметим, что одно и то же число a может, вообще говоря, иметь несколько наборов $(a_0, w, w', v, \varphi) \in \eta(a)$, для которых выполнены условия $\deg \varphi \geq 2$ и $D_\varphi = 0$, поэтому пересечение указанных подмножеств может быть непустым. Это обстоятельство, как и раньше, не имеет значения.

Для доказательства требуемой верхней оценки величины $|E_2(R, W)|$ достаточно установить аналогичную оценку для $|E_{2,2}(R, W)|$, что в свою очередь сводится к доказательству такой же оценки в случае множеств $E_{2,2}^{(j)}(R, W)$, $j = 1, 2$.

Пусть $a \in E_{2,2}^{(1)}(R, W)$. При фиксированном многочлене ψ число a будет однозначно определено по модулю W_1 , потому что многочлен ψ является W -примитивным. Следовательно, число возможных значений a по модулю W при фиксированном ψ не превосходит W/W_1 , а так как число допустимых многочленов ψ не превосходит $(3R_\psi)^2 \leq 3^2 2^5 R$, общее число элементов множества $E_{2,2}^{(1)}(R, W)$ не превосходит

$$(W/W_1)(3^2 2^5 R) \leq 3^2 2^5 W^{5/8} R \leq W^{2/3} R,$$

и доказательство в этом случае завершается.

Пусть $a \in E_{2,2}^{(2)}(R, W)$. Положим

$$W'_1 = \min(W_1, W_2), \quad W'_2 = \max(W_1, W_2).$$

При фиксированных многочленах ψ и χ число a будет однозначно определено по модулю W'_2 , потому что многочлены ψ и χ являются W -примитивными. Следовательно, число возможных значений a по модулю W при фиксированных ψ и χ не превосходит W/W'_2 . Оценим число допустимых пар (ψ, χ) . Поскольку имеют место сравнения

$$\psi_1 a + \psi_0 = 0 \pmod{W'_1}, \quad \chi_1 a + \chi_0 = 0 \pmod{W'_1},$$

то $\psi_1 \chi_0 - \chi_1 \psi_0 = 0 \pmod{W'_1}$. Таким образом, $\psi_1 \chi_0 - \chi_1 \psi_0 = k W'_1$, причем общее число возможных значений k не превосходит

$$\frac{2(R_\chi R_\psi + R_\psi R_\chi)}{W'_1} + 1 = \frac{4R_\psi R_\chi}{W'_1} + 1. \quad (9)$$

Для оценки числа допустимых пар (ψ, χ) и, соответственно, числа элементов множества $E_{2,2}^{(2)}(R, W)$ нам снова потребуется разбиение на подмножества. Пусть $E_{2,2}^{(2,1)}(R, W)$ — совокупность тех чисел $a \in E_{2,2}^{(2)}(R, W)$, для которых по крайней мере на одном из элементов множества $\eta(a)$ выполнено условие $\chi_0 \neq 0$, $E_{2,2}^{(2,2)}(R, W)$ — совокупность тех чисел $a \in E_{2,2}^{(2)}(R, W)$, для которых по крайней мере на одном из элементов множества $\eta(a)$ выполнены условия $\chi_0 = 0$, $\psi_0 \neq 0$, $E_{2,2}^{(2,3)}(R, W)$ — совокупность тех чисел $a \in E_{2,2}^{(2)}(R, W)$, для которых по крайней мере на одном из элементов множества $\eta(a)$ выполнены условия $\chi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$.

Рассмотрим первый случай, когда $\chi_0 \neq 0$. Если зафиксировать набор (k, χ_1, ψ_0) , то произведение $\psi_1 \chi_0$ будет иметь фиксированное ненулевое значение S , по модулю не превосходящее

$$R_\psi R_\chi \leq 2^5 R \leq 2^5 W^{1/4} \leq W, \quad (10)$$

поэтому число возможных значений пары (ψ_1, χ_0) для фиксированного набора (k, χ_1, ψ_0) не превосходит

$$2 \max_{1 \leq S \leq W} d(S), \quad (11)$$

а общее число возможных наборов $(k, \chi_1, \psi_0, \psi_1, \chi_0)$ не превосходит

