Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Шапошников, Гомоморфные отношения многоосновных универсальных алгебр, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 4, 134–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:30:25

Гомоморфные отношения многоосновных универсальных алгебр

© 2004 г. И. Г. Шапошников

Вводится понятие гомоморфного отношения многоосновных универсальных алгебр, для которого гомоморфизмы и π -гомоморфизмы являются частными случаями. Исследуются вопросы существования ряда новых отношений многоосновных универсальных алгебр.

1. Введение

В [1] было введено понятие гомоморфизма многоосновных универсальных алгебр (см. также [2]). Гомоморфизмы являются эффективным инструментом изучения алгебр. Вместе с тем нетривиальные гомоморфизмы существуют не у всех алгебр, или же имеющихся гомоморфизмов недостаточно для исследований. В этой связи в ряде работ были введены понятия, обобщающие понятия гомоморфизма. Например, в [3] было введено понятие π -гомоморфизма многоосновных универсальных алгебр, для которого при заданном распределении вероятностей на основных множествах гомоморфное соотношение выполняется с вероятностью, не меньшей π . В [4] было введено понятие скрещенного гомоморфизма, для которого определяются несколько гомоморфных соотношений, каждое из которых выполняется на своем подмножестве множества определения операций. Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении. Содержанием статьи является исследование нового понятия гомоморфного отношения многоосновных универсальных алгебр, для которого гомоморфизмы и π -гомоморфизмы являются частными случаями. Везде далее мы будем рассматривать только конечные многоосновные универсальные алгебры.

С целью упрощения выкладок будем рассматривать многоосновные универсальные алгебры с одной операцией. Все полученные результаты понятным образом распространяются на произвольные многоосновные универсальные алгебры. Многоосновную универсальную алгебру с одной n -арной операцией

$$\omega: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow A_0$$

мы будем обозначать $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$. Поскольку других алгебр, кроме многоосновных универсальных, у нас не появится, два этих прилагательных мы, как правило, будем опускать. Условимся под записью $\omega(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$, где A'_i — подмножество A_i ,

$$\omega: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow A_0$$

— некоторая операция, понимать множество $\{\omega(a_1, a_2, \dots, a_n) : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A'_1 \times A'_2 \times \dots \times A'_n\}$ элементов из A_0 .

Следуя [5], отношение ядерной эквивалентности, связанное с отображением φ множества A в множество B , будем обозначать через $\text{Кег } \varphi$, то есть $(x, y) \in \text{Кег } \varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \varphi(y)$, $x, y \in A$. Класс эквивалентности множества A с представителем $a \in A$ относительно отношения эквивалентности σ будем обозначать $[a]\sigma$. Условимся говорить, что отношение эквивалентности σ нетривиально, если разбиение на классы относительно σ состоит из более чем одного класса.

Мы будем применять известные понятия алгебраической системы, модели и т.п., определенные в [6] для одноосновных алгебр, также и для многоосновных алгебр, не вводя новых определений там, где такое применение очевидно.

2. Определение и свойства гомоморфных отношений многоосновных универсальных алгебр

Определение 1. Предположим, что для n -арных операций

$$\omega : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_0, \quad \vartheta : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B_0, \quad |A_i| \geq |B_i|,$$

определены отображения φ_i множеств A_i на B_i и задано бинарное отношение ρ на элементах множества B_0^N ,

$$N = |A_1 \times \dots \times A_n|.$$

Упорядочим некоторым образом элементы множества

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$$

и введем обозначения

$$\gamma_{\vartheta\Phi} = (b_1, \dots, b_N) \in B_0^N,$$

где

$$b_i = \vartheta(\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_n(a_n)), \quad (a_1, \dots, a_n) = \beta_i, \quad \gamma_{\Phi\omega} = (b'_1, \dots, b'_N) \in B_0^N$$

и

$$b'_i = \varphi_0(\omega(\beta_i)), \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда, если $\gamma_{\vartheta\Phi}$ находится в отношении ρ с $\gamma_{\Phi\omega}$, то будем говорить, что многоосновная универсальная алгебра $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ находится в гомоморфном отношении ρ с алгеброй $(B_1, \dots, B_n, B_0; \vartheta)$ при гомоморфизме $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_0)$ отношения ρ .

Заметим, что в общем случае существование гомоморфного отношения ρ может зависеть от способа упорядочения элементов множества $A_1 \times \dots \times A_n$. Поэтому, строго говоря, следует определять гомоморфное отношение ρ при заданном упорядочении множества $A_1 \times \dots \times A_n$. Однако, так как в дальнейшем мы будем рассматривать только отношения ρ , для которых существование гомоморфных отношений многоосновных универсальных алгебр не зависит от упорядочения множества $A_1 \times \dots \times A_n$, данное уточнение

в рассуждениях мы будем опускать. Такие гомоморфные отношения мы будем называть нормальными.

Выделим некоторые частные случаи нормальных гомоморфных отношений. Если в условиях определения 1 отношение ρ на элементах множества B_0^N индуцируется некоторым отношением ρ_0 на множестве B_0 , то такое гомоморфное отношение будем называть координатным гомоморфным отношением ρ_0 . В частности, если ρ_0 — отношение равенства, то это гомоморфное отношение есть просто гомоморфизм. Если ρ_0 — отношение неравенства, то такое координатное гомоморфное отношение будем называть инверсным гомоморфизмом. Пусть ρ — отношение равенства точно k (произвольных) координат элементов декартова произведения B_0^N , то есть на некотором собственном подмножестве Q множества определения $A_1 \times \dots \times A_n$ мощности k выполняется равенство

$$\vartheta(\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_n(a_n)) = \varphi_0(\omega(a_1, \dots, a_n)).$$

Тогда такое гомоморфное отношение будем называть неточным гомоморфизмом, при этом величину

$$p = \frac{k}{|A_1 \times \dots \times A_n|}$$

будем называть значимостью неточного гомоморфизма.

