Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. К. Щукин, В. В. Гушан, Представление парастрофов
луп и квазигрупп, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, вы-
пуск 4, 149–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 02:34:07

Представление парастрофов луп и квазигрупп

© 2004 г. К. К. Щукин, В. В. Гушан

В заметке приводится таблица минимальных множеств систем парастрофов для всех 109 классов изоморфных луп и 22 классов изотопных квазигрупп порядка 6.

1. Введение

С каждой квазигрупповой операцией связано еще пять так называемых обратных операций или парастрофов (см. [1, 2, 6]). Используя каталог луп порядка 6 (см. [3]), мы вычислили системы парастрофов всех 109 классов изоморфных луп, составляющих системы парастрофов всех 22 классов изотопных квазигрупп. Это сделано с помощью алгоритма на основе теорем 1 и 2. Из-за недостатка места мы приводим минимальные множества для них, соответствующие 12 основным классам всей таблицы. Кроме того, приводятся полные системы парастрофов классов изоморфных луп списка Алберта (см. [3, 4]).

Авторы благодарят Ю. В. Рогожина за поддержку и В. И. Избаша за полезные обсуждения и консультации, а также рецензента за ценные замечания.

2. Предварительные замечания и результаты

С квазигруппой $(Q, \cdot)$ мы связываем два преобразования f и e , определяемые тождествами $f(a)a = a = ae(a)$ для каждого $a \in Q$, и две перестановки L_a и R_a на Q , определяемые как $L_a(x) = ax$ и $R_a(x) = xa$ для всех $x \in Q$. Множества $Q_L = \{L_a \mid a \in Q\}$ и $Q_R = \{R_a \mid a \in Q\}$ назовем, соответственно, левым и правым заданием квазигруппы $(Q, \cdot)$. Группа $M(Q)$, порожденная Q_L и Q_R , называется группой умножений или ассоциированной группой квазигруппы $(Q, \cdot)$. Ее подгруппу $I(Q)$, порожденную всеми перестановками вида $L_{ab}^{-1}L_aL_b$, $R_{ab}^{-1}R_bR_a$, $L_a^{-1}R_a$, $a, b \in Q$, называют группой внутренних перестановок квазигруппы $(Q, \cdot)$ (см. [8]). Если $S(Q)$ — симметрическая группа на множестве Q , то

$$\text{Aut}(Q, \cdot) = \{\varphi \in S(Q) \mid \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), a, b \in Q\}$$

и

$$\text{AAut}(Q, \cdot) = \{\varphi \in S(Q) \mid \varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a), a, b \in Q\}$$

обозначают, соответственно, группу всех автоморфизмов и множество всех анти-автоморфизмов квазигруппы $(Q, \cdot)$.

Естественным обобщением теорем 9 и 10 из [4] является следующая теорема.

Теорема 1. *Перестановка $\varphi \in S(Q)$ является изоморфизмом (анти-изоморфизмом, соответственно) квазигруппы $(Q, \cdot)$ на квазигруппу $(Q, \circ)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- (i) $\varphi Q_L \varphi^{-1} = Q_L^\circ$ (соответственно, $\varphi Q_L \varphi^{-1} = Q_R^\circ$);
- (ii) $\varphi e = e^\circ \varphi$ (соответственно, $\varphi e = f^\circ \varphi$), где $f^\circ(a) \circ a = a = a \circ e^\circ(a)$ для всех $a \in Q$.

При выполнении этих условий

$$\varphi L_a \varphi^{-1} = L_{\varphi(a)}^\circ \quad (\text{соответственно, } \varphi L_a \varphi^{-1} = R_{\varphi(a)}^\circ).$$

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Докажем (i). При условии $\varphi(xy) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ для всех $x, y \in Q$ получаем, что $\varphi L_x(y) = L_{\varphi(x)}^\circ \varphi(y)$, или после замены y на $\varphi^{-1}(y)$ получаем, что $\varphi L_x \varphi^{-1} = L_{\varphi(x)}^\circ$. Аналогично, из условия $\varphi(xy) = \varphi(y) \circ \varphi(x)$ находим, что $\varphi L_x \varphi^{-1} = R_{\varphi(x)}^\circ$.

