Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, В. И. Вахтель, Предельные теоремы для вероятностей больших отклонений процесса Гальтона–Ватсона, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 1, 3–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:48:54

Предельные теоремы для вероятностей больших уклонений процесса Гальтона–Ватсона

© 2003 г. С. В. Нагаев, В. И. Вахтель

В статье доказываются локальная и интегральная предельные теоремы для больших уклонений типа Крамера для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона в предположении, что радиус сходимости производящей функции числа потомков одной частицы строго больше единицы. Доказательство основано на модификации метода Крамера, которая в данном случае сводится к построению вспомогательного неоднородного во времени ветвящегося процесса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02–01–01252, и INTAS, проекты 99–01317, 00–265.

1. Введение

Пусть Z_n — процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся с одной особи в нулевом поколении. Положим

$$p_k = \mathbf{P}(Z_1 = k), \quad k = 0, 1, \dots,$$
$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k,$$

таким образом, $f(s)$ является производящей функцией числа прямых потомков одной особи. Через $f_k(s)$ будем обозначать k -ю итерацию функции $f(s)$. Положим $B = f''(1)$, $C = f'''(1)$. Обозначим через R радиус сходимости функции $f(s)$.

Положим для краткости

$$P_n(u) = \mathbf{P}\left(\frac{2Z_n}{Bn} > u \mid Z_n > 0\right).$$

Известно (см., например, [1], с. 39), что для любого фиксированного u при $0 < B < \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u) = e^{-u}. \quad (1)$$

Первая оценка скорости сходимости в (1) была получена в [2] при условии $C < \infty$, а именно,

$$\Delta_n = \sup_u |P_n(u) - e^{-u}| = O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right). \quad (2)$$

Заметим, что в этой оценке зависимость постоянных от распределения Z_1 является более сложной, чем в классической оценке Берри-Эссеена.

Если положить $u_n = \ln n - (2 + \varepsilon) \ln \ln n$, где $\varepsilon > 0$, то согласно (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \leq u_n} e^u P_n(u) = 1. \quad (3)$$

Если $u > \ln n - (2 - \varepsilon) \ln \ln n$, то из (2) вытекает лишь не зависящая от u верхняя оценка

$$P_n(u) = O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).$$

Таким образом, оценка (2) при больших u содержит не слишком много информации о величине отношения $P_n(u)/e^{-u}$. Как и в схеме суммирования независимых случайных величин, проблема оценки $P_n(u)$ при больших значениях u гораздо проще решается при условии $R > 1$.

В этом предположении в заметке [3] было получено неравенство

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < (1 + y_0) \left(1 + \frac{1}{1/y_0 + B_0 n/2}\right)^{-k}, \quad (4)$$

где y_0 — любое число между 0 и $R - 1$, $B_0 = f''(1 + y_0)$.

Нетрудно видеть, что величина $1/y_0 + B_0 n/2$ достигает минимума, если y_0 является решением уравнения $f'''(1 + y)y^2 = 2/n$, то есть $y_0 = O(1/\sqrt{n})$. Отсюда

$$\min_{y_0} (1/y_0 + B_0 n/2) = \frac{Bn}{2} + O(\sqrt{n}).$$

В результате мы получаем, что

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < (1 + \varepsilon_n) \exp\left(-\frac{2k}{Bn}(1 - \eta_n)\right), \quad (5)$$

где $\varepsilon_n > 0$, $\eta_n > 0$ и $\varepsilon_n = O(1/\sqrt{n})$, $\eta_n = O(1/\sqrt{n})$.

Неравенство (4) является аналогом неравенств Бернштейна и Петрова (см., например, [4], гл. 3, §5).