Каждой координате векторов $\{(b_1, \dots, b_N)\}$ множества B_0^N взаимно однозначно поставим в соответствие ζ некоторое значение аргумента $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$, то есть зададим отображение

$$\zeta: \{1, \dots, N\} \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n.$$

Пусть у неточного гомоморфизма множество координат I , на котором выполняется равенство, соответствует (при соответствии ζ) объединению подмножеств вида $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$, где α_i — класс эквивалентности относительно $\text{Кег } \varphi_i$. Тогда такой неточный гомоморфизм будем называть ограниченным гомоморфизмом на ограничении $Q = \zeta(I)$. Заметим, что в данном случае отношение ρ зависит от заданных отображений Φ . Данное отношение ρ определяется следующим образом. Зафиксируем некоторое множество Q , являющееся некоторым объединением подмножеств вида $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$, где α_i — класс эквивалентности относительно $\text{Кег } \varphi_i$, и определим множество координат $I = \zeta^{-1}(Q)$. Отношение ρ будет отношением равенства координат векторов из множества I .

Заметим, что π -гомоморфизм, введенный в [3], также является гомоморфизмом отношения ρ . Пусть на множестве определения ω задано некоторое распределение вероятностей и взаимно однозначное отображение

$$\zeta: \{1, \dots, N\} \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n.$$

Отношение ρ есть отношение равенства векторов на координатах таких, что совокупная вероятность аргументов при соответствии ζ , на которых оно выполняется, не менее π . Заметим, что в данном случае отношение ρ зависит от заданного распределения вероятностей на $A_1 \times \dots \times A_n$. Так как π -гомоморфизмы не сводятся к гомоморфизмам алгебр и алгебраических систем, следовательно, гомоморфные отношения не сводятся к гомоморфизмам алгебраических систем. Еще один пример, свидетельствующий об этом, будет приведен в разделе 3.

Практическое использование введенных понятий аналогично использованию гомоморфизмов [7], π -гомоморфизмов [3] и скрещенных гомоморфизмов [4], например, для решения уравнений над алгебрами.

В дальнейшем элементы декартова произведения мы также будем называть векторами, что не должно вызвать недоразумений.

Определение 2. Пусть

$$\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$$

— совокупность отношений эквивалентности на множествах $A_1, \dots, A_n, A_0$ такая, что на векторах $(A_0/\varepsilon(A_0))^N$, $N = |A_1 \times \dots \times A_n|$, определено отношение ρ и для операции ω алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ задано соответствие ω^* следующим образом: каждому набору классов $[a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)$ поставлен в соответствие класс $[a_0]\varepsilon(A_0)$ так, что вектор $\{\omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) : (a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in A_1 \times \dots \times A_n\}$ содержится в некотором векторе $\{[b_{i_1}, \dots, i_n]\varepsilon(A_0)\}$, находящемся с вектором $\{\omega^*([a_{i_1}]\varepsilon(A_1), \dots, [a_{i_n}]\varepsilon(A_n)) : (a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) \in A_1 \times \dots \times A_n\}$ в отношении ρ .

Тогда пару $(\varepsilon(\omega), \omega^*)$ будем называть конгруэнцией отношения ρ на алгебре $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$.

Заметим, что для совокупности отношений эквивалентности $\varepsilon(\omega)$ может, вообще говоря, существовать несколько различных конгруэнций отношения ρ , каждая из которых будет определяться своим соответствием ω^* .

Для любой $(\varepsilon(\omega), \omega^*)$ -конгруэнции отношения ρ на алгебре $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ можно определить фактор-алгебру $(A_1/\varepsilon(A_1), \dots, A_n/\varepsilon(A_n), A_0/\varepsilon(A_0); \omega^*)$ отношения ρ с операцией

$$\omega^* : A_1/\varepsilon(A_1) \times \dots \times A_n/\varepsilon(A_n) \rightarrow A_0/\varepsilon(A_0).$$

Из определения 2 следует, что совокупность канонических отображений

$$\psi_i : A_i \rightarrow A_i/\varepsilon(A_i)$$

любой конгруэнции $(\varepsilon(\omega), \omega^*)$ отношения ρ есть гомоморфизм отношения ρ алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ на фактор-алгебру $(A_1/\varepsilon(A_1), \dots, A_n/\varepsilon(A_n), A_0/\varepsilon(A_0); \omega^*)$ отношения ρ .

Теорема 1 (о гомоморфизме отношения ρ). Для отношений ядерных эквивалентностей

$$\text{Ker } \varphi = (\text{Ker } \varphi_1, \dots, \text{Ker } \varphi_n, \text{Ker } \varphi_0)$$

любого гомоморфизма

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_0)$$

отношения ρ алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ на алгебру $(B_1, \dots, B_n, B_0; \vartheta)$ может быть задано такое соответствие

$$\omega^* : ([a_1] \text{Ker } \varphi_1, \dots, [a_n] \text{Ker } \varphi_n) \rightarrow [a_0] \text{Ker } \varphi_0,$$

что $(\text{Ker}(\varphi), \omega^*)$ есть конгруэнция отношения ρ^* на алгебру $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ такого, что модели $((B_0)^N; \rho)$ и $((A_0/\text{Ker } \varphi_0)^N; \rho^*)$, $N = |A_1 \times \dots \times A_n|$, изоморфны.

Совокупность канонических отображений

$$\psi_i: A_i \rightarrow A_i/\varepsilon(A_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

есть гомоморфизм отношения ρ^* алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ на фактор-алгебру $(A_1/\text{Ker } \varphi_1, \dots, A_n/\text{Ker } \varphi_n, A_0/\text{Ker } \varphi_0; \omega^*)$ отношения ρ^* ; при этом алгебраические системы $(A_1/\text{Ker } \varphi_1, \dots, A_n/\text{Ker } \varphi_n, A_0/\text{Ker } \varphi_0, (A_0/\text{Ker } \varphi_0)^N; \omega^*; \rho^*)$ и $(B_1, \dots, B_n, B_0, (B_0)^N; \vartheta; \rho)$ изоморфны.