Утверждение (ii) следует из определения φ : для изоморфизма

$$\varphi(x) \circ \varphi e(x) = \varphi(x) = \varphi(x) \circ e^\circ \varphi(x) \implies \varphi e(x) = e^\circ \varphi(x),$$

для анти-изоморфизма

$$\varphi e(x) \circ \varphi(x) = \varphi(x) = f^\circ \varphi(x) \circ \varphi(x) \implies \varphi e(x) = f^\circ \varphi(x)$$

для каждого $x \in Q$.

Докажем обратное утверждение. Если

$$\varphi Q_L \varphi^{-1} = Q_L^\circ, \quad \varphi L_x \varphi^{-1} = L_z^\circ \quad (\varphi Q_L \varphi^{-1} = Q_R^\circ, \quad \varphi L_x \varphi^{-1} = R_z^\circ, \text{ соответственно}),$$

$x, z \in Q$, то для произвольного $y \in Q$

$$z \circ y = \varphi L_x \varphi^{-1}(y) \quad (y \circ z = \varphi L_x \varphi^{-1}(y), \text{ соответственно}).$$

Полагая $y = e^\circ \varphi(x)$ (соответственно, $y = f^\circ \varphi(x)$), получим, что

$$z \circ e^\circ(x) = \varphi(x) = \varphi(x) \circ e^\circ \varphi(x) \quad (f^\circ \varphi(x) \circ z = \varphi(x), \text{ соответственно})$$

и после сокращения $z = \varphi(x)$ в обоих случаях. В том же равенстве заменим y на $\varphi(y)$ и получим, что

$$\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(xy) \quad (\varphi(y) \circ \varphi(x) = \varphi(xy), \text{ соответственно}).$$

Замечание 1. При $(Q, \cdot) = (Q, \circ)$ условие (ii) имеет вид $\varphi e = e\varphi$ ($\varphi e = f\varphi$, соответственно) и мы получаем утверждение для автоморфизмов и анти-автоморфизмов квазигруппы $(Q, \cdot)$, в частности теоремы 9, 10 из [5] для лупы с единицей $e = f$.

Замечание 2. Если $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ — лупы с единицами e и e° , то условие (ii) принимает вид $\varphi(e) = e^\circ$ как при автоморфизме, так и при анти-автоморфизме (ср. теорему 1 в [3]).

Замечание 3. У изоморфных (анти-изоморфных, соответственно) квазигрупп изоморфны (анти-изоморфны, соответственно) как их группы умножений, так и их группы внутренних перестановок.

Замечание 4. Условие (ii) теоремы 1 равносильно следующему условию:

(iii) $\varphi J_a \varphi^{-1} = J_{\varphi(a)}^\circ$ ($\varphi J_a \varphi^{-1} = (J_{\varphi(a)}^\circ)^{-1}$ соответственно) для всех $a \in Q$, где J_a — средняя перестановка квазигруппы $(Q, \cdot)$, определяемая уравнениями

$$x J_a(x) = a, \quad J_a^{-1}(x)x = a, \quad x \in Q.$$

В самом деле, очевидно, что

$$\varphi e(a) = e^\circ \varphi(a) \iff \varphi J_a \varphi^{-1}(\varphi(a)) = J_{\varphi(a)}^\circ(\varphi(a))$$

и, соответственно,

$$\varphi e(a) = f^\circ \varphi(a) \iff \varphi J_a \varphi^{-1}(\varphi(a)) = (J_{\varphi(a)}^\circ)^{-1}(\varphi(a))$$

для всех $a \in Q$.

Но тогда из определяющих уравнений для J_a и J_a^{-1} при $x = a$ легко получить, что

$$\varphi L_a \varphi^{-1}(\varphi J_a \varphi^{-1})(\varphi(a)) = \varphi(a) = L_{\varphi(a)}^\circ J_{\varphi(a)}^\circ(\varphi(a)),$$

и, соответственно,

$$\varphi L_a \varphi^{-1}(\varphi J_a \varphi^{-1})(\varphi(a)) = \varphi(a) = R_{\varphi(a)}^\circ (J_{\varphi(a)}^\circ)^{-1}(\varphi(a)).$$

После соответствующих сокращений легко получить эквивалентности

$$\varphi J_a \varphi^{-1} = J_{\varphi(a)}^\circ \iff \varphi L_a \varphi^{-1} = L_{\varphi(a)}^0$$

и, соответственно,

$$\varphi J_a \varphi^{-1} = (J_{\varphi(a)}^\circ)^{-1} \iff \varphi L_a \varphi^{-1} = R_{\varphi(a)}^\circ$$

для всех $a \in Q$.

