Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Случайные свободные деревья и леса с ограничениями на кратности вершин, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 4, 117–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:55:53

Случайные свободные деревья и леса с ограничениями на кратности вершин

© 2004 г. А. Н. Тимашёв

Рассматриваются свободные (некорневые) деревья с n занумерованными вершинами, кратности которых принимают значения из некоторого фиксированного подмножества A множества целых неотрицательных чисел такого, что A содержит нуль, $A \neq \{0\}$, $A \neq \{0, 1\}$ и наибольший общий делитель чисел $\{k \mid k \in A\}$ равен единице. Получена асимптотика числа всех таких деревьев при $n \rightarrow \infty$. В предположении, что на множестве этих деревьев задано равномерное распределение, для случайной величины $\mu_r^{(A)}$ ($r \in A$), равной числу вершин кратности r в случайно выбранном дереве, найдены асимптотики математического ожидания и дисперсии при $n \rightarrow \infty$, а также доказаны локальная нормальная и пуассоновская теоремы для распределения вероятностей этой случайной величины. Для случая $A = \{0, 1\}$ получены оценки чисел всех лесов с n занумерованными вершинами, состоящих из N свободных деревьев, при $n \rightarrow \infty$ и различных предположениях о функции $N = N(n)$. Найдена асимптотика числа всех лесов из свободных деревьев с n вершинами, кратности которых не превосходят 1. Доказаны локальные нормальные и пуассоновские теоремы для числа деревьев заданного объема и общего числа деревьев в случайном лесе такого типа. Получены предельные теоремы, оценивающие распределение вероятностей случайной величины, равной объему дерева, содержащего вершину с фиксированным номером.

Рассмотрим свободное (некорневое) дерево с n занумерованными вершинами. Число d_n всех таких деревьев определяется формулой Кэли [1]

$$d_n = n^{n-2}. \quad (1)$$

Как обычно, степень вершины дерева будем называть число инцидентных ей ребер. Кратность вершины на единицу меньше ее степени. Если $k_1, \dots, k_n$ -- кратности вершин свободного дерева с n вершинами, $n \geq 2$, то

$$k_1 + \dots + k_n = n - 2. \quad (2)$$

Согласно алгоритму Прюфера [1] количество свободных деревьев с n вершинами, занумерованными числами $1, 2, \dots, n$, с кратностями $k_1, \dots, k_n$ соответственно, при условии (2) равно

$$\frac{(n-2)!}{k_1! \dots k_n!}. \quad (3)$$

В формуле (3) $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{N}_0$, где $\mathbf{N}_0$ — множество всех целых неотрицательных чисел. Пусть A — непустое подмножество $\mathbf{N}_0$. Всюду далее будем предполагать, что A фиксировано, то есть выбор множества A не зависит от n .

Пусть $d_n(A)$ — число всех свободных деревьев на n вершинах, имеющих кратности, принадлежащие A . Тогда согласно (3)

$$d_n(A) = (n-2)! \sum_{k_1 + \dots + k_n = n-2, k_1, \dots, k_n \in A} \frac{1}{k_1! \dots k_n!}. \quad (4)$$

Если, в частности, $A = \mathbf{N}_0$, то из (4) следует (1), то есть

$$d_n(\mathbf{N}_0) = d_n = n^{n-2}.$$

Заметим, что если $0 \notin A$, то $d_n(A) = 0$, поскольку в любом дереве с конечным числом вершин $k_1 \dots k_n = 0$.

Допустим, что множество A удовлетворяет следующим условиям:

$$0 \in A, \quad A \neq \{0\}, \quad A \neq \{0, 1\}, \quad (5)$$

$$\gcd\{k \mid k \in A\} = 1, \quad (6)$$

где $\gcd\{\cdot\}$ — наибольший общий делитель чисел, указанных в скобках.

Из (4) нетрудно получить, что (см. [2])

$$\frac{d_n(A)}{(n-2)!} = \text{coeff}_{z^{n-2}} \{(P_A(z))^n\}, \quad (7)$$

где

$$P_A(z) = \sum_{k \in A} \frac{z^k}{k!}. \quad (8)$$

Из (7) согласно интегральной формуле Коши следует, что

$$d_n(A) = \frac{(n-2)!}{2\pi i} \oint \frac{(P_A(z))^n}{z^{n-1}} dz, \quad (9)$$

где интегрирование осуществляется по окружности с центром в нуле, пробегаемой в положительном направлении.

Далее будем считать, что все $d_n(A)$ деревьев рассматриваемого типа имеют одинаковые вероятности, равные $(d_n(A))^{-1}$. Пусть $\mu_r^{(A)}$, $r \in A$, — число вершин кратности r в случайно выбранном дереве. Если $A = \mathbf{N}_0$, то случайная вершина $\mu_r^{(A)}$ совпадает с числом ячеек, содержащих ровно r частиц каждая, при случайном равновероятном размещении $n-2$ различных частиц по n различным ячейкам, и ее предельные распределения хорошо изучены (см. [3]). В общем случае, с использованием (9) и метода перевала, в работе получена оценка чисел $d_n(A)$, найдены асимптотики математического ожидания и дисперсии случайной величины $\mu_r^{(A)}$ при $n \rightarrow \infty$ и условиях (5), (6), а также доказаны локальная нормальная и пуассоновская теоремы для распределения вероятностей этой случайной величины. Если $A = \{0, 1\}$, то согласно (7)–(9)

$$P_A(z) = 1 + z$$

и при $n \geq 2$

$$d_n(A) = \frac{n!}{2}. \quad (10)$$

При $n = 1$

$$d_1(A) = 1. \quad (11)$$

Согласно (10) и (11) при $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(A)}{n!} z^n = \frac{1}{2} z (1 + (1 - z)^{-1}),$$