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{4R_\psi R_\chi}{W'_1} + 1 \right) (3R_\chi)(3R_\psi) \left(2 \max_{1 \leq S \leq W} d(S) \right) \\
 & \leq \frac{2^2 3^2 2^5 R R_\chi}{W'_1} 2 \max_{1 \leq S \leq W} d(S) + 3^2 2^5 R 2 \max_{1 \leq S \leq W} d(S) \\
 & \leq \left(\frac{2^{12} 3^2 R^2}{W'_1} + 2^5 3^2 R \right) 2 \max_{1 \leq S \leq W} d(S) \leq \left(\frac{R^2}{W'_1} + R \right) W^{O(1/\ln \ln W)}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Так как $W_1^2 W_2 \geq W$, то $W'_1 W'_2 = W_1 W_2 \geq (W/W_1)$ и $W'_2 \geq W^{1/3}$, поэтому общее число элементов множества $E_{2,2}^{(2,1)}(R, W)$ не будет превосходить

$$\begin{aligned}
 & \frac{W}{W'_2} \left(\frac{R^2}{W'_1} + R \right) W^{O(1/\ln \ln W)} \leq \left(\frac{W R^2}{W/W_1} + \frac{W R}{W^{1/3}} \right) W^{O(1/\ln \ln W)} \\
 & = (W_1 R^2 + W^{2/3} R) W^{O(1/\ln \ln W)} \leq (W^{3/8} R^2 + W^{2/3} R) W^{O(1/\ln \ln W)} \\
 & \leq (W^{3/8+1/4} R + W^{2/3} R) W^{O(1/\ln \ln W)} \leq W^{2/3} R W^{O(1/\ln \ln W)}
 \end{aligned} \tag{13}$$

и доказательство в этом случае заканчивается.

Перейдем ко второму случаю, когда $\chi_0 = 0, \psi_0 \neq 0$. Тогда $\chi_1 \neq 0$. Если зафиксировать набор (k, χ_0, ψ_1) , то произведение $\psi_0 \chi_1$ будет иметь фиксированное ненулевое значение S , по модулю не превосходящее (10), поэтому число возможных значений пары (ψ_0, χ_1) для фиксированного набора (k, χ_0, ψ_1) не превосходит величины (11). Общее число возможных наборов $(k, \chi_0, \psi_1, \psi_0, \chi_1)$ можно снова оценить величиной (12), а общее число рассматриваемых значений a — величиной (13).

Пусть, наконец, $\chi_0 = 0, \psi_0 = 0$. Тогда количество допустимых пар (ψ, χ) не превосходит

$$(3R_\psi)(3R_\chi) \leq 3^2(2^5 R),$$

а общее число элементов множества $E_{2,2}^{(2,3)}(R, W)$ не превосходит

$$\frac{W}{W'_2} (2^5 3^2 R) \leq 2^5 3^2 W^{2/3} R,$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

7. Множество $E_3(R, W)$

Для фиксированного набора (a_0, ww', w', v) рассмотрим решетку

$$\mathcal{L}_3(a_0) = \mathcal{L}_3(a_0, ww', w', v)$$

$$= \left\{ (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbf{Z}^4 : \text{многочлен } \varphi(x) = \sum_{j=0}^3 \varphi_j x^j \text{ удовлетворяет системе } \Sigma' \right\},$$

где Σ' — система из доказательства леммы 7.

Пусть $E_3(R, W)$ — совокупность тех элементов $a \in E(R, W)$, для которых хотя бы в одном из наборов $(a_0, w, w', v, \varphi) \in \eta(a)$ имеют место неравенства

$$ww' > T^2, \quad \lambda_1(\mathcal{L}_3(a_0)) \leq \frac{(ww')^{1/4}}{3^{r/2+1}}, \quad (14)$$

где $\lambda_1(\cdot)$ — первый последовательный минимум Минковского.