Доказательство. На векторах $(A_0/\text{Ker } \varphi_0)^N$, $N = A_1 \times \dots \times A_n$, определим отношение ρ^* , полагая, что $([a_{i_1}] \text{Ker } \varphi_0, \dots, [a_{i_N}] \text{Ker } \varphi_0), ([a_{j_1}] \text{Ker } \varphi_0, \dots, [a_{j_N}] \text{Ker } \varphi_0) \in \rho^*$ тогда и только тогда, когда $(\varphi_0(a_{i_1}), \dots, \varphi_0(a_{i_N})), (\varphi_0(a_{j_1}), \dots, \varphi_0(a_{j_N})) \in \rho$.

Нетрудно видеть, что отображение

$$\tau_0: A_0/\sigma(\varphi_0) \rightarrow B_0,$$

ставящие в соответствие каждому классу $[a']\sigma(\varphi_0)$ элемент $b = \varphi_0(a')$, есть изоморфизм моделей $((B_0)^N; \rho)$ и $((A_0/\text{Ker } \varphi_0)^N; \rho^*)$.

Каждому набору $[a_1] \text{Ker } \varphi_1, \dots, [a_n] \text{Ker } \varphi_n$ поставим в соответствие ω^* класс $[a_0] \text{Ker } \varphi_0$, для которого

$$\vartheta(\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_n(a_n)) = \varphi_0(a_0). \quad (1)$$

Тогда из условия, что векторы $\{\vartheta(\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_n(a_n)): (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n\}$, $\{\varphi_0(\omega(a_1, \dots, a_n)): (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n\}$ находятся в отношении ρ (условия гомоморфизма отношения ρ) следует, что вектор $\{\omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}): (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n\}$ содержится в некотором векторе $\{[b_{i_1, \dots, i_n}] \text{Ker } \varphi_0\}$, находящимся в отношении ρ^* с вектором $\{\omega^*([a_{i_1}] \text{Ker } \varphi_1, \dots, [a_{i_n}] \text{Ker } \varphi_n): (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n\}$. Следовательно, $(\text{Ker}(\varphi), \omega^*)$ — конгруэнция отношения ρ^* на $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$, и определена фактор-алгебра $(A_1/\text{Ker } \varphi_1, \dots, A_n/\text{Ker } \varphi_n, A_0/\text{Ker } \varphi_0; \omega^*)$ отношения ρ^* .

Из вышеприведенных рассуждений следует, что совокупность канонических отображений

$$\psi_i: A_i \rightarrow A_i/\text{Ker } \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

есть гомоморфизм отношения ρ^* алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ на фактор-алгебру $(A_1/\text{Ker } \varphi_1, \dots, A_n/\text{Ker } \varphi_n, A_0/\text{Ker } \varphi_0; \omega^*)$ отношения ρ^* . Из соотношения (1) следует, что отображения

$$\tau_i: A_i/\text{Ker } \varphi_i \rightarrow B_i,$$

ставящие в соответствие каждому классу $[a_i] \text{Ker } \varphi_i$ элемент $b = \varphi_i(a_i)$ есть изоморфизм алгебраических систем $(A_1/\text{Ker } \varphi_1, \dots, A_n/\text{Ker } \varphi_n, A_0/\text{Ker } \varphi_0, (A_0/\text{Ker } \varphi_0)^N; \omega^*; \rho^*)$ и $(B_1, \dots, B_n, B_0, (B_0)^N; \vartheta; \rho)$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 1 уточняет теорему о π -гомоморфизмах работы [3]. Из теоремы 1 следует, что задача описания с точностью до изоморфизма гомоморфных образов отношения ρ алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ эквивалентна описанию всех ее конгруэнций отношения ρ . В этой связи приведем определения конгруэнций отношений для выше выделенных частных случаев в более удобном для использования виде. Эквивалентность ниже приводимых определений определению 2 легко устанавливается.

Отношения эквивалентности

$$\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$$

на множествах $A_1, \dots, A_n, A_0$ есть конгруэнция алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$, если для любых классов $[a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)$ найдется класс $[a_0]\varepsilon(A_0)$ такой, что (см. [7])

$$\omega([a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)) \subset [a_0]\varepsilon(A_0).$$

Пусть

$$\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$$

— отношения эквивалентности на основных множествах $A_1, \dots, A_n, A_0$ алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ и задано соответствие ω^* следующим образом: каждому набору классов вида $[a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)$ поставлен в соответствие класс $[a_0]\varepsilon(A_0)$ так, что выполняется условие

$$\sum_{(a_1, \dots, a_n)} |\{(b_1, \dots, b_n) : b_i \in [a_i]\varepsilon(A_i), i = 1, \dots, n, \omega(b_1, \dots, b_n) \in [a_0]\varepsilon(A_0)\}| = p,$$

где суммирование проводится по всем представителям классов эквивалентности $\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n)$. Тогда пара $(\varepsilon(\omega), \omega^*)$ будет неточной конгруэнцией алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ значимости p .

Пусть на множестве $A_1 \times \dots \times A_n$ задано распределение вероятностей $\mathbf{P}$,

$$\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$$

— отношения эквивалентности на основных множествах $A_1, \dots, A_n, A_0$ алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ и задано соответствие ω^* следующим образом: каждому набору классов вида $[a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)$ поставлен в соответствие класс $[a_0]\varepsilon(A_0)$ так, что выполняется условие

$$\sum_{(a_1, \dots, a_n)} \mathbf{P}\{(b_1, \dots, b_n) : b_i \in [a_i]\varepsilon(A_i), i = 1, \dots, n, \omega(b_1, \dots, b_n) \in [a_0]\varepsilon(A_0)\} \geq \pi,$$

где суммирование проводится по всем представителям классов эквивалентности $\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n)$. Тогда пара $(\varepsilon(\omega), \omega^*)$ — π -конгруэнция алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$. Заметим, что данное определение эквивалентно определению, введенному в [3]. Отличие заключается в том, что в определении [3] явно не указывается соответствие ω^* , хотя его существование подразумевается, так как в противном случае π -конгруэнция определяется неоднозначно.