и если $L_N(n)$ — число всех лесов с n занумерованными вершинами, состоящих из N свободных деревьев с кратностями вершин, не превосходящими 1 (деревья без веток), то согласно [1]

$$\sum_{n=N}^{\infty} L_N(n) \frac{z^n}{n!} = \frac{z^N}{2^N N!} (1 + (1 - z)^{-1})^N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} L_N(n) &= \frac{n!}{2^N N!} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1 + (1 - z)^{-1})^N}{z^{n-N+1}} dz \\ &= \frac{n!}{2^N N!} \text{coeff}_{z^{n-N}} \{(1 + (1 - z)^{-1})^N\}, \quad N = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

Интегрирование в (12) осуществляется по окружности с центром в нуле радиуса, меньшего 1, пробегаемой в положительном направлении.

Пусть $L(n)$ — число всех лесов с n занумерованными вершинами, состоящих из свободных деревьев с кратностями вершин, не превосходящими 1. Тогда из (12) следует, что

$$L(n) = \sum_{N=1}^n L_N(n) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{\exp((z/2)(1 + (1 - z)^{-1}))}{z^{n+1}} dz. \quad (13)$$

Интегрирование в (13) производится по тому же пути, что и в (12).

В работе получены асимптотические оценки чисел $L(n)$ и $L_N(n)$ при $n \rightarrow \infty$ и $N = N(n)$, где функция $N(n)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

$$N \in \mathbb{N} \text{ фиксировано}; \quad (14)$$

$N \rightarrow \infty$ так, что

$$n - N = o(\sqrt{n}) \geq 0; \quad (15)$$

$N \rightarrow \infty$ так, что

$$1 < \beta_0 \leq \beta = n/N \leq \beta_1 < \infty, \quad (16)$$

где β_0, β_1 — постоянные;
 $N \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha = N/\sqrt{n} \leq \alpha_1 < \infty, \quad (17)$$

где α_0, α_1 — постоянные.

В предположении, что все $L(n)$ лесов рассматриваемого типа имеют одинаковые вероятности, равные $(L(n))^{-1}$, на основе полученных оценок доказаны предельные теоремы пуассоновского типа для случайной величины $\eta_r(n)$, равной числу деревьев объема r в случайно выбранном лесе, а также локальная нормальная теорема, оценивающая распределение вероятностей случайной величины ν_n , равной общему числу деревьев в таком лесе.

Далее рассматривается случайная величина $\eta_r(n, N)$, равная числу свободных деревьев объема r в случайном лесе указанного типа с n отмеченными вершинами, содержащем N деревьев (все такие леса считаются имеющими одинаковые вероятности, равные $(L_N(n))^{-1}$). Приводятся точные формулы для факториальных моментов этой случайной величины, с помощью которых найдены достаточные условия сходимости распределения $\eta_r(n, N)$ к пуассоновскому закону, справедливые в трех различных областях изменения параметров $n, N \rightarrow \infty$, а также к нормальному закону (в локальном варианте). Для случая, когда $A = \mathbb{N}_0$, асимптотические оценки величин $L_N(n)$ и условия такого типа ранее были получены в [4, 5]. Заметим, что использовавшиеся в [4, 5] методы, как правило, отличны от применяемых нами методов при доказательствах соответствующих утверждений (в идейном плане общим приемом является использование обобщенной схемы размещения [6]).

Пусть ξ_n — число вершин свободного дерева, содержащего вершину с фиксированным номером, в определенном выше случайном лесе с n занумерованными вершинами, и пусть величина $\xi(n, N)$ имеет тот же смысл для аналогичного случайного леса с n занумерованными вершинами и N свободными деревьями. В заключительной части работы доказаны предельные теоремы, оценивающие распределения вероятностей случайных величин ξ_n и $\xi(n, N)$.

Теорема 1. Пусть $n \rightarrow \infty$ и выполняются условия (5), (6). Тогда

$$d_n(A) = \frac{n^{n-2} e^{-n}}{\sqrt{P_A''(z_1)}} (P_A(z_1))^{n+1/2} z_1^{-(n-1)} (1 + O(n^{-1})), \quad (18)$$

где функция $P_A(z)$ определена в (8) и $z = z_1$ — единственный положительный корень уравнения

$$z P_A'(z) (P_A(z))^{-1} = 1. \quad (19)$$

Доказательство. Справедливость оценки (18) устанавливается с помощью метода перевала в варианте, изложенном на стр. 194 в [7], если учесть, что согласно (5) свободный член в разложении (8) равен 1. При условиях теоремы 1 $\max_{|z|=z_1} |P_A(z)|$ достигается только при $z = z_1$.