С другой стороны, из (3) следует, что при $k < Bn(\ln n - (2 + \varepsilon) \ln \ln n)/2$

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) < \frac{2(1 + \varepsilon_n)}{Bn} \exp\left(-\frac{2k}{Bn}\right), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad (6)$$

поскольку ([2], стр. 96)

$$Q_n = \mathbf{P}(Z_n > 0) = \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^2} - \frac{2}{B}\right) \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \quad (7)$$

Мы видим, что оценка (5) менее точна, чем (6), в области, где последняя действует, поскольку в (5) отсутствует множитель $2/(Bn)$ при экспоненте.

В том же предположении $R > 1$ в [5] показано, что (3) остается верным, если $u_n = o(n/\ln n \ln_{(N)} n)$, где $\ln_{(N)} n$ — N -я итерация логарифма, а $N \geq 2$. В этой статье

также доказывается локальная предельная теорема для значений k , соответствующих зоне $0 < u < u_n$, при дополнительном предположении, что наибольший общий делитель $\gcd\{k: p_k > 0\} = 1$. Более точно,

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \frac{4}{B^2 n^2} \exp\left(-\frac{2k}{Bn}\right) (1 + o(1)) \quad (8)$$

равномерно относительно $k = o(n^2 / \ln n \ln_{(N)} n)$.

Если исходить из аналогии со схемой суммирования независимых случайных величин, то следует ожидать, что при $R > 1$ существует зона значений u , в которой

$$P_n(u) = e^{-u} \Omega_n(u) (1 + o(1)), \quad (9)$$

где $\Omega_n(u)$ — явно вычисляемый поправочный множитель, то есть имеет место аналог известной теоремы Крамера (см. [4], стр. 269). Результаты, полученные в настоящей работе, подтверждают эту гипотезу.

Теорема 1. Пусть $R > 1$, $k/n \rightarrow \infty$, $k = o(n^2)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ для k , кратных $d = \gcd\{k: p_k > 0\}$,

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \frac{4d}{B^2 n^2} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{k}{n^2} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right\} \left(1 + O\left(\frac{k}{n^2} + \frac{\ln n}{n}\right)\right), \quad (10)$$

где $\gamma = 1 - 2C/(3B^2)$.

Опираясь на локальную предельную теорему мы получаем интегральную теорему о больших уклонениях.

Теорема 2. В условиях теоремы 1

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) = \frac{2}{Bn} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{k}{n^2} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right\} \left(1 + O\left(\frac{k}{n^2} + \frac{\ln^2 n}{n}\right)\right). \quad (11)$$

Из этой теоремы можно получить точную границу сходимости к экспоненциальному распределению.

Следствие 1. Если $u_n = o(n/\ln n)$, то выполнено соотношение (3).

Нетрудно заметить, что указанная зона не может быть расширена без дополнительных ограничений на процесс Z_n . Если, например, положить $u_n = n/\ln n$, то согласно (11) и (7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{u_n} P_n(u_n) = \exp\left(-\frac{2\gamma}{B}\right) \neq 1$$

при $\gamma \neq 0$. Если же $\gamma = 0$, то сходимость к экспоненциальному распределению будет иметь место при всех $u = o(n)$.

Из (7) и (11) следует, что при $u = o(n)$ справедливо равенство

$$P_n(u) = e^{-u} \exp\left(-\frac{\gamma}{n} u \ln u\right) (1 + o(1)), \quad (12)$$

то есть $\Omega_n(u)$ в (9) задается равенством

$$\Omega_n(u) = \exp\left(-\frac{\gamma}{n} u \ln u\right).$$

Заметим, что, в отличие от классической теоремы Крамера, $\ln \Omega_n(u)$ зависит только от второго и третьего моментов исходного распределения. Это, по-видимому, объясняется тем, что зона, в которой поправочный множитель оказывается существенен, очень узка.

Наш подход к выводу соотношений (10) и (11) существенно отличается от подхода, использованного в [5]. Доказательство теоремы 1 основано на модификации метода Крамера (относительно последнего см., например, [4], гл. 8, §2), которая вкратце описывается следующим образом.