3. Парастрофы и их задание

Для квазигрупповой операции $\alpha = (\cdot)$ обозначим ее парастрофы (обратные операции) следующим образом

$$\beta = \alpha^*, \quad \gamma = \alpha^{-1}, \quad \delta = {}^{-1}\alpha, \quad \varepsilon = ({}^{-1}\alpha)^{-1} = (\alpha^{-1})^*, \quad \eta = {}^{-1}(\alpha^{-1}) = ({}^{-1}\alpha)^*.$$

Множество

$$\Pi_\alpha = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta\}$$

называют [1, 2] системой парастрофов операции α . Так как по определению $(\theta^*)^* = \theta$ для любого $\theta \in \Pi_\alpha$, очевидно, что $\Pi_\theta = \Pi_\alpha$. Для квазигруппы $(Q, \cdot) = (Q, \alpha)$, вообще

говоря, возможно равенство $(Q, \alpha) = (Q, \theta)$ для некоторого $\theta \in \Pi_\alpha$. Упорядоченную шестерку

$$Q(\Pi_\alpha) = (Q(\alpha), Q(\beta), Q(\gamma), Q(\delta), Q(\varepsilon), Q(\eta)),$$

где $Q(\theta) = (Q, \theta)$, $\theta \in \Pi_\alpha$, назовем системой парастрофов квазигруппы (Q, α) . Вообще говоря, $Q(\Pi_\alpha) \neq Q(\Pi_\theta)$ для $\alpha \neq \theta$, $\theta \in \Pi_\alpha$, хотя все шесть таких систем составлены из одних и тех же элементов.

В этих обозначениях имеет место доказанная В. Д. Белоусовым в [7] следующая теорема.

Теорема 2. Система парастрофов $Q(\Pi_\alpha)$ квазигруппы $(Q, \cdot) = (Q, \alpha)$ имеет следующую таблицу заданий:

$Q(\Pi_\alpha)$	$Q(\alpha)$	$Q(\beta)$	$Q(\gamma)$	$Q(\delta)$	$Q(\varepsilon)$	$Q(\eta)$
левое задание	Q_L	Q_R	Q_L^{-1}	Q_J^{-1}	Q_J	Q_R^{-1}
правое задание	Q_R	Q_L	Q_J	Q_R^{-1}	Q_L^{-1}	Q_J^{-1}
среднее задание	Q_J	Q_J^{-1}	Q_R	Q_L^{-1}	Q_R^{-1}	Q_L

Известный факт (см. [7]) о перестановочности операций изотопии и парастрофии дополняется следствием, приведенным ниже.

Сначала несколько слов об обозначениях. Для каждого $\theta \in \Pi_\alpha$ обозначим $I_\theta = (\mu, \nu, \xi)$ изотопию парастрофа $(Q, \theta, \cdot) = Q(\theta)$ в одноименный парастроф $(Q, \theta, \circ) = Q(\theta(\circ))$, именно,

$$\xi(x\theta(\circ)y) = \mu(x)\theta\nu(y), \quad x, y \in Q.$$

Следствие 1. Квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ являются изотопными тогда и только тогда, когда изотопны их одноименные парастрофы (Q, θ) и $(Q, \theta(\circ))$ для каждого $\theta \in \Pi_\alpha$. В частности, $\text{Aut}(Q, \cdot) = \text{Aut}(Q, \theta)$.