Нетрудно проверить также, что z_1 — точка перевала первого порядка функции

$$\omega_1(z) = \ln P_A(z) - \ln z$$

(для логарифма выбираем ту непрерывную ветвь, которая принимает вещественные значения на вещественной положительной полуоси), поскольку согласно (19)

$$\omega'_1(z_1) = 0, \quad \omega''_1(z_1) = P''_A(z_1)(P_A(z_1))^{-1} > 0.$$

Существование и единственность положительного корня уравнения (19) следуют из условий (5) и того факта, что функция

$$f(z) = zP'(z)(P_A(z))^{-1}$$

непрерывна и строго возрастает от 0 до $\sup A > 1$ при возрастании z от 0 до бесконечности.

Таким образом, в силу (6) интеграл в (9) асимптотически, с точностью до множителя $1 + O(n^{-1})$, равен вкладу точки перевала $z = z_1$. Вычисляя этот вклад стандартными методами, учитывая (9) и используя формулу Стирлинга, получаем (18).

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При условиях теоремы 1 остаточный член $O(n^{-1})$ в (18) можно заменить на асимптотический степенной ряд вида $\sum_{m=1}^{\infty} A_m n^{-m}$, в котором коэффициенты A_m не зависят от n . Вычисление этих коэффициентов, как правило, приводит к громоздким выкладкам. Для простоты изложения ограничимся случаем $m = 1$. В этом случае можно показать, что

$$A_1 = \frac{13}{12} + \frac{P_A(z_1)P_A'''(z_1)}{z_1(P_A''(z_1))^2} - \frac{2}{g_A(z_1)} + \frac{\alpha_4}{8(g_A(z_1))^2} - \frac{5\alpha_3^2}{24(g_A(z_1))^3}, \quad (20)$$

где

$$g_A(z_1) = z_1^2 P_A''(z_1)(P_A(z_1))^{-1}, \quad (21)$$

$$\alpha_3 = z_1^3 P_A'''(z_1)(P_A(z_1))^{-1}, \quad (22)$$

$$\alpha_4 = z_1^4 P_A^{(4)}(z_1)(P_A(z_1))^{-1} + 2\alpha_3 + g_A(z_1) - 3(g_A(z_1))^2. \quad (23)$$

Таким образом, остаточный член вида $O(n^{-1})$ в (18) можно заменить на сумму $A_1 n^{-1} + O(n^{-2})$, и оценка (18) останется справедливой, если значение A_1 определяется согласно (20)–(23). Заметим, что в формулах (20)–(23)

$$P_A^{(j)}(z_1) = \sum_{k \in A: k \geq j} \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ в условиях теоремы 1

$$\mathbf{E}\mu_r^{(A)} = np_r^{(A)}(z_1)(1 + O(n^{-1})), \quad (24)$$

$$\mathbf{D}\mu_r^{(A)} = n\sigma_r^2(1 + O(n^{-1})), \quad (25)$$

где $r \in A$,

$$\sigma_r^2 = p_r^{(A)}(z_1) \left(1 - p_r^{(A)}(z_1) \left(1 + \frac{(r-1)^2}{g_A(z_1)} \right) \right) > 0, \quad (26)$$

значение $g_A(z_1)$ определено в (21) и

$$p_r^{(A)}(z_1) = \frac{z_1^r}{r! P_A(z_1)}. \quad (27)$$

Доказательство. Заметим, что если $r \in A$, то

$$\mathbf{E}\mu_r^{(A)} = n \binom{n-2}{r} \frac{M_{n-2-r}(n-1; A)}{M_{n-2}(n; A)}, \quad (28)$$

где

$$M_n(N; A) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{(P_A(z))^N}{z^{n+1}} dz. \quad (29)$$

В частности, согласно (9)

$$M_{n-2}(n; A) = d_n(A). \quad (30)$$

Применяя метод перевала и рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, из (18), (29), (30), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$M_{n-k}(n-l; A) = \frac{(n-k)! d_n(A) z_1^{k-2}}{(n-2)! (P_A(z_1))^l} (1 + O(n^{-1})), \quad k, l = 0, 1, \dots \quad (31)$$

Полагая в (31) $k = r + 2$, $l = 1$, подставляя получившееся значение $M_{n-r-2}(n-1; A)$ в (28) и учитывая (27), (30), выводим (24).

Далее, аналогично (28),

$$\mathbf{E}\mu_r^{(A)} (\mu_r^{(A)} - 1) = n(n-1) \binom{n-2}{r} \binom{n-2-r}{r} \frac{M_{n-2-2r}(n-2; A)}{M_{n-2}(n; A)}.$$

Согласно (27), (31) отсюда следует, что

$$\mathbf{E}\mu_r^{(A)} (\mu_r^{(A)} - 1) = n^2 (p_r^{(A)}(z_1))^2 (1 + O(n^{-1})).$$

Однако для нахождения асимптотики дисперсии $\mathbf{D}\mu_r^{(A)}$ этих равенств недостаточно, поскольку из них с учетом (24) следует только, что

$$\mathbf{D}\mu_r^{(A)} = O(n).$$

Чтобы получить (25), (26), нужно найти асимптотику чисел $M_{n-2-r}(n-1; A)$, $M_{n-2-2r}(n-2; A)$ с остаточными членами порядка $O(n^{-2})$. Соответствующие (достаточно громоздкие) выкладки мы опускаем.

Покажем, что $\sigma_r^2 > 0$. Рассмотрим случайную величину ξ_1 , для которой

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = p_k^{(A)}(z_1) > 0, \quad k \in A.$$

Легко подсчитать, что

$$\mathbf{E}\xi_1 = \frac{z_1 P'_A(z_1)}{P_A(z_1)} = 1$$

в силу (19) и

$$\mathbf{D}\xi_1 = g_A(z_1) > 0$$

согласно (5), (21).