Пусть X — случайная величина, принимающая лишь целые неотрицательные значения. Предположим, что радиус сходимости функции $\rho(s) = \mathbf{E}s^X$ строго больше единицы. Тогда для всякого r такого, что $\rho(r) < \infty$ положим $\rho_r(s) = \rho(rs)/\rho(r)$.

Случайную величину $X(r)$ такую, что $\mathbf{E}s^{X(r)} = \rho_r(s)$ будем называть преобразованием Крамера случайной величины X . С помощью преобразования Крамера случайной величины Z_1 строится неоднородный во времени процесс Гальтона–Ватсона $Y_k, k = 1, \dots, n$, для которого распределение числа потомков одной особи в $(k-1)$ -м поколении задается производящей функцией $f(r_{k-1}s)/f(r_{k-1})$, где параметры r_k преобразования Крамера вычисляются согласно рекуррентному соотношению $r_k = f(r_{k-1})$. Тогда распределение исходного и вспомогательного процессов будут связаны следующим образом:

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = f_n(r_0)r_0^{-k}\mathbf{P}(Y_n = k), \quad \mathbf{P}(Z_n \geq k) = f_n(r_0)\mathbf{E}\{r_0^{-Y_n}; Y_n \geq k\}.$$

Свободный параметр r_0 выбирается таким образом, чтобы большие отклонения для исходного процесса свести к нормальным для вспомогательного.

Отметим, что неоднородные во времени ветвящиеся процессы были предметом исследования в статье [6]. В указанной статье получены условия сходимости к экспоненциальному распределению и оценка скорости сходимости, которая в случае критического процесса Гальтона–Ватсона совпадает с оценкой (2).

В классической теореме Крамера асимптотика математического ожидания, связывающего распределение исходной суммы и вспомогательной, находится с помощью неравенства Берри–Эссеена. В случае же ветвящегося процесса такой подход не позволяет найти асимптотику $\mathbf{E}\{r_0^{-Y_n}; Y_n \geq k\}$, поскольку оценка типа Берри–Эссеена для вспомогательного процесса оказывается для этой цели слишком грубой.

Если $d > 1$, то можно произвести редукцию к аperiodическому случаю. Рассмотрим процесс Z_n^* , построенный по производящей функции

$$g(s) = (f(s^{1/d}))^d = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^* s^i.$$

Очевидно, что радиус сходимости $g(s)$ также будет больше единицы и

$$d^* = \gcd\{k: p_k^* > 0\} = 1.$$

Кроме того, $B^* = g''(1) = B/d$, $C^* = g'''(1) = C/d^2$. Следовательно, $\gamma^* = \gamma$.

Несложно заметить, что для всякого $n \geq 1$

$$g_n(s) = (f_n(s^{1/d}))^d.$$

Это равенство означает, что процесс Z_n^* можно представить следующим образом:

$$Z_n^* = \frac{1}{d}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(d)}), \quad (13)$$

где $Z_n^{(i)}, i = 1, \dots, d$, — независимые случайные величины, распределенные как и Z_n . Из этого представления следует неравенство

$$\mathbf{P}(Z_n^* = k) = \mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(d)} = kd) \geq d(1 - Q_n)^{d-1} \mathbf{P}(Z_n = kd). \quad (14)$$

С другой стороны ([7], стр.602, формула (4.11))

$$\mathbf{P}(Z_n = kd) \geq \mathbf{P}(Z_{n-1}^* = k) \sum_{l=1}^{\infty} l p_{ld} \mathbf{P}^{l-1}(Z_n^* = 0). \quad (15)$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} l p_{ld} \mathbf{P}^{l-1}(Z_n^* = 0) = (f(s^{1/d}))'|_{s=1} + O(\mathbf{P}(Z_n^* > 0)) = \frac{1}{d} + O(n^{-1}).$$