Лемма 10. *Справедлива оценка*

$$|E_3(R, W)| \leq W^{O(1/\ln \ln W)} W/T^{1/6}.$$

Доказательство. План доказательства леммы будет таким. Пусть $a \in E_3(R, W)$ (то есть выполнены условия (14)), и пусть $\varphi^*(x)$ — многочлен, на котором достигается последовательный минимум $\lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{L}_3(a_0))$. Сначала мы покажем, что указанная в (14) граница для числа λ_1 влечет выполнение по крайней мере одного из равенств $\deg \varphi^* = 1$, $D_{\varphi^*} = 0$, а затем установим требуемую оценку количества элементов множества $E_3(R, W)$ приблизительно тем же способом, что и при доказательстве леммы 9.

Допустим противное, то есть, что $\deg \varphi^* \geq 2$ и $D_{\varphi^*} \neq 0$. Тогда числа $\rho_i = v_{p_i}(D_{\varphi^*})$ конечны. По лемме 5 число корней многочлена φ^* по модулю $p_i^{f_i+f'_i}$ не превосходит $3p_i^{\rho_i/2}$, откуда по китайской теореме об остатках число корней многочлена φ^* по модулю ww' не превосходит $3^r \sqrt{D_{\varphi^*}}$. Заметим, что дискриминант многочлена общего вида второй степени $A_2x^2 + A_1x + A_0$ есть однородный многочлен $A_1^2 - 4A_0A_2$ степени 2 от букв A_2, A_1, A_0 , сумма модулей коэффициентов которого не превосходит 5, а дискриминант многочлена общего вида третьей степени $A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$ есть однородный многочлен $-4A_1^3A_3 - 4A_2^3A_0 + A_1^2A_2^2 - 27A_0^2A_3^2 + 18A_0A_1A_2A_3$ степени 4 от букв A_3, A_2, A_1, A_0 , сумма модулей коэффициентов которого не превосходит 54. Следовательно, если R_{φ^*} — максимум модулей коэффициентов φ^* , то число корней φ^* по модулю ww' не превосходит

$$3^r \sqrt{D_{\varphi^*}} \leq 3^r \sqrt{54R_{\varphi^*}^4} \leq 3^r \sqrt{54\lambda_1^2} \leq 3^r \sqrt{54} \left(\frac{1}{3^{r/2+1}} (ww')^{1/4} \right)^2 < (ww')^{1/2} \leq w'.$$

С другой стороны, из формулы Тейлора и из того, что набор коэффициентов многочлена φ^* принадлежит решетке $\mathcal{L}_3(a_0)$, вытекает, что $\varphi^*(a_0 + wt) = 0 \pmod{ww'}$ при любом целом t . Взяв, в частности, $t = 0, 1, \dots, w' - 1$, получим w' корней по модулю ww' , что противоречит предыдущей оценке. Значит, $D_{\varphi^*} = 0$.

Далее мы действуем по той же схеме, что и при доказательстве леммы 9. Основное отличие на этот раз в том, что многочлен φ^* может быть не W -примитивен. Пусть ξ — натуральное число, делящее W и такое, что многочлен φ^*/ξ является W -примитивным, а W^* — наибольшее натуральное число, делящее W и такое, что $\varphi^*(a) = 0 \pmod{W^*}$. Мы уже видели, что $\varphi^*(a_0 + wt) = 0 \pmod{ww'}$ для целых t . Так как $a = a_0 \pmod{w}$, то $\varphi^*(a) = 0 \pmod{ww'}$ и $W^* \geq ww'$. В случае $\deg \varphi^* = 1$ (аналог множества $E_{2,1}(R, W)$ леммы 9) мы получим, что при фиксированных ξ и φ^*/ξ число a будет определено однозначно по модулю W^*/ξ . Число допустимых W -примитивных многочленов φ^*/ξ не превосходит $(3\lambda_1/\xi)^2$, поэтому для числа N рассматриваемых значений a справедлива оценка

$$\begin{aligned} N &\leq \sum_{\xi|W} \frac{W}{W^*/\xi} (3\lambda_1/\xi)^2 \leq \frac{W}{W^*} \frac{(ww')^{1/2}}{3^{\omega(W)}} d(W) \\ &\leq W^{O(1/\ln \ln W)} W/(ww')^{1/2} \leq W^{O(1/\ln \ln W)} W/T, \end{aligned}$$

завершающая в данном случае доказательство леммы.