Далее, рассмотрим случайную величину $\xi_1^{(r)}$, $r \in A$, для которой

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\} \\ &= \frac{z_1^k}{k! (P_A(z_1) - z_1^r/r!)} > 0, \quad k \in A, \quad k \neq r. \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что с учетом (26)

$$\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \frac{1 - rp_r^{(A)}(z_1)}{1 - p_r^{(A)}(z_1)}. \quad (32)$$

При условиях (5), (6) множество A не может быть двухэлементным, поэтому случайная величина $\xi_1^{(r)}$ имеет невырожденное распределение, то есть $\mathbf{D}\xi_1^{(r)} > 0$. С другой стороны, легко показать, что

$$\mathbf{D}\xi_1^{(r)} = \frac{g_A(z_1)\sigma_r^2}{p_r^{(A)}(z_1)(1 - p_r^{(A)}(z_1))^2}. \quad (33)$$

Следовательно, если $r \in A$ то $\sigma_r^2 > 0$.

Теорема доказана.

Теорема 3. При $n \rightarrow \infty$ в условиях теоремы 1 равномерно относительно целых положительных значений $m = np_r^{(A)}(z_1) + y\sqrt{n}$, для которых величина y заключена в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{\mu_r^{(A)} = m\} = \frac{d_r}{\sqrt{2\pi n\sigma_r^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_r^2}\right) (1 + O(1/\sqrt{n})), \quad (34)$$

где $r \in A$, значение σ_r^2 определено в (26),

$$\begin{aligned} d_0 &= \gcd\{k - \min A_0 \mid k \in A_0\}, \\ d_r &= \gcd\{k \mid k \in A_r\}, \quad r = 1, 2, \dots, \\ A_r &= A \setminus \{r\}, \quad r = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$\gcd\{\cdot\}$ — наибольший общий делитель множества натуральных чисел, стоящего в фигурных скобках.

Доказательство. Для обоснования оценки (34) используем метод, позволяющий свести изучение асимптотического поведения вероятности $\mathbf{P}\{\mu_r^{(A)} = m\}$ к применению классической локальной нормальной предельной теоремы для последовательностей независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин [3]. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, предполагая, что случайная величина ξ_1 имеет указанное в доказательстве теоремы 2 распределение. По локальной нормальной теореме

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_n = n - 2\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n\mathbf{D}\xi_1}} (1 + O(1/\sqrt{n})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n g_A(z_1)}} (1 + O(1/\sqrt{n})). \end{aligned} \quad (35)$$

Далее рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n-m}^{(r)}$, таких, что случайная величина $\xi_1^{(r)}$ имеет указанное выше распределение. При наших условиях из (32) следует, что

$$\frac{n-2-mr}{n-m} = \mathbf{E}\xi_1^{(r)}(1 + O(1/\sqrt{n})),$$

поскольку величина $\mathbf{E}\xi_1^{(r)}$ ограничена.

Применяя локальную нормальную теорему к последовательности $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n-m}^{(r)}$, можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{n-m}^{(r)} = n-2-mr\} &= \frac{d_r}{\sqrt{2\pi n(1-p_r^{(A)}(z_1))\mathbf{D}\xi_1^{(r)}}} \\ &\times \exp\left(-\frac{(r-1)^2 y^2}{2(1-p_r^{(A)}(z_1))^3 \mathbf{D}\xi_1^{(r)}}\right) (1 + O(1/\sqrt{n})), \quad (36) \end{aligned}$$

поскольку случайные величины $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{n-m}^{(r)}$ принимают значения на целочисленной решетке с максимальным шагом d_r .

Согласно локальной теореме Муавра–Лапласа

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} (p_r^{(A)}(z_1))^m (1-p_r^{(A)}(z_1))^{n-m} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n p_r^{(A)}(z_1) (1-p_r^{(A)}(z_1))}} \\ &\times \exp\left(-\frac{y^2}{2 p_r^{(A)}(z_1) (1-p_r^{(A)}(z_1))}\right) (1 + O(1/\sqrt{n})). \quad (37) \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{P}\{\xi_1 = r\} = p_r^{(A)}(z_1)$ при $r \in A$, аналогично тому, как это сделано в [3], получаем, что

$$\mathbf{P}\{\mu_r^{(A)} = m\} = \binom{n}{m} (p_r^{(A)}(z_1))^m (1-p_r^{(A)}(z_1))^{n-m} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{n-m}^{(r)} = n-2-mr\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_n = n-2\}}. \quad (38)$$

Из формул (26), (33), (35)–(38) следует (34). Теорема доказана.

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$ в условиях теоремы 3 случайная величина

$$\frac{\mu_r^{(A)} - n p_r^{(A)}(z_1)}{\sqrt{n \sigma_r^2}}$$

распределена в пределе по нормальному закону.

Теорема 4. Пусть при условиях теоремы 1 A – счетное множество и $r \rightarrow \infty$ и $n = n(r) \rightarrow \infty$ так, что $r \in A$ и $n p_r^{(A)}(z_1) \rightarrow \lambda > 0$. Тогда случайная величина $\mu_r^{(A)}$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ .

Доказательство. Используя (24), получаем, что $\mathbf{E}\mu_r^{(A)} \rightarrow \lambda$. Аналогично (28) можно утверждать, что при $j = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}(\mu_r^{(A)})_j = \frac{n!(n-2)!}{(n-j)!(n-2-rj)!(r!)^j} \frac{M_{n-2-rj}(n-j; A)}{d_n(A)}, \quad (39)$$

где значение $M_{n-2-rj}(n-j; A)$ определяется в (29) с заменой n на $n-2-rj$ и N на $n-j$. Поскольку при наших условиях $r \ln r \sim \ln n$, то $r \sim \ln n / \ln \ln n$, и поэтому при $k = 2 + rj$ и $l = j$ формула (31) остается справедливой с заменой остаточного члена вида $O(n^{-1})$ на $o(1)$. Следовательно,

$$M_{n-2-rj}(n-j; A) = \frac{(n-2-rj)! z_1^{rj} d_n(A)}{(n-2)!(P_A(z_1))^j} (1 + o(1)). \quad (40)$$

Из (27), (39), (40) получаем, что

$$\mathbf{E}(\mu_r^{(A)})_j = (np_r^{(A)}(z_1))^j (1 + o(1)) = \lambda^j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Теорема 4 доказана.

Всюду далее будем предполагать, что $A = \{0, 1\}$. Если $|z| < 1$, то

$$(1 + (1 - z)^{-1})^N = \left(2 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k\right)^N$$

и при $N = 1, \dots, n-1$

$$\text{coeff}_{z^{n-N}} \{(1 + (1 - z)^{-1})^N\} = \sum_{m=\max\{0, 2N-n\}}^{N-1} \binom{N}{m} 2^m \binom{n-N-1}{N-m-1}. \quad (41)$$

Предложение 1. Пусть $n \rightarrow \infty$ и выполнено условие (14), тогда

$$L_N(n) = \frac{n! n^{N-1}}{2^N N! (N-1)!} (1 + O(n^{-1})). \quad (42)$$

Доказательство. При всех достаточно больших значениях n справедливо неравенство $N < n/2$, и поэтому в сумме (41) будет N слагаемых. Следовательно, при фиксированном $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{coeff}_{z^{n-N}} \{(1 + (1 - z)^{-1})^N\} &= \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N}{m} 2^m \frac{n^{N-m-1}}{(N-m-1)!} (1 + O(n^{-1})) \\ &= \frac{n^{N-1}}{(N-1)!} (1 + O(n^{-1})), \end{aligned}$$

и оценка (42) следует из (12). Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ и выполнено условие (16), тогда равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$L_N(n) = \frac{n! (\beta^2 + 4\beta - 4)^{-1/4} (1 - z_0/2)^N}{N! \sqrt{2\pi(n-N)} z_0^{n-N} (1 - z_0)^N} (1 + O(n^{-1})), \quad (43)$$

где

$$z_0 = \frac{3\beta - 2 - \sqrt{\beta^2 + 4\beta - 4}}{2(\beta - 1)} \in (0, 1). \quad (44)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что $0 < z_0 < 1$ при $\beta > 1$. Используем (12), интегрируя по окружности $|z| = z_0$, пробегаемой в положительном направлении. Из (12) следует, что

$$L_N(n) = \frac{n!}{2^N N!} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=z_0} \varphi(z) \exp(N\omega_0(z)) dz,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= z^{-1}, \\ \omega_0(z) &= \ln(1 + (1 - z)^{-1}) - (\beta - 1) \ln z. \end{aligned}$$

При этом согласно (44)

$$\begin{aligned} \omega'_0(z_0) &= 0, \\ \omega''_0(z_0) &= z_0^{-2}(\beta - 1)\sqrt{\beta^2 + 4\beta - 4} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, z_0 — точка перевала первого порядка функции ω_0 . Кроме того, $\max_{|z|=z_0} |1 + (1 - z)^{-1}|$ достигается только при $z = z_0$. Дальнейшие рассуждения, имеющие целью обоснование оценки (43), аналогичны проведенным при доказательстве теоремы 1. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (15), то

$$L_N(n) = \frac{n^{2(n-N)}}{2^{n-N}(n-N)!} (1 + o(1)). \quad (45)$$

Доказательство. Допустим сначала, что величина $n - N$ ограничена. Тогда согласно (41) при $N \leq n - 1$

$$\begin{aligned} \text{coeff}_{z^{n-N}} \{(1 + (1 - z)^{-1})^N\} &= \sum_{m=2N-n}^{N-1} \binom{N}{m} 2^m \binom{n-N-1}{N-m-1} \\ &= \frac{N^{n-N} 2^{2N-n}}{(n-N)!} (1 + O(n^{-1})), \end{aligned}$$

и оценка (45) следует из (12).

Пусть $n - N \rightarrow \infty$, тогда из (15) выводим, что

$$\beta = n/N = 1 + o(1/\sqrt{N}), \quad (\beta - 1)N \rightarrow \infty.$$

Полагая $\varepsilon_N = \beta - 1$, легко находим, что

$$\varepsilon_N > 0, \quad \varepsilon_N = o(1/\sqrt{N}), \quad N\varepsilon_N \rightarrow \infty.$$

Вычисляя значение z_0 согласно (44), после элементарных преобразований приходим к равенству

$$z_0 = 2\varepsilon_N - 6\varepsilon_N^2 + O(\varepsilon_N^3). \quad (46)$$

Из (46) с учетом соотношений

$$N\varepsilon_N = n - N, \quad N\varepsilon_N^2 = o(1)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} N(\ln(1 - (z_0/2)) - \ln(1 - z_0) - \varepsilon_N \ln z_0) \\ = (n - N)(1 - \ln 2 - \ln(n - N) + \ln N) + o(1). \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в (43), используя формулу Стирлинга для $(n - N)!$ и замечая, что при условии (15)

$$\frac{n!}{N!} = \left(\frac{n^2}{N}\right)^{n-N} (1 + o(1)),$$

получаем (45). Предложение 3 доказано.