Доказательство. Если $I_\alpha = (\varphi, \psi, \chi)$ — изотопия пары $(Q, \cdot) = Q(\alpha)$, $(Q, \circ) = Q(\alpha(\circ))$, то изотопии для им соответствующих одноименных пар $Q(\theta)$ и $Q(\theta(\circ))$, $\theta \in \Pi_\alpha$, имеют вид

$$\begin{aligned} I_\alpha = (\varphi, \psi, \chi) &\iff I_\beta = (\psi, \varphi, \chi) \\ &\iff I_\gamma = (\varphi, \chi, \psi) \\ &\iff I_\delta = (\chi, \psi, \varphi) \\ &\iff I_\varepsilon = (\chi, \varphi, \psi) \\ &\iff I_\eta = (\psi, \chi, \varphi). \end{aligned}$$

В самом деле, соотношение

$$\chi(a \circ b) = \varphi(a)\varphi(b)$$

равносильно каждой из эквивалентностей

$$\begin{aligned} \chi L_a^\circ = L\varphi(a)\psi &\iff \psi(L_a^\circ)^{-1} = L_{\varphi(a)}^{-1}\chi \ \& \ \chi R_b^\circ = R_{\psi(b)}\varphi \\ &\iff \varphi(R_b^\circ)^{-1} = R_{\psi(b)}^{-1}\chi. \end{aligned}$$

Остается только воспользоваться таблицей задания парастрофов

$$\begin{aligned}
 \chi L_a^{\alpha(o)}(b) = L_{\varphi(a)}\psi(b) &\iff \chi L_b^{\beta(o)}(a) = L_{\psi(b)}^{\beta}\varphi(a) \\
 &\iff \psi L_a^{\gamma(o)}(b) = L_{\varphi(a)}^{\gamma}\chi(b) \\
 &\iff \varphi R_b^{\delta(o)}(a) = R_{\psi(b)}^{\delta}\chi(a) \\
 &\iff \psi R_b^{\varepsilon(o)} = R_{\varphi(b)}^{\varepsilon}\chi(a) \\
 &\iff \varphi L_b^{\eta(o)}(a) = L_{\psi(b)}^{\eta}\chi(a).
 \end{aligned}$$

Случай изоморфизма получается при $\varphi = \psi = \chi$.

В итоге мы доказали следующее: система парастрофов

$$Q(\Pi_\alpha) = (Q(\alpha), Q(\beta), Q(\gamma), Q(\delta), Q(\varepsilon), Q(\eta))$$

есть система представителей соответствующих им классов $\bar{Q}(\theta)$, $\theta \in \Pi_\alpha$, всех парастрофов, изоморфных парастрофу $Q(\theta)$, а также классов $\tilde{Q}(\theta)$, $\theta \in \Pi_\alpha$ всех парастрофов, изотопных парастрофу $Q(\theta)$ (в [7] они названы изострофами). При этом классы $\bar{Q}(\theta)$, $\theta \in \Pi_\alpha$, попарно равномощны и имеют одну и ту же (с точностью до изоморфизма) группу всех автоморфизмов $\text{Aut}(Q(\alpha))$. В итоге попарно равномощны и классы $\tilde{Q}(\theta)$, $\theta \in \Pi_\alpha$.

Именно такую информацию выдают все таблицы систем парастрофов, которые приводятся в следующем параграфе. Для их составления на основании теорем 1 и 2 используется алгоритм: из левого задания $Q(\alpha)$ выводится левое задание $Q(\theta)$, $\theta \in \Pi_\alpha$, по которому производится поиск в каталогах работы [3].

4. Таблицы систем парастрофов классов изоморфных луп и изотопных квазигрупп порядков 5 и 6

Конструкция таблиц 5(i), (a), (b) и 6(ii) разъясняется в предварительных пунктах 1–4 этого параграфа.

- (1) Введем новые обозначения. В заголовках наших таблиц парастрофы $Q(\alpha)$, $Q(\beta)$, $Q(\gamma)$, $Q(\delta)$, $Q(\varepsilon)$, $Q(\eta)$ заменяются их классами А, В, Г, Д, Е, Н.
- (2) Используя каталог работы [3], мы составили таблицу систем парастрофов всех 109 классов изоморфных луп, распределенных во всех с I по XXII классах изотопных квазигрупп порядка 6. По двенадцати основным классам этой таблицы (см. пункт 3) строится в пункте 6(ii) соответствующее им одно из минимальных множеств систем парастрофов. Таблицы парастрофов (a) и (b) в пункте 5(i) для луп списка Алберта приводятся полностью. Во всех ниже приводимых таблицах вместо явного вида парастрофов представителей классов приведены их координаты в каталоге работы [3]. Например, X, 5, то есть римская цифра X с арабской цифрой 5, обозначает 5-й порядковый номер класса изоморфных луп порядка 6 в его классе изотопных квазигрупп X.