Пусть

$$\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$$

— совокупность отношений эквивалентности на множествах $A_1, \dots, A_n, A_0$ такая, что на фактор-множестве $A_0/\varepsilon(A_0)$ определено отношение ρ и для операции ω алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ задано соответствие ω^* следующим образом: каждому набору классов $[a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)$ поставлен в соответствие класс $[a_0]\varepsilon(A_0)$ такой, что

$$\omega([a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)) \subset \bigcup_b [b]\varepsilon(A_0),$$

где объединение проводится по всем представителям классов $b \in A_0$ таким, что $([b]\varepsilon(A_0), [a_0]\varepsilon(A_0)) \in \rho$. Тогда пара $(\varepsilon(\omega), \omega^*)$ будет конгруэнцией координатного отношения ρ на алгебре $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$.

Отношения эквивалентности

$$\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$$

на множествах $A_1, \dots, A_n, A_0$ есть инверсная конгруэнция алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$, если для любых классов $[a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)$ найдется класс $[a_0]\varepsilon(A_0)$ такой, что

$$\omega([a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)) \subset A_0 \setminus [a_0]\varepsilon(A_0).$$

Пусть

$$\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$$

— отношения эквивалентности на основных множествах $A_1, \dots, A_n, A_0$ алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ и для наборов классов $[a_{i_1}]\varepsilon(A_1), \dots, [a_{i_n}]\varepsilon(A_n)$, $(i_1, \dots, i_n) \in Y$, найдется класс $[a_{i_0}]\varepsilon(A_0)$ такой, что $\omega([a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)) \subset [a_0]\varepsilon(A_0)$. Тогда $\varepsilon(\omega)$ — ограниченная конгруэнция алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ на ограничении

$$Q = \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in Y} [a_{i_1}]\varepsilon(A_1) \times \dots \times [a_{i_n}]\varepsilon(A_n).$$

В [7] было введено понятие максимальной конгруэнции. Максимальные конгруэнции зачастую проще описывать (см., например, [4], [7]), а описания их достаточно для описания всех остальных конгруэнций. Аналогичное понятие можно ввести и для некоторых конгруэнций отношений. Например, из определения π -конгруэнции следует, что если $\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$ — π -конгруэнция на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$ и $\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_0$ — такие отношения эквивалентности на множествах $A_1, \dots, A_n, A_0$, соответственно, что $\mu_1 \subset \varepsilon(A_1), \dots, \mu_n \subset \varepsilon(A_n), \mu_0 \subset \varepsilon(A_0)$, то $(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_0)$ также является π -конгруэнцией на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$. В этом случае будем говорить, что π -конгруэнция $(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_0)$ является следствием конгруэнции $\varepsilon(\omega)$. На множестве π -конгруэнций $\pi\text{-Con}(\omega)$ на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$ введем отношение $\leq$ следующего вида:

$$(\mu(A_1), \dots, \mu(A_n), \mu(A_0)) \leq (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0)),$$

если

$$\mu(A_1) \subset \varepsilon(A_1), \dots, \mu(A_n) \subset \varepsilon(A_n), \quad \varepsilon(A_0) \subset \mu(A_0).$$

Нетрудно заметить, что $\leq$ — отношение частичного порядка. Действительно, из определения отношения $\leq$ очевидно следует его рефлексивность и антисимметричность. Покажем транзитивность. Пусть

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1(A_1), \dots, \varepsilon_1(A_n), \varepsilon_1(A_0)) &\leq (\varepsilon_2(A_1), \dots, \varepsilon_2(A_n), \varepsilon_2(A_0)), \\ (\varepsilon_2(A_1), \dots, \varepsilon_2(A_n), \varepsilon_2(A_0)) &\leq (\varepsilon_3(A_1), \dots, \varepsilon_3(A_n), \varepsilon_3(A_0)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(A_1) &\subset \varepsilon_2(A_1) \subset \varepsilon_3(A_1), \\ &\dots \\ \varepsilon_1(A_n) &\subset \varepsilon_2(A_n) \subset \varepsilon_3(A_n), \\ \varepsilon_3(A_0) &\subset \varepsilon_2(A_0) \subset \varepsilon_1(A_0), \end{aligned}$$

то есть

$$(\varepsilon_1(A_1), \dots, \varepsilon_1(A_n), \varepsilon_1(A_0)) \leq (\varepsilon_3(A_1), \dots, \varepsilon_3(A_n), \varepsilon_3(A_0)).$$

Из определения отношения $\leq$ следует, что совокупность всех π -конгруэнций на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$, не являющихся следствием друг друга, исчерпывается максимальными элементами относительно $\leq$. Такие π -конгруэнции будем называть максимальными. Заметим, что любые две π -конгруэнции $(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_0), (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$ на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$ имеют нижнюю границу относительно $\leq$, а именно, π -конгруэнцию $(\mu(A_1) \cap \varepsilon(A_1), \dots, \mu(A_n) \cap \varepsilon(A_n), \mu(A_0) \cup \varepsilon(A_0))$. Следовательно, множество $\pi\text{-Con}(\omega)$ является нижней полурешеткой относительно $\leq$. В общем случае $\pi\text{-Con}(\omega)$ не является решеткой относительно $\leq$. Действительно, пусть на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$ существуют две различные максимальные π -конгруэнции, они являются максимальными элементами $\pi\text{-Con}(\omega)$, поэтому для них не существует верхней грани, а множество $\pi\text{-Con}(\omega)$ не является решеткой относительно $\leq$.