Предложение 4. Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (17), то равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$L_N(n) = (n - 1)! 2^{-N} \alpha^{-2N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(2N + \frac{\alpha^2}{2} - 1\right) (1 + o(1)). \quad (47)$$

Доказательство. При наших условиях

$$\beta = \frac{n}{N} = \frac{\sqrt{n}}{\alpha} \rightarrow \infty$$

и уравнение для определения точки перевала имеет вид

$$\frac{z}{(1 - z)(2 - z)} = \beta - 1 = \frac{\sqrt{n}}{\alpha} - 1.$$

Для каждого $n > \alpha^2$ оно имеет единственный корень $z = z_n^* \in (0, 1)$. При $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$z_n^* = 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} + \frac{\alpha^2}{n} + O(1/n^{3/2}).$$

Из этого соотношения и (17) следует, что

$$(1 + (1 - z_n^*)^{-1})^N (z_n^*)^{-(n-N+1)} = N^N \alpha^{-2N} \exp\left(N + \frac{\alpha^2}{2}\right) (1 + o(1)).$$

Кроме того,

$$\omega_0''(z_n^*) = \frac{n}{\alpha^2} (1 + o(1)),$$

где функция ω_0 определена при доказательстве предложения 2. С использованием полученных оценок формула (47) выводится аналогично (43). Предложение 4 доказано.

Предложение 5. При $n \rightarrow \infty$

$$L(n) = n! (2en)^{-3/4} \exp(\sqrt{2n})(1 + o(1)). \quad (48)$$

Доказательство. Чтобы получить (48), используем (13). Справедливо равенство

$$L(n) = \frac{n!}{2\pi i} \oint z^{-1} \exp(n\omega(z)) dz,$$

где

$$\omega(z) = \frac{z}{2n} (1 + (1 - z)^{-1}) - \ln z$$

и

$$\omega'(z) = \frac{1}{2n} (1 + (1 - z)^{-2}) - z^{-1} = 0,$$

если

$$z(1 + (1 - z)^{-2}) = 2n. \quad (49)$$

Уравнение (49) при любом $n = 1, 2, \dots$ имеет единственный корень $z = z_n \in (0, 1)$.

Нетрудно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$z_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n\sqrt{2n}} + o(n^{-3/2}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_n^{-n} &= \exp(\sqrt{n/2})(1 + o(1)), \\ \frac{z_n}{2(1 - z_n)} &= \sqrt{n/2} - 1/4 + o(1), \\ \omega''(z_n) &= 2\sqrt{2n}(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Из этих оценок и (13) с помощью стандартных рассуждений выводим (48). Предложение 5 доказано.

Замечание 2. Если положить $l_n = L(n)/n!$, $n = 0, 1, \dots$, то согласно (13) при $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n z^n = \exp((z/2)(1 + (1 - z)^{-1})).$$

Из этого соотношения нетрудно получить, что числа l_n удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям

$$l_n = \frac{l_{n-1}}{n} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} (1 - k/n) l_k, \quad n = 2, 3, \dots,$$

с начальными условиями $l_0 = l_1 = 1$. При $n \rightarrow \infty$ согласно (48)

$$l_n = (2en)^{-3/4} \exp(\sqrt{2n})(1 + o(1)).$$

Теорема 5. При $n \rightarrow \infty$ случайная величина $\eta_r(n)$, $r = 2, 3, \dots$, распределена в пределе по закону Пуассона с параметром $1/2$. Случайная величина $\eta_1(n)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром 1.

Доказательство. Факториальные моменты случайной величины $\eta_r(n)$ имеют вид

$$\mathbf{E}(\eta_r(n))_j = \frac{n! (L_1(r))^j L(n-rj)}{(n-rj)! (r!)^j L(n)}, \quad r, j = 1, 2, \dots, \quad rj \leq n. \quad (50)$$

Если $r \geq 2$, то согласно (10)

$$L_1(r) = d_r(A) = \frac{r!}{2},$$

где $A = \{0, 1\}$. При $n \rightarrow \infty$ из (48) следует, что

$$\frac{L(n-rj)}{L(n)} = \frac{(n-rj)!}{n!} (1 + o(1)).$$

Подставляя эти оценки в (50), получаем, что при $r \geq 2$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(\eta_r(n))_j = 2^{-j} (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Если же $r = 1$, то согласно (11) $L_1(1) = d_1(A) = 1$, и поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(\eta_1(n))_j = 1 + o(1), \quad j = 1, 2, \dots$$

Теорема доказана.