- (3) Основным класс парастрофа $Q(\theta) \in Q(\Pi_\alpha)$ — это изотопный класс $\tilde{Q}(\theta)$, который его содержит. Случается, что $\theta', \theta \in \Pi_\alpha$, $\theta' \neq \theta$, но $Q(\theta)$ и $Q(\theta')$ принадлежат одному и тому же основному классу. Поэтому у системы парастрофов $Q(\Pi_\alpha)$ выделяют множество основных классов (оно может состоять только из одного основного класса, но не более, чем из шести). Мы их будем обозначать для квазигрупп порядка пять как $5_1, 5_2, \dots$, а для порядка шесть как $6_1, 6_2, \dots$. Так, в таблице системы парастрофов классов изоморфных луп порядка шесть основных классов двенадцать:

$$\begin{array}{lll} 6_1 = \{I\}, & 6_2 = \{II\}, & 6_3 = \{III, XVII, X\}, \\ 6_4 = \{IV, XV, XVIII\}, & 6_5 = \{V\}, & 6_6 = \{VI\}, \\ 6_7 = \{VII, IX, XII\}, & 6_8 = \{VIII, XIII, XXI\}, & 6_9 = \{X\}, \\ 6_{10} = \{XI, XIV, XX\}, & 6_{11} = \{XVI\}, & 6_{12} = \{XXII\}. \end{array}$$

Далее, как видно из таблиц (а) и (b) пункта 5 (i), основные классы списка Алберта — это

$$(a) \ 5_1 = \{I\}, \ 5_2 = \{II\},$$

$$(b) \ 6_1 = \{I\}, \ 6_3 = \{III, XVII, XIX\}, \ 6_5 = \{V\}, \ 6_{12} = \{XXII\}.$$

- (4) В качестве еще одного следствия из теорем 1 и 2 получаем (почти) очевидное утверждение.

В системе парастрофов $Q(\Pi_\alpha)$ квазигруппы $Q(\alpha)$ все ее компоненты изоморфны тогда и только тогда, когда $Q(\alpha)$ изоморфна $Q(\gamma)$ и в случае некоммутативности $Q(\alpha)$ она должна иметь анти-автоморфизм. Именно этими свойствами обладают системы парастрофов классов циклических групп $5_2 = II$, $6_1 = I$, симметрических групп $6_5 = V$. Из неассоциативных классов луп порядка шесть этим свойством обладают $6_{12} = XXII$, а также составляющие 6_2 изоморфные классы коммутативных II, 1 и некоммутативных II, 2 луп. Все остальные замкнутые в себе основные классы составлены из более чем двух в том числе и незамкнутых в себе систем парастрофов: 5_2 — из пяти, $6_6 = VI$ — из пяти, $6_9 = X$ — из двенадцати, $6_{11} = XVI$ — из девяти.

Если же у некоммутативной квазигруппы $Q(\alpha)$ нет анти-изоморфизма, то сохраняются соотношения

$$\begin{aligned} Q(\alpha) \cong Q(\gamma) &\iff Q(\beta) \cong Q(\varepsilon) \\ &\iff Q(\delta) \cong Q(\eta). \end{aligned}$$

Наконец, если $Q(\alpha)$ имеет анти-автоморфизм или коммутативна, то

$$\begin{aligned} Q(\alpha) \cong Q(\beta) &\iff Q(\gamma) \cong Q(\eta) \\ &\iff Q(\delta) \cong Q(\varepsilon). \end{aligned}$$

Примеров таких пар в наших таблицах больше чем достаточно (например, для N29, N30) в таблице 5 (i), b).

- 5) В работе Алберта [4] были описаны

(a) все шесть классов изоморфных луп порядка 5;

(b) все двенадцать классов изоморфных луп порядка 6, у которых имеется подлупа (то есть подгруппа) порядка 3.