Заметим, что если

$$\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$$

— инверсная конгруэнция на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$ и $\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_0$ — такие отношения эквивалентности на множествах $A_1, \dots, A_n, A_0$, соответственно, что $\mu_1 \subset \varepsilon(A_1), \dots, \mu_n \subset \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0) \supset \mu_0$, то $(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_0)$ — также инверсная конгруэнция на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$. В этом случае будем говорить, что инверсная конгруэнция $(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_0)$ является следствием инверсной конгруэнции $\varepsilon(\omega)$. На множестве инверсных конгруэнций на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$ введем отношение $\leq$ следующего вида:

$$(\mu(A_1), \dots, \mu(A_n), \mu(A_0)) \leq (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0)),$$

если

$$\mu(A_1) \subset \varepsilon(A_1), \dots, \mu(A_n) \subset \varepsilon(A_n), \quad \varepsilon(A_0) \supset \mu(A_0).$$

Нетрудно заметить, что $\leq$ — отношение частичного порядка. Из определения отношения $\leq$ следует, что совокупность всех инверсных конгруэнций на алгебре $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_0; \omega)$, не являющихся следствием друг друга, исчерпывается максимальными элементами относительно $\leq$. Такие инверсные конгруэнции будем называть максимальными.

3. Конгруэнции координатных отношений

Предложение 1. Если на алгебре $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ существует конгруэнция $(\varepsilon(\omega), \omega^*)$, $\varepsilon(\omega) = (\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$, координатного отношения ρ такого, что не найдется элемента $[a_0]\varepsilon(A_0)$, для которого для любого $[a']\varepsilon(A_0) \in A_0/\varepsilon(A_0)$ справедливо включение $([a']\varepsilon(A_0), [a_0]\varepsilon(A_0)) \in \rho$, то для каждого набора классов $[a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)$ может быть так поставлен при соответствии ω^{**} класс $[a_0]\varepsilon(A_0)$, что пара $(\varepsilon(\omega), \omega^{**})$ будет инверсной конгруэнцией на $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$.

Доказательство. По определению конгруэнции координатного отношения ρ для любого набора $[a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)$ найдется класс $[a_0]\varepsilon(A_0)$ такой, что

$$\omega([a_1]\varepsilon(A_1), \dots, [a_n]\varepsilon(A_n)) \subset \bigcup_b [b]\varepsilon(A_0),$$

где объединение берется по всем классам $[b]_{\varepsilon}(A_0)$, находящимся с $[a_0]_{\varepsilon}(A_0)$ в отношении ρ . По условию предложения, любому набору $[a_1]_{\varepsilon}(A_1), \dots, [a_n]_{\varepsilon}(A_n)$ может быть в соответствии ω^{**} поставлен такой класс $[a']_{\varepsilon}(A_0)$, что

$$\omega([a_1]_{\varepsilon}(A_1), \dots, [a_n]_{\varepsilon}(A_n)) \subset A_0 \setminus [a']_{\varepsilon}(A_0).$$

Таким образом, $(\varepsilon(\omega), \omega^{**})$ — инверсная конгруэнция алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$. Предложение доказано.

Конгруэнции координатного отношения ρ , для которых не выполняются условия предложения 1, являются в некотором смысле тривиальными.

Предложение 2. Пусть ρ — естественное отношение линейного порядка $\leq$ на $E = \{0, 1\}$ (то есть $0 < 1$), f — булева функция двух переменных такая, что для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in E$

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = f(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = 1,$$

где $\bar{\alpha}$ — операция инверсии.

Тогда любая квазигруппа $(A; F)$, определенная на множестве A , $|A| \geq 2$, находится в гомоморфном координатном отношении $\leq$ с универсальной алгеброй $(E; f)$.

Доказательство. Пусть

$$F(a_1, a_2) = a_3,$$

определим отображения

$$\varphi_i: A \rightarrow E, \quad i = 0, 1, 2,$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1(a_1) &= \alpha_1 \text{ и } \varphi_1(a) = \bar{\alpha}_1 \text{ при } a \neq a_1, \\ \varphi_2(a_2) &= \alpha_2 \text{ и } \varphi_2(a) = \bar{\alpha}_2 \text{ при } a \neq a_2, \\ \varphi_0(a_3) &= 1 \text{ и } \varphi_0(a) = 0 \text{ при } a \neq a_3. \end{aligned}$$

Тогда для всех $a \neq a_1$ и $b \neq a_2$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_0(F(a_1, a_2)) &= 1, \\ \varphi_0(F(a_1, b)) &= \varphi_0(F(a, a_2)) = 0, \\ f(\varphi_1(a_1), \varphi_2(a_2)) &= f(\varphi_1(a), \varphi_2(b)) = 1, \end{aligned}$$

из которых следует справедливость отношения

$$\varphi_0(F(a', b')) \leq f(\varphi_1(a'), \varphi_2(b'))$$

для всех $a', b' \in A$.

Предложение доказано.

Для инверсных гомоморфизмов не существует утверждения, аналогичного предложению 2. А именно, существуют квазигруппы, которые не имеют в качестве инверсного гомоморфного образа универсальную алгебру $(E; f)$, где f — нетождественная булева

функция. Чтобы показать это, заметим, что существование инверсного гомоморфизма алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ на алгебру $(B_1, \dots, B_n, B_0; \vartheta)$, где $|B_0| = 2$, влечет за собой существование гомоморфизма на эту же алгебру. Действительно, если $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_0)$ — инверсный гомоморфизм, то для любого $(a_1, \dots, a_n)$ из $A_1 \times \dots \times A_n$ справедливо соотношение

$$\varphi_0(\omega(a_1, \dots, a_n)) \neq \vartheta(\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_n(a_n)).$$

Определим отображение φ'_0 множества A_0 на B_0 , полагая

$$\varphi'_0(a) = B_0 \setminus \{\varphi_0(a)\}.$$

Так как B_0 состоит из двух элементов, определение корректно. Нетрудно видеть, что для любого $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ будет выполняться равенство

$$\varphi'_0(\omega(a_1, \dots, a_n)) = \vartheta(\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_n(a_n)),$$

то есть $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi'_0)$ — гомоморфизм алгебры $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$ на алгебру $(B_1, \dots, B_n, B_0; \vartheta)$. Вместе с тем, любая абелева группа простого порядка не имеет нетривиальных гомоморфных образов (см. [7]) и, стало быть, не имеет в качестве инверсного гомоморфного образа универсальную алгебру $(E; f)$.

