Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Гуревский, В. А. Емеличев, Об устойчивости эффективного решения векторной булевой задачи максимизации модулей линейных функций, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 2, 45–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:59:10

Об устойчивости эффективного решения векторной булевой задачи максимизации модулей линейных функций

© 2007 г. Е. Е. Гуревский, В. А. Емеличев

Рассматривается векторная (многокритериальная) задача булева программирования в случае, когда частными критериями являются модули линейных функций. Исследуется предельный уровень возмущений коэффициентов целевых функций в пространстве с метрикой l_∞ , сохраняющих парето-оптимальность решения. Получено необходимое и достаточное условие, когда радиус устойчивости такого решения равен бесконечности.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы фундаментальных исследований “Математические структуры” Республики Беларусь, проект 913/28, и межвузовской программы “Фундаментальные и прикладные исследования” Республики Беларусь, проект 492/28.

Пусть на множестве решений (булевых векторов) $X \subseteq E^n = \{0, 1\}^n$, $|X| \geq 2$, $n \geq 2$, задана векторная функция (векторный критерий)

$$f(x, C) = (|C_1x|, |C_2x|, \dots, |C_mx|),$$

где C_i — i -я строка матрицы $C = [c_{ij}]_{m \times n} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \geq 1$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Задачу поиска множества эффективных (оптимальных по Парето) решений

$$P^m(C) = \{x \in X : X_x(C) = \emptyset\},$$

где

$$X_x(C) = \{x' \in X : f(x, C) \leq f(x', C) \text{ \& } f(x, C) \neq f(x', C)\},$$

будем обозначать через $Z^m(C)$.

Для всякого натурального числа k в пространстве $\mathbf{R}^k$ зададим нормы l_1 и l_∞ :

$$\|z\|_1 = \sum_{j \in N_k} |z_j|, \quad \|z\|_\infty = \max_{j \in N_k} |z_j|, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_k) \in \mathbf{R}^k,$$

где $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Под нормой матрицы будем понимать норму вектора, составленного из всех ее элементов. Для любого числа $\varepsilon > 0$ введем множество возмущающих матриц

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m \times n} : \|C'\|_\infty < \varepsilon\}.$$

Следуя [1–4], радиусом устойчивости решения $x \in P^m(C)$ назовем число

$$\rho^m(x, C) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0: \forall C' \in \Omega(\varepsilon) (x \in P^m(C + C'))\}.$$

Естественно считать, что $\rho^m(x, C) = \infty$, если $x \in P^m(C + C')$ для любой матрицы $C' \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Таким образом, радиус устойчивости эффективного решения задает предел возмущений элементов матриц C в пространстве $\mathbf{R}^{m \times n}$ с метрикой l_∞ , при которых эффективность решения сохраняется.

Введем обозначения

$$K(x, x') = \{i \in N_m: |C_i x| \geq |C_i x'|\},$$

$$\mathbf{0}^{(n)} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{(n)}.$$

Очевидно, что $K(x, x') \neq \emptyset$, если $x \in P^m(C)$. Для любого числа $z \in \mathbf{R}$ будем использовать обозначение

$$\text{sg } z = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 0, \\ -1, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

Будем также пользоваться очевидной импликацией

$$\exists s \in \{-1; 1\} \quad \forall s' \in \{-1; 1\} \quad (sz > s'z') \implies |z| > |z'|, \quad (1)$$

которая выполняется для любых чисел $z, z' \in \mathbf{R}$.

Теорема 1. Для радиуса устойчивости любого эффективного решения x^0 задачи $Z^m(C)$, $m \geq 1$, справедлива формула

$$\rho^m(x^0, C) = \min\{\alpha(x^0, x): x \in X \setminus \{x^0\}\}, \quad (2)$$

где

$$\alpha(x^0, x) = \begin{cases} \max\{\alpha_i(x^0, x): i \in K(x^0, x)\}, & \text{если } x \neq \mathbf{0}^{(n)}, \\ \infty, & \text{если } x = \mathbf{0}^{(n)}, \end{cases}$$

$$\alpha_i(x^0, x) = \min\{\beta_i(x^0, x, s): s \in \{-1; 1\}\},$$

$$\beta_i(x^0, x, s) = \frac{|C_i(x^0 + sx)|}{\|x^0 + sx\|_1}.$$

Доказательство. Для краткости правую часть формулы (2) обозначим через φ . Если $X = \{x^0, \mathbf{0}^{(n)}\}$, то $x^0 \in P^m(C + C')$ при любой матрице $C' \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Поэтому в этом случае

$$\rho^m(x^0, C) = \infty = \varphi.$$

В дальнейшем будем считать, что $X \setminus \{x^0\} \neq \{\mathbf{0}^{(n)}\}$. Тогда число $\varphi \geq 0$ конечно.