В [3] для каждой лупы этого списка были найдены их группы умножений, группы автоморфизмов, антиавтоморфизмы и группы внутренних перестановок. К этому мы здесь добавим еще их системы парастрофов.

- (i) Таблицы систем парастрофов классов изоморфных луп списка Алберта (в первом столбце их нумерация из [4], стр. 413–416)

(a) порядок пять

	A	B	Г	Δ	E	H
N17	I,2	I,1	I,2	I,4	I,1	I,4
N18	I,5	I,5	I,5	I,5	I,5	I,5
N19	I,4	I,4	I,1	I,2	I,2	I,1
N20	I,3	I,3	I,3	I,3	I,3	I,3
N21	I,1	I,2	I,4	I,1	I,4	I,2
Z ₅	II,1	II,1	II,1	II,1	II,1	II,1

(b) порядок шесть

	A	B	Г	Δ	E	H
N27	I,1	I,1	I,1	I,1	I,1	I,1
N28	V,1	V,1	V,1	V,1	V,1	V,1
N29	XIX,1	XIX,1	XVII,2	III,2	III,2	XVII,2
N30	III,2	XVII,2	III,2	XIX,1	XVII,2	XIX,1
N31	XVII,2	III,2	XIX,1	XVII,2	XIX,1	III,2
N32	XVII,1	III,1	XIX,2	XVII,1	XIX,2	III,1
N33	XVII,3	III,3	XIX,3	XVII,3	XIX,3	III,3
N34	III,1	XVII,1	III,1	XIX,2	XVII,1	XIX,2
N35	III,3	XVII,3	III,3	XIX,3	XVII,3	XIX,3
N36	XIX,2	XIX,2	XVII,1	III,1	III,1	XVII,1
N37	XIX,3	XIX,3	XVII,3	III,3	III,3	XVII,3
N38	XXII,1	XXII,1	XXII,1	XXII,1	XXII,1	XXII,1

- (6) Из систем парастрофов 109 изоморфных классов луп порядка шесть выбираем 57 систем $Q(P_\alpha)$, у которых порождающие лупы $(Q, \cdot) = (Q, \alpha)$ имеют номера I, 1; II, 1, 2; III, 1–3; IV, 1–10; VI, 1–5; VII, 1–4; VIII, 1, 2; X, 1–12; XI, 1–7; XVI, 1–9; XXII, 1.

Таблицу из выбранных систем парастрофов мы называем минимальным множеством систем парастрофов. Она определяется в зависимости от выбора в основных классах b_1 – b_{12} изотопных классов, но всегда содержит 57 систем парастрофов.

- (ii) Таблица систем парастрофов классов изоморфных луп порядка шесть, составляющих (одно из многих) минимальное множество

A	B	Г	Δ	E	H
I,1	I,1	I,1	I,1	I,1	I,1
II,1	II,1	II,1	II,1	II,1	II,1
II,2	II,2	II,2	II,2	II,2	II,2
III,1	XVII,1	III,1	XIX,2	XVII,1	XIX,2
III,2	XVII,2	III,2	XIX,1	XVII,2	XIX,1
III,3	XVII,3	III,3	XIX,3	XVII,3	XIX,3