Из оценок (14), (15) и последнего соотношения следует, что равномерно по всем k

$$\mathbf{P}(Z_n = kd) \leq \frac{1}{d} \mathbf{P}(Z_n^* = k)(1 + O(n^{-1})), \quad (16)$$

$$\mathbf{P}(Z_n = kd) \geq \frac{1}{d} \mathbf{P}(Z_{n-1}^* = k)(1 + O(n^{-1})). \quad (17)$$

Если предположить, что утверждения теоремы верны для апериодического случая, то применяя ее к процессу Z_n^* , получим, что

$$\mathbf{P}(Z_n^* = k) = \frac{4d^2}{B^2 n^2} \exp \left\{ -\frac{2kd}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{kd}{n^2} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right\} \left(1 + O \left(\frac{k}{n^2} + \frac{\ln n}{n} \right) \right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{P}(Z_{n-1}^* = k) = \mathbf{P}(Z_n^* = k) \left(1 + O \left(\frac{k}{n^2} + \frac{\ln n}{n} \right) \right)$$

при $k = o(n^2)$. Из двух последних соотношений и неравенств (16), (17) следует равенство

$$\mathbf{P}(Z_n = kd) = \frac{4d}{B^2 n^2} \exp \left\{ -\frac{2kd}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{kd}{n^2} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right\} \left(1 + O \left(\frac{k}{n^2} + \frac{\ln n}{n} \right) \right),$$

то есть доказано, что из справедливости (10) в апериодическом случае выводится (10) для произвольной $f(s)$. Аналогично показывается, что и (11) остается верным при $d > 1$. Таким образом, достаточно доказать теоремы 1 и 2 в предположении, что $d = 1$. Необходимо отметить, что такая же редукция к апериодическому случаю использовалась авторами работы [7] при доказательстве локальной предельной теоремы. Однако, они вывели оценку, аналогичную (14), не используя представление (13), что существенно увеличило технические трудности, которые им пришлось преодолеть.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. Пусть $0 < y_0 < R - 1$, последовательность y_j задается уравнением

$$y_{j+1} = f^{-1}(1 + y_j) - 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_j = & \frac{y_0}{1 + Bjy_0/2} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{3B} \right) \frac{y_0^2}{(1 + Bjy_0/2)^2} \ln \left(1 + \frac{Bjy_0}{2} \right) \\ & + O \left(\frac{y_0^2}{(1 + Bjy_0/2)^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Утверждение леммы по форме аналогично утверждению теоремы 3 работы [2]. Доказательство также во многом повторяет доказательство указанного результата.

Доказательство. Из определения y_j следует, что

$$y_j = f(1 + y_{j+1}) - 1.$$

Нетрудно заметить, что $f(1 + y) \geq 1 + y$ при $y \geq 0$. Следовательно, последовательность y_j убывает. Отсюда вытекает существование предела y_j при $j \rightarrow \infty$. Очевидно, что этот предел должен удовлетворять уравнению $y = f(1 + y) - 1$. Но единственным корнем этого уравнения является $y = 0$. Это означает, что $y_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{i=0}^j y_i = o(j).$$

Раскладывая $f(1 + z)$ в ряд Тейлора, получаем, что

$$y_j = y_{j+1} + \frac{B}{2} y_{j+1}^2 + \frac{C}{6} y_{j+1}^3 + O(y_{j+1}^4). \quad (19)$$

Из этого соотношения следует, что

$$\begin{aligned} \frac{y_{j+1}}{y_j} &= \frac{1}{1 + By_{j+1}/2 + O(y_{j+1}^2)} = 1 - \frac{By_{j+1}}{2} + O(y_{j+1}^2) \\ &= 1 - \frac{By_j}{2} + O(y_j^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Разделив обе части (19) на $y_j y_{j+1}$ и воспользовавшись (20), получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_{j+1}} &= \frac{1}{y_j} + \frac{B}{2} - \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6} \right) y_j + O(y_j^2) = \dots = \\ &= \frac{1}{y_0} + \frac{Bj}{2} - \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6} \right) \sum_{i=0}^j y_i + O \left(\sum_{i=0}^j y_i^2 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{y_j} = \frac{1}{y_0} + \frac{B}{2} j + o(j).$$