Переходя к доказательству неравенства $\rho^m(x^0, C) \geq \varphi$, будем предполагать, что $\varphi > 0$ (в случае, когда $\varphi = 0$, это неравенство очевидно). Пусть $C' \in \Omega(\varphi)$. Тогда в соответствии

с определением числа φ заключаем, что для любого решения $x \neq x^0$ существует такой индекс $k \in K(x^0, x)$, что

$$\|C'\|_\infty < \varphi \leq \alpha_k(x^0, x). \quad (3)$$

Учитывая неравенство $\alpha_k(x^0, x) > 0$, легко видеть, что $|C_k x^0| > |C_k x|$. Теперь, полагая $\sigma = \text{sg } C_k x^0$, убеждаемся в справедливости равенств

$$C_k(\sigma x^0 + sx) = |C_k(x^0 + \sigma sx)|, \quad s \in \{-1; 1\}.$$

Поэтому, используя (3), находим, что

$$\begin{aligned} (C_k + C'_k)(\sigma x^0 + sx) &= |C_k(x^0 + \sigma sx)| + C'_k \sigma(x^0 + \sigma sx) \\ &\geq |C_k(x^0 + \sigma sx)| - \|C'\|_\infty \|x^0 + \sigma sx\|_1 \\ &> |C_k(x^0 + \sigma sx)| - \beta_k(x^0, x, \sigma s) \|x^0 + \sigma sx\|_1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, находим, что

$$(C_k + C'_k)\sigma x^0 > (C_k + C'_k)sx, \quad s \in \{-1; 1\}.$$

Отсюда, вследствие указанной выше импликации (1), получаем, что

$$|(C_k + C'_k)x^0| > |(C_k + C'_k)x|,$$

что влечет включение $x^0 \in P^m(C + C')$.

Резюмируя выше сказанное, заключаем, что для всякой матрицы $C' \in \Omega(\varphi)$ решение $x^0 \in P^m(C + C')$. Следовательно, $\rho^m(x^0, C) \geq \varphi$.

Остается доказать, что $\rho^m(x^0, C) \leq \varphi$. Прежде всего отметим, что в силу конечности числа φ минимум $\alpha(x^0, x)$ на множестве $X \setminus \{x^0\}$ не может достигаться на решении $x = \mathbf{0}^{(n)}$ ввиду того, что $\alpha(x^0, \mathbf{0}^{(n)}) = \infty$. Поэтому в соответствии с определением числа φ существует такое решение $x^* \in X \setminus \{x^0\}$, отличное от $\mathbf{0}^{(n)}$, что для всякого индекса $i \in K(x^0, x^*)$ выполняется неравенство

$$\alpha_i(x^0, x^*) \leq \varphi. \quad (4)$$

Пусть $\varepsilon > \varphi$. Покажем, что существует матрица $C' \in \Omega(\varepsilon)$ такая, что $x^0 \notin P^m(C + C')$. Положим

$$N(x^0, x^*) = |\{j \in N_n : x_j^0 = 1 \text{ \& } x_j^* = 0\}|, \quad \sigma^0 = \text{sg } C_i x^0, \quad \sigma^* = \text{sg } C_i x^*.$$

Легко видеть, что хотя бы одно из чисел $N(x^*, x^0)$ или $N(x^0, x^*)$ положительно и ввиду того, что $x^* \neq \mathbf{0}^{(n)}$

$$N(x^0, x^*) < \|x^0 + x^*\|_1. \quad (5)$$

Для построения строк C'_i , $i \in N_m$, необходимой матрицы C' , рассмотрим четыре возможных случая.

В первом случае $i \in K(x^0, x^*)$, $\beta_i(x^0, x^*, -1) < \beta_i(x^0, x^*, 1)$. Тогда

$$0 < \beta_i(x^0, x^*, 1) \leq \frac{|C_i x^0| + |C_i x^*|}{\|x^0 + x^*\|_1} \quad (6)$$

и согласно (4) существует такое число $\delta_i < \varepsilon$, что выполняются неравенства

$$0 \leq \beta_i(x^0, x^*, -1) < \delta_i < \beta_i(x^0, x^*, 1). \quad (7)$$

Отсюда, полагая $C'_i = (c'_{i1}, c'_{i2}, \dots, c'_{in})$, где

$$c'_{ij} = \begin{cases} -\sigma^0 \delta_i, & \text{если } x_j^0 = 1, x_j^* = 0, \\ \sigma^* \delta_i, & \text{если } x_j^0 = 0, x_j^* = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (8)$$