В случае $\deg \varphi^* \geq 2$, $D_{\varphi^*} = 0$ (аналог множества $E_{2,2}(R, W)$ леммы 9) многочлен φ^* будет удовлетворять равенству вида

$$\varphi^*(x) = \xi \psi^2(x) \chi(x), \quad \psi(x), \chi(x) \in \mathbf{Z}[x], \quad \deg \psi = 1, \quad \deg \chi \leq 1.$$

Так как φ^*/ξ является W -примитивным, то ψ и χ также W -примитивны.

Пусть величины $W_1, W_2, \psi_1, \psi_0, \chi_1, \chi_0, R_\psi, R_\chi, W'_1$ и W'_2 определяются так же, как и в лемме 9. Тогда числа R_ψ и R_χ удовлетворяют оценке $R_\psi^2 R_\chi \leq 2^5 \lambda_1 / \xi$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $W_1 \geq W^{*3/8}$ (аналог множества $E_{2,2}^{(1)}(R, W)$ леммы 9). Число допустимых многочленов ψ при фиксированном ξ не превосходит $3^2 2^5 \lambda_1 / \xi$, а если зафиксировать числа ξ, ψ_1 и ψ_0 , то число a будет однозначно определено по модулю W_1 . Отсюда для числа N вытекает оценка

$$\begin{aligned} N &\leq \sum_{\xi|W} \frac{W}{W_1} (3^2 2^5 \lambda_1 / \xi) \leq 3^2 2^5 d(W) W \lambda_1 / (W^*)^{3/8} \leq W^{O(1/\ln \ln W)} \frac{W}{(ww')^{3/8}} (ww')^{1/4} \\ &\leq W^{O(1/\ln \ln W)} \frac{W}{(ww')^{1/8}} \leq W^{O(1/\ln \ln W)} W / T^{1/4} \end{aligned}$$

и лемма в этом случае доказана.

2. Пусть $W_1 < W^{*3/8}$ (аналог множества $E_{2,2}^{(2)}(R, W)$ леммы 9). При фиксированных многочленах ψ и χ число a однозначно определяется по модулю W'_2 . Числа $\psi_1, \psi_0, \chi_1, \chi_0$ удовлетворяют равенству $\psi_1 \chi_0 - \chi_1 \psi_0 = k W'_1$ с целым k . Если зафиксировать ξ , то количество возможных значений k не будет превосходить величины (9). Рассмотрим снова три случая.

2.1. Пусть $\chi_0 \neq 0$ (аналог множества $E_{2,2}^{(2,1)}(R, W)$ леммы 9). Из того, что

$$R_\psi R_\chi \leq 2^5 \frac{\lambda_1}{\xi} \leq 2^5 (ww')^{1/4} \leq 2^5 W^{1/2} \leq W,$$

вытекает, что верхняя граница (11) для числа допустимых наборов (ψ_1, χ_0) при фиксированных k, χ_1, ψ_0 остается в силе. Оценка (12) числа допустимых наборов $(k, \chi_1, \psi_0, \psi_1, \chi_0)$ при фиксированном ξ также останется в силе, если всюду вместо R в ней поставить λ_1 / ξ . Наконец, поскольку $W'_1 W'_2 \geq W^* / (\xi W_1)$ и $W'_2 \geq (W^* / \xi)^{1/3}$, то аналогом формул (13) для числа N будут формулы

$$\begin{aligned} N &\leq \sum_{\xi|W} \frac{W}{W'_2} \left(\frac{(ww')^{1/2}}{\xi^2 W'_1} + \frac{(ww')^{1/4}}{\xi} \right) W^{O(1/\ln \ln W)} \\ &\leq \sum_{\xi|W} \left(\frac{W(ww')^{1/2}}{\xi^2 W^* / (\xi W_1)} + \frac{W(ww')^{1/4}}{(W^* / \xi)^{1/3} \xi} \right) W^{O(1/\ln \ln W)} \\ &\leq \sum_{\xi|W} \left(\frac{W(ww')^{1/2}}{\xi W^{*5/8}} + \frac{W(ww')^{1/4}}{W^{*1/3} \xi^{2/3}} \right) W^{O(1/\ln \ln W)} \\ &\leq d(W) \left(\frac{W(ww')^{1/2}}{(ww')^{5/8}} + \frac{W(ww')^{1/4}}{(ww')^{1/3}} \right) W^{O(1/\ln \ln W)} \\ &\leq \frac{W}{(ww')^{1/12}} W^{O(1/\ln \ln W)} \leq W^{O(1/\ln \ln W)} W / T^{1/6}, \end{aligned} \tag{15}$$

и лемма в этом случае доказана.