Теорема 6. При $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно целых положительных значений $N = \sqrt{n/2} + x(n/8)^{1/4}$, для которых величина x лежит в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2/n)^{1/4} e^{-x^2/2} (1 + o(1)). \quad (51)$$

Доказательство. Полагая

$$\alpha = \frac{N}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{x}{(2n)^{1/4}} \right)$$

и используя (47), нетрудно получить оценку

$$L_N(n) = (n-1)! \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(\sqrt{2n} - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4} \right) (1 + o(1)). \quad (52)$$

Из формулы

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{L_N(n)}{L(n)}$$

и соотношений (48), (52) следует (51).

Теорема 6 доказана.

Замечание 3. Можно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}v_n = \sqrt{\frac{n}{2}} (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{D}v_n = \sqrt{\frac{n}{8}} (1 + o(1)).$$

С учетом этих равенств и (51) получаем, что случайная величина $(v_n - \sqrt{n/2})/(n/8)^{1/4}$ распределена в пределе при $n \rightarrow \infty$ по стандартному нормальному закону.

Теорема 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N^2/n \rightarrow \lambda > 0$. Тогда случайная величина $\eta_r(n, N)$, $r = 2, 3, \dots$, распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ . Случайная величина $\eta_1(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром 2λ .

Доказательство. Факториальные моменты случайной величины $\eta_r(n, N)$ имеют вид [8]

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = \frac{n! (L_1(r))^j L_{N-j}(n-rj)}{(n-rj)! (r!)^j L_N(n)}, \quad r, j = 1, 2, \dots, \quad (r-1)j \leq n-N. \quad (53)$$

Если $\alpha = N/\sqrt{n}$, то $\alpha^2 = \lambda + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ и справедлива оценка (47). Используя (10), (11), (47), (53), при $r \geq 2$ получаем, что

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = \alpha^{2j} (1 + o(1)) = \lambda^j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

При $r = 1$ аналогично доказывается, что

$$\mathbf{E}(\eta_1(n, N))_j = 2^j \alpha^{2j} (1 + o(1)) = (2\lambda)^j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Пусть $n, N, r \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (16) и

$$(n-N)z_0^r(z_0^{-1} - 1)^2 \rightarrow \lambda > 0, \quad (54)$$

где z_0 определено в (44). Тогда случайная величина $\eta_r(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ .

Доказательство. Из (54) следует, что

$$r = -\frac{\ln N}{\ln z_0} (1 + o(1)) = O(\ln N),$$

и поэтому оценка (43) при замене N на $N-j$ и n на $n-rj$ останется справедливой, если остаточный член вида $O(n^{-1})$ заменить на $o(1)$. Подставляя оценки чисел $L_N(n)$ и $L_{N-j}(n-rj)$ в (53), приходим к равенствам

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = N^j (1 + (1 - z_0)^{-1})^{-j} z_0^{(r-1)j} (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

В силу (44)

$$\frac{z_0}{(1-z_0)(2-z_0)} = \beta - 1 = \frac{n-N}{N},$$

поэтому согласно (54)

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = (n-N)^j z_0^{rj} (z_0^{-1} - 1)^{2j} (1 + o(1)) = \lambda^j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Теорема 8 доказана.

Теорема 9. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$n(1 - N/n)^{r-1} \rightarrow \frac{\lambda}{2^{r-2}} > 0. \quad (55)$$

Тогда случайная величина $\eta_r(n, N)$, $r = 3, 4, \dots$, распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ .

Доказательство. При $r \geq 3$ и условии (55) $n - N \rightarrow \infty$, и неравенство $(r - 1)j \leq n - N$ будет выполняться при всех достаточно больших значениях n и N , поэтому для таких n и N формула (53) справедлива. Полагая

$$\beta = \frac{n}{N} = 1 + \delta_N,$$

выводим из (55), что

$$\delta_N = \lambda^{1/(r-1)} 2^{-(r-2)/(r-1)} N^{-1/(r-1)} (1 + o(1)).$$

Заменяя в (46) ε_N на $\delta_N = o(1)$, получаем, что

$$z_0 = 2\delta_N (1 + O(\delta_N)) = (2\lambda)^{1/(r-1)} N^{-1/(r-1)} (1 + O(N^{-1/(r-1)})).$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 8, находим, что

$$\mathbf{E}(\eta_r(n, N))_j = N^j (1 + (1 - z_0)^{-1})^{-j} z_0^{(r-1)j} (1 + o(1)) = \lambda^j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Теорема 9 доказана.

Замечание 4. При $r = 2$ и при выполнении условий теоремы 9 случайная величина $\eta_2(n, N)$ асимптотически вырождена в точке $\lambda \in \mathbf{N}$.

Теорема 10. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (16). Тогда равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$ и целых положительных значений $m = Np_r(z_0) + y\sqrt{N}$, для которых величина y лежит в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{\eta_r(n, N) = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} \exp(-(y^2/2\sigma^2)(1 + O(1/\sqrt{N}))), \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} p_r(z_0) &= \frac{z_0^{r-1}(1 - z_0)}{2 - z_0}, \quad r = 2, 3, \dots, \\ p_1(z_0) &= \frac{2(1 - z_0)}{2 - z_0}, \\ \sigma^2 &= p_r(z_0) \left(1 - p_r(z_0) \left(1 + \frac{(\beta - r)^2 z_0}{(\beta - 1)^2 (2 - z_0^2)} \right) \right) > 0, \end{aligned}$$

величина z_0 определена в (44).

Теорема 10 доказывается аналогично теореме 3 (это доказательство в идейном плане не содержит ничего нового, и мы его опускаем).