Это, в свою очередь, означает, что

$$y_j = \frac{y_0}{1 + Bjy_0/2} (1 + o(1)) \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j-1} y_i^2 &= O \left(\sum_{i=0}^{j-1} \frac{y_0^2}{(1 + Biy_0/2)^2} \right) \\ &= O \left(y_0 \int_0^\infty \frac{y_0 dx}{(1 + Bx y_0/2)^2} \right) = O(y_0). \end{aligned} \quad (23)$$

Исследуем теперь поведение $\sum_{i=0}^{j-1} y_i$. Используя неравенства

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{y_0}{1 + Biy_0/2} \leq y_0 + \int_0^j \frac{y_0 dx}{1 + Bx y_0/2} = y_0 + \frac{2}{B} \ln(1 + Bjy_0/2), \quad (24)$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \frac{y_0}{1 + Biy_0/2} \geq \int_0^j \frac{y_0 dx}{1 + Bx y_0/2} = \frac{2}{B} \ln(1 + Bjy_0/2), \quad (25)$$

приходим к соотношению

$$\sum_{i=0}^{j-1} y_i = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{y_0}{1 + Biy_0/2} (1 + o(1)) = O(\ln(1 + Bjy_0/2)).$$

Из (21) и последнего равенства заключаем, что

$$\frac{1}{y_j} = \frac{1}{y_0} + \frac{B}{2} j + O(\ln(1 + Bjy_0/2)).$$

Отсюда следует, что

$$y_j = \frac{y_0}{1 + Bjy_0/2} + O \left(\frac{y_0^2}{(1 + Bjy_0/2)^2} \ln(1 + Bjy_0/2) \right).$$

С помощью этого соотношения можно оценить $\sum_{i=0}^{j-1} y_i$ с необходимой для доказательства леммы точностью:

$$\sum_{i=0}^{j-1} y_i = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{y_0}{1 + Biy_0/2} + O \left(y_0^2 \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\ln(1 + Biy_0/2)}{(1 + Biy_0/2)^2} \right).$$

Нетрудно заметить, что второе слагаемое в правой части предыдущего равенства есть $O(y_0)$.

Вновь применяя (24) и (25), получаем, что

$$\sum_{i=0}^{j-1} y_i = \frac{2}{B} \ln(1 + Bjy_0/2) + O(y_0). \quad (26)$$

Из (21), (23) и (26) заключаем, что

$$\frac{1}{y_j} = \frac{1}{y_0} + \frac{B}{2}j - \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{3B}\right) \ln(1 + Bjy_0/2) + O(y_0).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Положим $r_0 = 1 + y_n$ и для $i = 1, \dots, n$ определим вероятностную производящую функцию

$$g_j(s) = \frac{f(s f_{j-1}(r_0))}{f_j(r_0)}.$$

Введем обозначения

$$A_j = g'_j(1), \quad A(j) = A_1 \dots A_j, \quad B_j = g''_j(1), \quad T(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{B_{j+1}}{2A_{j+1}} A(j).$$

Лемма 2. Предположим, что $y_0 \rightarrow 0$. Тогда равномерно по $1 \leq j \leq n$ и $1 \leq l \leq n$

$$A(j) = \left(\frac{1 + Bny_0/2}{1 + B(n-j)y_0/2} \right)^2 (1 + O(y_0)), \quad (27)$$

$$T(l) = \frac{Bl(1 + Bny_0/2)}{2(1 + B(n-l)y_0/2)} (1 + O(y_0)). \quad (28)$$

Доказательство. Из определения $A(j)$ и $g_j(s)$ сразу следует, что

$$A(j) = \frac{r_0}{f_j(r_0)} \prod_{i=0}^{j-1} f'(1 + y_{n-i}) = \frac{r_0}{f_j(r_0)} \exp \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} \ln f'(1 + y_{n-i}) \right\}.$$