Заметим также, что предложение 2 справедливо не для любой булевой функции f .

Предложение 3. Пусть f — булева функция двух переменных, причем для некоторого $\alpha_1 \in E$ справедливы равенства

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_1, \bar{\alpha}_2) = 0.$$

Тогда для любой квазигруппы $(A; F)$, $|A| \geq 2$, не существует гомоморфного координатного отношения $\leq$, определенного в предложении 2, с универсальной алгеброй $(E; f)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0)$ — гомоморфизм координатного отношения $\leq$ квазигруппы $(A; F)$ на $(E; f)$. Тогда существуют элементы $a, b \in A$ такие, что $\varphi_1(a) = \alpha_1$, $\varphi_0(b) = 1$. Так как F — операция квазигруппы, найдется элемент $c \in A$ такой, что $F(a, c) = b$. Следовательно, $\varphi_0(F(a, c)) = 1$, $f(\varphi_1(a), \varphi_2(c)) = 0$. Получаем противоречие, доказывающее утверждение.

Приведенные выше частные факты говорят о следующем: гомоморфизмы координатного отношения либо могут быть сведены к инверсным гомоморфизмам, либо в определенном смысле тривиальны.

Заметим, что на любой алгебре $(A_1, \dots, A_n, A_0; \omega)$, $|A_0| \geq 2$, можно построить инверсную конгруэнцию вида $(\iota(A_1), \dots, \iota(A_n), \varepsilon(A_0))$, где $\iota(A)$ — отношение равенства на множестве A (по крайней мере при $\varepsilon(A_0) = \iota(A_0)$). Поэтому будем говорить, что инверсная конгруэнция $(\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n), \varepsilon(A_0))$ нетривиальна, если среди отношений эквивалентности $(\varepsilon(A_1), \dots, \varepsilon(A_n))$ найдется отличное от отношения равенства.

Предложение 4. Для любой n -квазигруппы $(A; F)$, $|A| > 2$, существует нетривиальная инверсная конгруэнция.

Доказательство. Зададим на A некоторое нетривиальное отношение эквивалентности ε , $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для набора эквивалентностей

$$\varepsilon(F) = (\varepsilon_1(A), \dots, \varepsilon_n(A), \varepsilon_0(A)),$$

где

$$\varepsilon_1(A) = \dots = \varepsilon_{i-1}(A) = \varepsilon_{i+1}(A) = \dots = \varepsilon_n(A) = \varepsilon_0(A) = \iota(A), \quad \varepsilon_i(A) = \varepsilon,$$

определяется инверсная конгруэнция $(\varepsilon(F), F^*)$ на $(A; F)$, где F^* ставит в соответствие каждому набору $(a_1, \dots, a_{i-1}, [a_i]\varepsilon, a_{i+1}, \dots, a_n)$ элемент a_0 такой, что

$$a_0 = F(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad a'_i \notin [a_i]\varepsilon.$$

Предложение доказано.

Последнее утверждение говорит о новом качестве введенного понятия инверсного гомоморфизма, так как существуют n -квазигруппы, у которых отсутствуют нетривиальные гомоморфизмы (см. [7]). Данное утверждение также свидетельствует, что гомоморфные отношения не сводятся к гомоморфизмам алгебраических систем.

4. О некоторых ограниченных гомоморфизмах n -квазигрупп

Будем рассматривать конечные n -квазигруппы $(A; F)$, построенные с использованием суперпозиций квазигрупп, изотопных некоторой одной квазигруппе $(A; \cdot)$, следующего вида:

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = h_n(\dots h_3(h_2(h_1(x_1)x_2)x_3) \dots x_n), \quad (2)$$

$x_i \in A$, h_i — подстановка множества A , $i = 1, \dots, n$.

Данный класс n -квазигрупп исследовался в ряде работ ([8]–[11]) и представляет интерес как с теоретической, так и практической точек зрения. В частности, как показано в [8], подходящими суперпозициями таких n -квазигрупп можно получить любую n -квазигруппу порядка $k \geq 7$ (точные формулировки см. в [8]). Данный класс n -квазигрупп появляется и в ряде практических приложений, например, в криптографии. В частности, структуру такой n -квазигруппы задает преобразование блочного шифра, построенного по принципу SQUARE (например, алгоритм, принятый в качестве стандарта шифрования AES), а также ряд других известных блочных шифров, реализованных по принципу SP-сети.

Пусть в дальнейшем $(A; \cdot)$ — абелева группа, φ_i , $i \in I$, — ее гомоморфизмы такие, что $|\text{Ker } \varphi_i| = k$. Мы будем рассматривать ограниченные гомоморфизмы определяемой (2) n -квазигруппы $(A; F)$ вида

$$\Phi = (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}, \varphi_{i_{n+1}}). \quad (3)$$

Очевидно, что существуют n -квазигруппы $(A; F)$, определяемые (2), у которых существуют ограниченные гомоморфизмы (3) (например, те, у которых Φ является гомоморфизмом). Поэтому вызывает интерес вопрос существования n -квазигрупп $(A; F)$, у которых отсутствуют ограниченные гомоморфизмы (3).