2.2. Если $\chi_0 = 0$, $\psi_0 \neq 0$, то из анализа соответствующего случая леммы 9 (множество $E_{2,2}^{(2,2)}(R, W)$) нетрудно заключить, что для числа N рассматриваемых значений a оценка (15) имеет место.

2.3. Пусть, наконец, $\chi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ (аналог множества $E_{2,2}^{(2,3)}(R, W)$ леммы 9). Тогда при фиксированном ξ число допустимых пар (ψ, χ) не превосходит $3^2 2^5 \lambda_1 / \xi$, а для числа N справедлива оценка

$$\begin{aligned} N &\leq \sum_{\xi|W} \frac{W}{W'_2} (3^2 2^5 \lambda_1 / \xi) \leq \sum_{\xi|W} \frac{W}{(W^*/\xi)^{1/3}} (3^2 2^5 (ww')^{1/4} / \xi) \\ &\leq 2^5 3^2 d(W) \frac{W (ww')^{1/4}}{W^{*1/3}} \leq W^{O(1/\ln \ln W)} \frac{W}{(ww')^{1/12}} \leq W^{O(1/\ln \ln W)} W/T^{1/6}, \end{aligned}$$

завершающая доказательство леммы.

Теперь выберем параметр T так, чтобы сбалансировать оценки лемм 7 и 10, то есть определим T с помощью равенства $T^2 R^2 = W/T^{1/6}$, что дает $T = (W/R^2)^{6/13}$ и

$$T^2 R^2 = W/T^{1/6} = \frac{W}{(W/R^2)^{1/13}} = W^{12/13} R^{2/13}.$$

Отсюда с учетом лемм 7 и 10 получаем, что множества $E_1(R, W)$ и $E_3(R, W)$ удовлетворяют неравенству (7). Множество $E_2(R, W)$ также удовлетворяет этому неравенству, поскольку

$$W^{2/3} R \leq W^{2/3+11/(4 \cdot 13)} R^{2/13} = W^{137/(12 \cdot 13)} R^{2/13} < W^{12/13} R^{2/13}.$$

В следующем разделе будет рассмотрен последний случай, анализ которого (лемма 11) завершит доказательство теоремы 3.

8. Множество $E_4(R, W)$

Пусть $E_4(R, W)$ — совокупность тех элементов $a \in E(R, W)$, для которых хотя бы в одном из наборов $(a_0, w, w', v, \varphi) \in \eta(a)$ выполнены условия

$$D_\varphi \neq 0, \quad \lambda_1(\mathcal{L}_3(a_0)) > \frac{(ww')^{1/4}}{3^{r/2+1}}.$$

Ясно, что множество $E_4(R, W)$ — это именно то, что осталось рассмотреть для доказательства теоремы 6, то есть имеет место равенство (6).

Лемма 11. *Справедлива оценка*

$$|E_4(R, W)| \leq W^{O(1/\ln \ln W)} R^4.$$

Доказательство. Повторяя соответствующее рассуждение предыдущей леммы, получим, что число корней многочлена φ по модулю W не превосходит

$$3^r \sqrt{D_\varphi} \leq 3^r \sqrt{54} R^2 \leq 3^{r+2} R^2$$

для любого набора $(a_0, ww', w', v, \varphi) \in \eta(a)$. С другой стороны, по лемме 6 число корней φ не меньше w' . Отсюда вытекает, что $w' \leq 3^{r+2}R^2$.