Применяя соотношения

$$f'(1+z) = 1 + Bz + O(z^2), \quad \ln(1+t) = t + O(t^2),$$

получаем, что

$$A(j) = \frac{r_0}{f_j(r_0)} \exp \left\{ B \sum_{i=0}^{j-1} y_{n-i} + O \left(\sum_{i=0}^{j-1} y_{n-i}^2 \right) \right\}.$$

В силу (23) и (26)

$$\begin{aligned} A(j) &= \frac{r_0}{f_j(r_0)} \exp \{ 2 \ln(1 + Bny_0) - 2 \ln(1 + B(n-j)y_0) \} + O(y_0) \\ &= \frac{r_0}{f_j(r_0)} \left(\frac{1 + Bny_0/2}{1 + B(n-j)y_0/2} \right)^2 (1 + O(y_0)). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{r_0}{f_j(r_0)} = \frac{1 + y_n}{1 + y_{n-j}} = 1 + O(y_0).$$

Из двух последних соотношений следует (27).

Перейдем к доказательству (28). Очевидно, что равномерно по i

$$B_i = B(1 + O(y_0)), \quad A_i = 1 + O(y_0).$$

Поэтому

$$T(l) = \left(\frac{B}{2} \sum_{j=0}^{l-1} A(j) \right) (1 + O(y_0)).$$

Применяя (27), получаем, что

$$T(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{B}{2} \left(\frac{1 + Bny_0/2}{1 + B(n-j)y_0/2} \right)^2 (1 + O(y_0)). \quad (29)$$

Далее, в силу убывания функции $B/(2(1 + Bxy_0/2)^2)$ справедливы неравенства

$$\int_{n-l+1}^{n+1} \frac{B dx}{2(1 + Bxy_0/2)^2} \leq \sum_{j=0}^{l-1} (1 + B(n-j)y_0/2)^{-2} \leq \int_{n-l}^n \frac{B dx}{2(1 + Bxy_0/2)^2}.$$

Нетрудно видеть, что каждый интеграл в предыдущем неравенстве есть

$$\frac{Bl}{2(1 + Bny_0/2)(1 + B(n-l)y_0/2)} (1 + O(y_0)).$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^{l-1} (1 + B(n-j)y_0/2)^{-2} = \frac{Bl}{2(1 + Bny_0/2)(1 + B(n-l)y_0/2)} (1 + O(y_0)). \quad (30)$$

Из (29) и (30) следует требуемое соотношение.

Пусть

$$\rho(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k s^k,$$

положим

$$\|\rho\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |\rho_k|.$$

Очевидно, что $\|\cdot\|_1$ обладает всеми свойствами нормы.

Лемма 3. Пусть $\rho(s)$ — вероятностная производящая функция. Положим $a = \rho'(1)$, $b = \rho''(1)$. Тогда

$$\frac{1}{1 - \rho(s)} = \frac{1}{a(1-s)} + \frac{b}{2a^2} + (\delta(s) - \eta(s)) \frac{(1-s)^2}{1 - \rho(s)}, \quad (31)$$

где

$$\delta(s) = \frac{b(\rho(s) - 1 - a(s-1))}{2a^2(s-1)^2}, \quad \eta(s) = \frac{\rho(s) - 1 - a(s-1) - b(s-1)^2/2}{a(s-1)^3}.$$

Если дополнительно потребовать, что $c = \rho'''(1) < \infty$, то

$$\|\delta(s) - \eta(s)\|_1 \leq \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{6a}.$$

Доказательство. Из равенства

$$\frac{1}{1-\rho(s)} - \frac{1}{a(1-s)} = \left(\frac{\rho(s) - 1 - a(s-1)}{a(s-1)^2} \right) \frac{(1-s)}{1-\rho(s)} \quad (32)$$