А	В	Г	Δ	Е	Н
IV,1	XVIII,2	IV,1	XV,2	XVIII,2	XV,2
IV,2	XVIII,4	IV,2	XV,5	XVIII,4	XV,5
IV,3	XVIII,1	IV,3	XV,4	XVIII,1	XV,4
IV,4	XVIII,3	IV,4	XV,3	XVIII,3	XV,3
IV,5	XVIII,5	IV,5	XV,1	XVIII,5	XV,1
IV,6	XVIII,6	IV,6	XV,6	XVIII,6	XV,6
IV,7	XVIII,7	IV,9	XV,10	XVIII,9	XV,8
IV,8	XVIII,8	IV,10	XV,9	XVIII,10	XV,7
IV,9	XVIII,9	IV,7	XV,8	XVIII,7	XV,10
IV,10	XVIII,10	IV,8	XV,7	XVIII,8	XV,9
V,1	V,1	V,1	V,1	V,1	V,1
VI,1	VI,1	VI,3	VI,4	VI,4	VI,3
VI,2	VI,2	VI,2	VI,2	VI,2	VI,2
VI,3	VI,4	VI,1	VI,3	VI,1	VI,4
VI,4	VI,3	VI,4	VI,1	VI,3	VI,1
VI,5	VI,5	VI,5	VI,5	VI,5	VI,5
VII,1	IX,1	VII,1	XII,1	IX,1	XII,1
VII,2	IX,2	VII,2	XII,2	IX,2	XII,2
VII,3	IX,4	VII,3	XII,4	IX,4	XII,4
VII,4	IX,3	VII,4	XII,3	IX,3	XII,3
VIII,1	XXI,1	VIII,1	XIII,1	XXI,1	XIII,1
VIII,2	XXI,2	VIII,2	XIII,2	XXI,2	XIII,2
X,1	X,1	X,1	X,1	X,1	X,1
X,2	X,9	X,2	X,7	X,9	X,7
X,3	X,10	X,3	X,8	X,10	X,8
X,4	X,4	X,6	X,5	X,5	X,6
X,5	X,6	X,5	X,4	X,6	X,4
X,6	X,5	X,4	X,6	X,4	X,5
X,7	X,7	X,9	X,2	X,2	X,9
X,8	X,8	X,10	X,3	X,3	X,10
X,9	X,2	X,7	X,9	X,7	X,2
X,10	X,3	X,8	X,10	X,8	X,3
X,11	X,12	X,12	X,12	X,11	X,11
X,12	X,11	X,11	X,11	X,12	X,12
XI,1	XX,1	XI,1	XIV,1	XX,1	XIV,1
XI,2	XX,3	XI,2	XIV,5	XX,3	XIV,5
XI,3	XX,4	XI,3	XIV,4	XX,4	XIV,4
XI,4	XX,5	XI,4	XIV,2	XX,5	XIV,2
XI,5	XX,2	XI,5	XIV,3	XX,2	XIV,3
XI,6	XX,6	XI,7	XIV,7	XX,7	XIV,6
XI,7	XX,7	XI,6	XIV,6	XX,6	XIV,7
XVI,1	XVI,1	XVI,4	XVI,3	XVI,3	XVI,4
XVI,2	XVI,2	XVI,2	XVI,2	XVI,2	XVI,2

A	B	Г	Δ	Е	Н
XVI,3	XVI,4	XVI,3	XVI,1	XVI,4	XVI,1
XVI,4	XVI,3	XVI,1	XVI,4	XVI,1	XVI,3
XVI,5	XVI,7	XVI,7	XVI,7	XVI,5	XVI,5
XVI,6	XVI,9	XVI,8	XVI,6	XVI,8	XVI,9
XVI,7	XVI,5	XVI,5	XVI,5	XVI,7	XVI,7
XVI,8	XVI,8	XVI,6	XVI,9	XVI,9	XVI,6
XVI,9	XVI,6	XVI,9	XVI,8	XVI,6	XVI,8
XXII,1	XXII,1	XXII,1	XXII,1	XXII,1	XXII,1

Список литературы

1. Denes J., Keedwell A. D., *Latin squares and their applications*. Academiai Kiado, Budapest, 1974.
2. Белоусов В. Д., *Элементы теории квазигрупп*. КГУ, Кишинев, 1981.
3. Щукин К. К., Гушан В. В., Лупы порядка шесть. *Дискретная математика* (2002) **14**, №2, 134–160.
4. Albert A. A., Quasigroups II. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1944) **55**, 401–419.
5. Сафонова Л. В., Щукин К. К., Вычисление автоморфизмов и антиавтоморфизмов квазигрупп. *Изв. АН ССР Молдова* (1990) **3**, 49–54.
6. Белоусов В. Д., *Парастрофно-ортогональные квазигруппы*. Институт математики АН Молдавской ССР, Кишинев, 1983.
7. Белоусов В. Д., О группе, ассоциированной квазигруппе. *Матем. исследования* (1969) **4**, №3, 22–39.
8. Бегларян В. А., Единалы квазигрупп. *Докл. АН Армянской ССР* (1974), 12–14.

Статья поступила 25.02.2003.

Переработанный вариант поступил 22.12.2003.