находим, что $\|C'_i\|_\infty = \delta_i$ и

$$\begin{aligned} (C_i + C'_i)\sigma^* x^* - (C_i + C'_i)\sigma^0 x^0 &= |C_i x^*| - |C_i x^0| + \delta_i(N(x^*, x^0) + N(x^0, x^*)) \\ &\geq -|C_i(x^0 - x^*)| + \delta_i \|x^0 - x^*\|_1 \\ &> -|C_i(x^0 - x^*)| + \beta_i(x^0, x^*, -1) \|x^0 - x^*\|_1 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$(C_i + C'_i)\sigma^* x^* + (C_i + C'_i)\sigma^0 x^0 = |C_i x^*| + |C_i x^0| + \delta_i(N(x^*, x^0) - N(x^0, x^*)). \quad (10)$$

Правую часть равенства (10) обозначим ψ . Если $N(x^0, x^*) = 0$, то ввиду (6) $\psi > 0$. Если $N(x^0, x^*) > 0$, то, учитывая (5), (6) и (7), находим, что

$$\delta_i N(x^0, x^*) < |C_i x^0| + |C_i x^*|.$$

Поэтому $\psi > \delta_i N(x^*, x^0) \geq 0$.

Итак, $\psi > 0$ и ввиду (9) и (10)

$$(C_i + C'_i)\sigma^* x^* > (C_i + C'_i)s\sigma^0 x^0, \quad s \in \{-1; 1\}.$$

Отсюда с учетом (1) находим, что

$$|(C_i + C'_i)x^*| > |(C_i + C'_i)x^0|. \quad (11)$$

Заметим, что неравенство (11) согласуется с условием $x^* \neq \mathbf{0}^{(n)}$.

Во втором случае $i \in K(x^0, x^*)$, $\beta_i(x^0, x^*, -1) > \beta_i(x^0, x^*, 1)$. Тогда согласно (4) найдется такое число $\delta_i < \varepsilon$, что справедливы неравенства

$$0 \leq \beta_i(x^0, x^*, 1) < \delta_i < \beta_i(x^0, x^*, -1).$$

Отсюда, полагая $C'_i = (-\sigma^0 \delta_i, -\sigma^0 \delta_i, \dots, -\sigma^0 \delta_i) \in \mathbf{R}^n$, получаем, что $\|C'_i\|_\infty = \delta_i$ и

$$\begin{aligned} -(C_i + C'_i)\sigma^0 x^* - (C_i + C'_i)\sigma^0 x^0 &= -C_i \sigma^0 (x^0 + x^*) + \delta_i (\|x^0\|_1 + \|x^*\|_1) \\ &> -|C_i(x^0 + x^*)| + \beta_i(x^0, x^*, 1) \|x^0 + x^*\|_1 = 0, \\ -(C_i + C'_i)\sigma^0 x^* + (C_i + C'_i)\sigma^0 x^0 &= C_i \sigma^0 (x^0 - x^*) - \delta_i (\|x^0\|_1 - \|x^*\|_1) \\ &= |C_i(x^0 - x^*)| - \delta_i (\|x^0\|_1 - \|x^*\|_1) \\ &> |C_i(x^0 - x^*)| - \beta_i(x^0, x^*, -1) \|x^0 - x^*\|_1 = 0. \end{aligned}$$

Итак, верны неравенства

$$-(C_i + C'_i)\sigma^0 x^* > (C_i + C'_i)s\sigma^0 x^0, \quad s \in \{-1; 1\},$$

которые благодаря (1) вновь приводят к (11).

В третьем случае $i \in K(x^0, x^*)$, $\beta_i = \beta_i(x^0, x^*, -1) = \beta_i(x^0, x^*, 1) = \alpha_i(x^0, x^*)$. Тогда

$$\beta_i \leq \frac{|C_i x^0| + |C_i x^*|}{\|x^0 + x^*\|_1}. \quad (12)$$

Рассмотрим два варианта.

Пусть сначала $\beta_i = 0$. Тогда легко видеть, что

$$C_i x^0 = C_i x^* = 0. \quad (13)$$

Если $N(x^*, x^0) > 0$, то, задавая компоненты вектора $C'_i = (c'_{i1}, c'_{i2}, \dots, c'_{in})$ по правилу

$$c'_{ij} = \begin{cases} \delta_i, & \text{если } x_j^* = 1, x_j^0 = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 \leq \varphi < \delta_i < \varepsilon$, убеждаемся, что $\|C'_i\|_\infty = \delta_i$ и ввиду (13) верно неравенство (11).