Замечание 5. Можно показать, что при условиях теоремы 10 равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$\mathbf{E}\eta_r(n, N) = Np_r(z_0(1 + O(1/\sqrt{N}))),$$

$$\mathbf{D}\eta_r(n, N) = N\sigma^2(1 + O(1/\sqrt{N})).$$

Из этих равенств и (56) следует, что случайная величина

$$\frac{\eta_r(n, N) - Np_r(z_0)}{\sqrt{N\sigma^2}}$$

распределена в пределе по стандартному нормальному закону.

Теорема 11. При условиях теоремы 10

$$\mathbf{P}\{\xi(n, N) = k\} = \frac{kz_0^{k-1}(1 - z_0)}{\beta(2 - z_0)}(1 + O(n^{-1})), \quad k = 2, 3, \dots, \quad (57)$$

$$\mathbf{P}\{\xi(n, N) = 1\} = \frac{2(1 - z_0)}{\beta(2 - z_0)}(1 + O(n^{-1})). \quad (58)$$

Доказательство. Согласно определению случайной величины $\xi(n, N)$ справедливы равенства

$$\mathbf{P}\{\xi(n, N) = k\} = \frac{\binom{n-1}{k-1} L_1(k) L_{N-1}(n - k)}{L_N(n)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (59)$$

Из (12), (43), (44) следует, что

$$\frac{L_{N-1}(n - k)}{L_N(n)} = \frac{2(1 - z_0)z_0^{k-1}}{\beta n^{k-1}(2 - z_0)}(1 + O(1/n)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляя эти оценки в (59) и учитывая (10), (11), получаем (57), (58).

Теорема 11 доказана.

Теорема 12. При любом фиксированном $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n < x\sqrt{2n}\} = 1 - (x + 1)e^{-x}. \quad (60)$$

Доказательство. Аналогично (59)

$$\mathbf{P}\{\xi_n = k\} = \frac{\binom{n-1}{k-1} L_1(k) L(n - k)}{L(n)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (61)$$

Утверждение теоремы означает, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность распределений случайных величин $\xi_n/\sqrt{2n}$ слабо сходится к распределению случайной величины ξ , имеющей гамма-распределение с параметром 2, плотностью

$$p_\xi(x) = xe^{-x}, \quad x > 0,$$

и характеристической функцией

$$\varphi_\xi(t) = (1 - it)^{-2}.$$

Таким образом, достаточно убедиться в том, что при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $t \in \mathbf{R}$

$$\varphi_{\xi_n/\sqrt{2n}}(t) = \mathbf{E}(\exp(it\xi_n/\sqrt{2n})) = (1 - it)^{-2}(1 + o(1)). \quad (62)$$

Положим $|u| = 1$ и $|z| = z_n \in (0, 1)$, где z_n — корень уравнения (49), тогда $0 < |uz| = z_n < 1$, и поэтому согласно (13), (61)

$$\mathbf{E}u^{\xi_n} = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{\xi_n = k\} u^k \quad (63)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{L(n)} \left(L(n-1)u + \frac{(n-1)!}{4\pi i} \oint_{|z|=z_n} \frac{\exp((z/2)(1 + (1-z)^{-1}))}{z^{n+1}} \left(\sum_{k=2}^{\infty} k(uz)^k \right) dz \right) \\ &= \frac{1}{L(n)} \left(L(n-1)u + \frac{(n-1)!}{4\pi i} \oint_{|z|=z_n} \frac{\exp((z/2)(1 + (1-z)^{-1}))}{z^{n+1}} \frac{u^2 z^2 (2 - uz)}{(1 - uz)^2} dz \right). \end{aligned}$$

Как показано в доказательстве предложения 5, при $n \rightarrow \infty$

$$z_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2n}} + O(n^{-1}),$$

и если при $t \in \mathbf{R}$ положить

$$u = \exp\left(\frac{it}{\sqrt{2n}}\right) = 1 + \frac{it}{\sqrt{2n}} + O(n^{-1}),$$

то

$$\begin{aligned} |u| &= 1, \\ (1 - uz_n)^{-2} &= 2n(1 - it)^{-2}(1 + O(1/\sqrt{n})), \\ u^2 z_n^2 (2 - uz_n) &= 1 + O(1/\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Используя (48) и подставляя полученные оценки в (63), получаем (62).

Теорема 12 доказана.

Замечание 6. Тем же методом нетрудно доказать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_n &= \sqrt{8n}(1 + o(1)), \\ \mathbf{D}\xi_n &= 4n(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Список литературы

1. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
2. Holst L., On numbers related to partition of unlike objects and occupancy problems. *European J. Comb.* 1981 **2**, 231–237.
3. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
4. Бритиков В. Е., Асимптотика числа лесов из некорневых деревьев. *Матем. заметки* (1988) **43**, №5, 672–684.
5. Бритиков В. Е., Предельное поведение числа деревьев заданного объема в случайном лесе из некорневых деревьев. В сб.: *Вероятностные задачи дискретной математики*. МИЭМ, Москва, 1988, с. 7–12.
6. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
7. Федорюк М. В., *Метод перевала*. Наука, Москва, 1977.
8. Тимашев А. Н., Случайные леса с известным числом свободных деревьев. *Обозрение прикладной и промышленной матем.* (2001) **8**, №2, 804–806.

Статья поступила 10.07.2003.

Переработанный вариант поступил 24.09.2004.