Определим для каждой подстановки h_l дважды стохастическую матрицу

$$M_l = M_l(\text{Ker } \varphi_{i_l}, \text{Ker } \varphi_{i_{l+1}})$$

с элементами

$$q_{ij} = k^{-1} |h_l([a_i] \text{Ker } \varphi_{i_l}) \cap [a_j] \text{Ker } \varphi_{i_{l+1}}|.$$

Обозначим $T_\alpha(\varphi_i)$ $(0, 1)$ -матрицу перестановок размера $|A/\text{Кер } \varphi_i| \times |A/\text{Кер } \varphi_i|$, элемент которой $q_{lj} = 1$, если

$$[\alpha_\alpha] \text{Кер } \varphi_i \times_i [\alpha_l] \text{Кер } \varphi_i = [\alpha_j] \text{Кер } \varphi_i,$$

$\alpha, l, j \in A/\text{Кер } \varphi_i$ и $\times_i$ — операция в фактор-группе $A/\text{Кер } \varphi_i$.

Для произведения матриц будем использовать обозначение

$$U_z(F, \Phi) = M_1 \times T_{\alpha_2}(\varphi_2) \times \dots \times M_{n-1} \times T_{\alpha_n}(\varphi_{n-1}) \times M_n,$$

где $z = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in A/\text{Кер } \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$.

Предложение 5. Пусть среди матриц M_l , $l = 1, \dots, n$, найдется $|A|/k - 1$ вполне неразложимых. Тогда Φ не является ограниченным гомоморфизмом $(A; F)$.

Доказательство. Матрицу $U_z(F, \Phi)$ можно рассматривать как матрицу переходных вероятностей за n шагов простой неоднородной цепи Маркова, управляемой последовательностью матриц $M_1 \times T_{\alpha_2}(\varphi_2), \dots, M_{n-1} \times T_{\alpha_n}(\varphi_{n-1}), M_n$.

Полагая, что в начальный момент цепь Маркова находилась в некотором i -м состоянии, посмотрим во сколько R_l состояний она может попасть через l шагов, $l = 1, \dots, n$, $R_0 = 1$. Для получения оценки R_l предварительно приведем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. В любых l строках, $l = 1, \dots, t - 1$, дважды стохастической матрицы M размера $t \times t$ положительные элементы находятся в $t \geq l$ столбцах, если же M вполне неразложима, то в $t > l$ столбцах.

Доказательство леммы 1. Напомним (см. [12]), что неотрицательная матрица A называется частично разложимой, если существуют такие матрицы перестановок Π и Π_1 , что

$$\Pi \times A \times \Pi_1 = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B, C — квадратные матрицы. Если неотрицательная матрица не является частично разложимой, то она называется вполне неразложимой. Пусть M — произвольная дважды стохастическая матрица и положительные элементы в строках с номерами $i_1, \dots, i_l$ находятся в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_t$. Суммируя эти элементы, получаем соотношения

$$\sum_{d=1}^l \sum_{f=1}^t P_{i_d j_f} = \sum_{d=1}^l 1,$$

$$\sum_{f=1}^t \sum_{d=1}^l P_{i_d j_f} \leq t.$$

Равенство дает частичную разложимость. Лемма доказана.

Согласно доказанной лемме, если матрица M_{l+1} вполне неразложима, то $R_{l+1} \geq R_l + 1$, а если частично разложима, то $R_{l+1} \geq R_l$. Следовательно, через n шагов цепь Маркова может оказаться в любом состоянии, или, что то же самое, матрица $U_z(F, \Phi)$ положительна, если вполне неразложимых среди матриц M_l не меньше $r - 1$. Положительность матрицы говорит об отсутствии ограниченного гомоморфизма. Предложение доказано.

Покажем, что существуют подстановки, удовлетворяющие условию предложения 5.

Предложение 6. Пусть $\varepsilon_i, \mu_i, \varepsilon_{i+1}, \mu_{i+1}$ — конгруэнции на группе $(A; \cdot)$ такие, что

$$|A/\varepsilon_i| = |A/\varepsilon_{i+1}|, \quad |A/\mu_i| = |A/\mu_{i+1}|, \quad \mu_i \subset \varepsilon_i, \quad \mu_{i+1} \subset \varepsilon_{i+1}.$$

Тогда, если матрица $M(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})$ частично разложима, то матрица $M(\mu_i, \mu_{i+1})$ также частично разложима.

Доказательство. Если элемент

$$q_{lj} = |[a_l]\varepsilon_i|^{-1} |h([a_l]\varepsilon_i) \cap [a_j]\varepsilon_{i+1}|$$

матрицы $M(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})$ равен нулю, то в матрице $M(\mu_i, \mu_{i+1})$ равны нулю все элементы с индексами (d, f) такими, что

$$[a_d]\mu_i \subset [a_l]\varepsilon_i, \quad [a_f]\mu_{i+1} \subset [a_j]\varepsilon_{i+1}.$$

Таким образом, если в матрице $M(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})$ существует собственная дважды стохастическая подматрица, стоящая на пересечении строк с номерами $p_1, \dots, p_s$ и столбцов с номерами $q_1, \dots, q_s$, то и в матрице $M(\mu_i, \mu_{i+1})$ найдется собственная дважды стохастическая подматрица, элементы которой имеют индексы (d, f) такие, что

$$[a_d]\mu_i \subset [a_{p_i}]\varepsilon_i, \quad [a_f]\mu_{i+1} \subset [a_{q_r}]\varepsilon_{i+1}.$$

Предложение доказано.

Из предложения 6 следует, что для того, чтобы установить вполне неразложимость матрицы $M(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})$ достаточно показать вполне неразложимость матрицы $M(\mu_i, \mu_{i+1})$.