Если $N(x^*, x^0) = 0$, то $N(x^0, x^*) > 0$, и поэтому, учитывая, что $x^* \neq \mathbf{0}^{(n)}$, можно выбрать два таких индекса $k, p \in N_n$ такие, что $x_k^* = x_k^0 = 1$, $x_p^* = 0$, $x_p^0 = 1$. Тогда, задавая компоненты вектора $C'_i = (c'_{i1}, c'_{i2}, \dots, c'_{in})$ по правилу

$$c'_{ij} = \begin{cases} \delta_i, & \text{если } j = k, \\ -\delta_i/2, & \text{если } j = p, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 \leq \varphi < \delta_i < \varepsilon$, вновь убеждаемся, что ввиду (13) верно неравенство (11), причем $\|C'_i\|_\infty = \delta_i$.

Пусть теперь $\beta_i > 0$. Полагая

$$\beta_i < \delta_i < \varepsilon, \quad (14)$$

построим строку C'_i по формуле (8). Тогда $\|C'_i\|_\infty = \delta_i$ и верны соотношения (9) и (10). Как и в первом случае, покажем, что $\psi > 0$. Если $N(x^0, x^*) = 0$, то согласно (12) $\psi > 0$. Если $N(x^0, x^*) > 0$, то с учетом (5) и (12) на число δ_i дополнительно к условию (14) можно наложить требование

$$\delta_i N(x^0, x^*) < |C_i x^0| + |C_i x^*|.$$

Поэтому (см. первый случай) $\psi > \delta_i N(x^*, x^0) \geq 0$. Следовательно, справедливо неравенство (11).

Наконец, в четвертом случае $i \in N_m \setminus K(x^0, x^*)$. Тогда, полагая $C'_i = \mathbf{0}^{(n)}$, вновь получаем (11).

В результате всех этих построений получаем матрицу $C' \in \Omega(\varepsilon)$, причем

$$\|C'\|_\infty = \max\{\delta_i : i \in N_m\} < \varepsilon.$$

Резюмируя, заключаем, что существует матрица $C' \in \Omega(\varepsilon)$ такая, что выполняется условие $x^0 \notin P^m(C + C')$, если $\varepsilon > \varphi$. Следовательно, $\rho^m(x^0, C) \leq \varphi$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если $x^0 \in P^m(C)$, $0^{(n)} \notin X \setminus \{x^0\}$, то

$$\rho^m(x^0, C) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \max_{i \in K(x^0, x)} \min \left\{ \frac{|C_i(x^0 + sx)|}{\|x^0 + sx\|_1} : s \in \{-1, 1\} \right\}.$$

Следствие 2. Пусть $x^0 \in P^m(C)$. Тогда $\rho^m(x^0, C) = \infty$ в том и только том случае, когда $X \setminus \{x^0\} = \{0^{(n)}\}$.

Решение x^0 векторной задачи $Z^m(C)$ назовем устойчивым, если $\rho^m(x^0, C) > 0$, и строго эффективным (оптимальным по Смейлу), если среди других решений не существует такого решения x' , что для любого индекса $i \in N_m$ выполняется неравенство $|C_i x'| \geq |C_i x^0|$. Следующий критерий с очевидностью вытекает из теоремы 1.

Следствие 3. При условии $X \neq \{x^0, 0^{(n)}\}$ решение $x^0 \in P^m(C)$ устойчиво в том и только том случае, когда оно строго эффективно.

Следствие 4. Если $x^0 = 0^{(n)} \in P^m(C)$, то $\rho^m(x^0, C) = 0$.

Список литературы

1. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., О радиусе устойчивости эффективного решения одной векторной задачи булева программирования в метрике l_1 . Доклады РАН (2005) **401**, №6, 733–735.
2. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Анализ устойчивости строго эффективного решения одной векторной задачи булева программирования в метрике l_1 . Дискретная математика (2004) **16**, №4, 14–19.
3. Emelichev V. A., Krichko V. N., Nikulin Yu. V., The stability radius of an efficient solution in minimax Boolean programming problem. Control Cybernet. (2004) **33**, №1, 127–132.
4. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М., Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации. Автоматика и телемеханика (2004) **65**, №2, 79–92.

Статья поступила 15.12.2005.

Переработанный вариант поступил 25.01.2006.