Пусть для фиксированных a_0, w и w' величина $N_0 = N_0(a_0, w, w')$ обозначает количество ненулевых многочленов $\varphi(x) = \sum_{j=0}^3 \varphi_j x^j$ с целыми коэффициентами степени, не большей 3, и высоты, не большей R , для которых вектор $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ принадлежит решетке $\mathcal{L}_3(a_0)$. Тогда аналогично тому, как это делалось в лемме 7, несложно показать, что число элементов множества $E_4(R, W)$ не превосходит максимума величины

$$N = d^2(W)wN_0(3^{\omega(W)}w'), \quad (16)$$

взятого по всем a_0, w и w' .

Заметим, что мы рассматриваем лишь те числа a_0 , для которых

$$\lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{L}_3(a_0)) > \frac{1}{3^{r/2+1}}(ww')^{1/4}.$$

Для оценки величины N_0 мы используем следующую идею. Пусть $u_1, \dots, u_{N_0}$ — все ненулевые точки решетки $\mathcal{L}_3(a_0)$, принадлежащие кубу

$$\mathcal{Q}(0; 2R) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^4 : |x_i| \leq R, i = 0, 1, 2, 3\}$$

со стороной $2R$. Тогда шары радиуса $\lambda_1/2$ с центрами в этих точках лежат в кубе $\mathcal{Q}(0; 2R + \lambda_1)$ со стороной $2R + \lambda_1$ и пересечение любых двух таких шаров состоит самое большее из одной точки. Следовательно, суммарный объем всех этих шаров не превосходит объема куба $\mathcal{Q}(0; 2R + \lambda_1)$. Объем шара в $\mathbf{R}^4$ радиуса $\lambda_1/2$ есть $(\pi^2/2)(\lambda_1/2)^4$, поэтому справедливо следующее неравенство для объемов:

$$N_0 \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\lambda_1}{2} \right)^4 \leq (2R + \lambda_1)^4,$$

отсюда

$$N_0 \leq \frac{2^9}{\pi^2} \left(\frac{R}{\lambda_1} + \frac{1}{2} \right)^4 \leq \frac{2^9}{\pi^2} \left(3^{r/2+1} \frac{R}{(ww')^{1/4}} + \frac{1}{2} \right)^4.$$

Выше мы видели, что $w' \leq 3^{r+2}R^2$, следовательно,

$$\frac{1}{3^{r/2+1}}(ww')^{1/4} \leq \frac{1}{3^{r/2+1}}(w')^{1/2} \leq R$$

и

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} 3^{r/2+1} \frac{R}{(ww')^{1/4}}.$$

Таким образом, для числа N_0 получаем неравенство

$$\begin{aligned} N_0 &\leq \frac{2^9}{\pi^2} \left(3^{r/2+1} \frac{R}{(ww')^{1/4}} + \frac{1}{2} 3^{r/2+1} \frac{R}{(ww')^{1/4}} \right)^4 \\ &= \frac{2^9}{\pi^2} \frac{3^4}{2^4} 3^{2r+4} \frac{R^4}{ww'} = \frac{2^5 3^{2r+8}}{\pi^2} \frac{R^4}{ww'}. \end{aligned}$$

Подставляя это в (16), получим, что $N \leq W^{O(1/\ln \ln W)} R^4$, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Борович З. И., Шафаревич И. Р., *Теория чисел*. Наука, Москва, 1985.
2. Касселс Дж. В. С., *Введение в геометрию чисел*. Мир, Москва, 1965.
3. Коблиц Н., *p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции*. Бибфизмат, Могилев, 1982.
4. Прахар К., *Распределение простых чисел*. Мир, Москва, 1967.
5. Фельдман Н. И., *Седьмая проблема Гильберта*. Изд-во МГУ, Москва, 1982.
6. Frieze A. M., Håstad J., Kannan R., Lagarias J. C., Shamir A., Reconstructing truncated integer variables satisfying linear congruences. *SIAM J. Comput.* (1988) **17**, №2, 262–280.
7. Lagarias J. C., Lenstra H. W., Schnorr C. P., *Korkine–Zolotareff bases and successive minima of a lattice and its reciprocal lattice*. Tech. Rept., MSRI 07718-86, Math. Sci. Research Inst., Berkeley.
8. Waldschmidt M., *Diophantine approximation on linear algebraic groups*. Springer, Berlin, 1999.

Статья поступила 10.11.2003.

Переработанный вариант поступил 14.09.2004.