Предложение 7. Пусть ε и μ — конгруэнции на группе $(A; \cdot)$ такие, что

$$|A/\varepsilon| = |A/\mu| = |A|/2.$$

Тогда для любой подстановки h матрица $M(\varepsilon, \mu)$ представима выпуклой комбинацией двух матриц перестановок P_1, P_2 вида

$$M(\varepsilon, \mu) = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2.$$

Доказательство. По теореме Биркгофа (см., например, [13]) любая дважды стохастическая матрица представима в виде выпуклой комбинации матриц перестановок. По определению матрицы $M(\varepsilon, \mu)$ любой ее элемент равен либо нулю, либо единице, либо $1/2$. Следуя доказательству теоремы Биркгофа, выделим в матрице $M_h(\varepsilon, \mu)$ диагональ, все элементы которой положительны, P_1 — матрица перестановки с единичными элементами в позициях, соответствующих этой диагонали. Заметим, что

$$M(\varepsilon, \mu) - \frac{1}{2}P_1 = \frac{1}{2}P_2,$$

где P_2 — матрица перестановок, так как после вычитания в каждой строке и в каждом столбце получившейся матрицы должен стоять ненулевой элемент, равный $1/2$. Предложение доказано.

Предложение 8. Если квадратная матрица M размера $t \times t$ представима выпуклой комбинацией двух матриц перестановок P_1, P_2 вида

$$M = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2,$$

то она вполне неразложима тогда и только тогда, когда матрице перестановки $P_1^{-1} \times P_2$ соответствует подстановка полного цикла симметрической группы S_m .

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы и матрица M частично разложима, то есть в ней существует собственная дважды стохастическая подматрица, находящаяся на пересечении строк с номерами $i_1, \dots, i_l$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_l$, $1 \leq l < m$. Это означает, что подстановки g_1, g_2 , соответствующие матрицам P_1 и P_2 , переводят $i_1, \dots, i_l$ в $j_1, \dots, j_l$. Следовательно, в цикловом разложении подстановки $g_1^{-1}g_2$ найдутся циклы, полностью состоящие из $j_1, \dots, j_l$.

Обратно, пусть в разложении подстановки $g_1^{-1}g_2$ на независимые циклы существуют циклы на $j_1, \dots, j_l$, $1 \leq l < m$, g_1 и g_2 переводят $i_1, \dots, i_l$ в $j_1, \dots, j_l$. Тогда в M существует собственная дважды стохастическая подматрица, стоящая на пересечении строк с номерами $i_1, \dots, i_l$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_l$. Следовательно, матрица M частично разложима. Предложение доказано.

Доказанные предложения 6, 7, 8 приводят к алгоритму построения подстановок, для которых матрицы $M(\text{Кег } \varphi_i, \text{Кег } \varphi_{i+1})$ будут вполне неразложимы. Опишем этот алгоритм для аддитивной группы $V_N(+)$ кольца вычетов по модулю 2^N . Любая нетривиальная конгруэнция σ_k группы $V_N(+)$ имеет следующий вид: $(a, b) \in \sigma_k$ тогда и только тогда, когда

$$a \equiv b \pmod{2^k}, \quad k \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Из предложения 6 следует, что для любого $1 \leq k < N$ матрица $M(\sigma_k, \sigma_k)$ вполне неразложима, если вполне неразложима матрица $M(\sigma_{N-1}, \sigma_{N-1})$. Последняя же матрица будет согласно предложению 8 вполне неразложимой тогда и только тогда, когда матрице перестановок $P_1^{-1} \times P_2$ соответствует подстановка полного цикла. Построим подстановку h , удовлетворяющую этому условию. Выберем две подстановки g_1, g_2 симметрической группы подстановок множества $\{0, 1, \dots, 2^{N-1} - 1\}$ так, чтобы произведение $g_1^{-1}g_2$ было полным циклом. Затем двумя произвольными способами выберем из каждого класса

$$K_i = \{i, i + 2^{N-1}\}, \quad i \in \{0, 1, \dots, 2^{N-1} - 1\},$$

по одному элементу и объединим их первый раз в множество U_1 , второй раз в множество W_1 , $|U_1| = 2^{N-1}$, $|W_1| = 2^{N-1}$. Введем обозначения

$$U_2 = V_N \setminus U_1, \quad W_2 = V_N \setminus W_1.$$

Определим h следующим образом: если $a \in U_1$ и $a \in K_i$, то $h(a) = b$, где $b \in K_{g_1(i)}$, $b \in W_1$, если же $a \in U_2$ и $a \in K_i$, то $h(a) = b$, где $b \in K_{g_2(i)}$, $b \in W_2$.

Пусть в (2)

$$h = h_1 = \dots = h_n, \quad (A; \cdot) = V_N(+), \quad n > N/2 - 1,$$

тогда согласно предложению 5 у n -квазигруппы $(A; F)$ отсутствуют ограниченные гомоморфизмы вида (3).

Список литературы

1. Higgins P. J., Algebras with a scheme of operators. *Math. Nachr.* (1963) **27**, 115–132.
2. Higgins P. J., *Groupoids and categories*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
3. Горчинский Ю. Н., О π -гомоморфизмах конечных многоосновных универсальных алгебр. *Дискретная математика* (1999) **11**, №2, 3–19.
4. Карпунин Г. А., Шапошников И. Г., Скрещенные гомоморфизмы конечных многоосновных универсальных алгебр с бинарными операциями. *Дискретная математика* (2000) **12**, №2, 66–84.
5. Кон П., *Универсальная алгебра*. Мир, Москва, 1968.
6. Мальцев А. И., *Алгебраические системы*. Наука, Москва, 1970.
7. Шапошников И. Г., О конгруэнциях конечных многоосновных универсальных алгебр. *Дискретная математика* (1999) **11**, №3, 48–62.
8. Глухов М. М., Об α -замкнутых классах и α -полных системах функций k -значной логики. *Дискретная математика*. (1989) **1**, №1, 16–21.
9. Глухов М. М., Задание конечных групп системами образующих. *Труды по дискретной математике* (1997) **1**, 43–66.
10. Глухов М. М., О 2-транзитивных произведениях регулярных групп подстановок. *Труды по дискретной математике* (2000) **3**, 37–52.
11. Шапошников И. Г., Метод использования δ -сплетения универсальных алгебр для построения преобразований с заданными свойствами. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2002) **9**, №3, 669–670.
12. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
13. Маркус М., Минк Х., *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*. Наука, Москва, 1972.

Статья поступила 16.03.2004.