вытекает, что

$$\frac{1}{1-\rho(s)} - \frac{1}{a(1-s)} = \frac{b(1-s)}{2a(1-\rho(s))} - \eta(s) \frac{(1-s)^2}{1-\rho(s)}. \quad (33)$$

Кроме того из (32) следует, что

$$\frac{1-s}{1-\rho(s)} = \frac{1}{a} + \left(\frac{\rho(s) - 1 - a(s-1)}{a(s-1)^2} \right) \frac{(1-s)^2}{1-\rho(s)}. \quad (34)$$

Подставляя в (33), приходим, в итоге, к соотношению (31).

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\rho(s) - 1 - a(s-1)}{(s-1)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \rho_k \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{i-1} s^j.$$

Поэтому

$$\left\| \frac{\rho(s) - 1 - a(s-1)}{(s-1)^2} \right\|_1 = \frac{b}{2}. \quad (35)$$

Аналогично находим, что

$$\left\| \frac{\rho(s) - 1 - a(s-1) - b(s-1)^2}{(s-1)^3} \right\|_1 = \frac{c}{6}. \quad (36)$$

Из неравенств (35) и (36) вытекает оценка

$$\|\delta(s) - \eta(s)\|_1 \leq \|\delta(s)\|_1 + \|\eta(s)\|_1 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{6a}.$$

Лемма доказана.

Положим $G_i(s) = g_i \circ \dots \circ g_1(s) = f_i(r_0s)/f_i(r_0)$, $q_i(s) = 1 - G_i(s)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $y_0 \rightarrow 0$.

Лемма 4. Для всякого $i \geq 1$ выполняется неравенство

$$\|q_i(s)\|_1 \leq 2(Q_i + y_{n-i}). \quad (37)$$

Из этой оценки следует, что $q_i(s) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ равномерно по s из единичного круга.

Доказательство. Пусть

$$\rho(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k s^k$$

— вероятностная производящая функция. Несложно заметить, что

$$\|1 - \rho(s)\|_1 = (1 - \rho_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = 2(1 - \rho(0)).$$

Применяя это равенство к $G_i(s)$, находим, что

$$\|q_i(s)\|_1 = 2 \left(1 - \frac{f_i(0)}{f_i(r_0)} \right) = 2 \frac{f_i(r_0) - f_i(0)}{f_i(r_0)} \leq 2(Q_i + f_i(r_0) - 1).$$

Учитывая то, что $f(r_0) = 1 + y_{n-i}$, получаем неравенство (37).

Сходимость к нулю величины $\|q_i(s)\|_1$ следует из того, что $Q_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $y_0 \rightarrow 0$. Равномерная в единичном круге сходимость $q_i(s)$ к нулю вытекает из неравенства $\sup_{|s| \leq 1} |q_i(s)| \leq \|q_i(s)\|_1$.

Лемма 5. Пусть $\gcd\{k: p_k > 0\} = 1$. Тогда найдется число N такое, что при $j \geq N$, $|s| \leq 1$

$$q_j(s) = \frac{A(j)}{(1-s)^{-1} + T(j)} \left(1 - \frac{R_N(s) + \sum_{i=N}^{j-1} A(i)q_i(s)C_i(s)}{(1-s)^{-1} + T(j)} \right)^{-1}, \quad (38)$$

где $C_i(s)$, $R_N(s)$ — некоторые аналитические в единичном круге функции, причем $\|C_i(s)\|_1 \leq C$, $\|R_N(s)\|_1 < \infty$.

Доказательство. Подставляя в (31) $\rho = g_{j+1}$, $s = G_j$, получаем равенство

$$\frac{1}{q_{j+1}(s)} = \frac{1}{A_{j+1}q_j(s)} + \frac{B_{j+1}}{2A_{j+1}^2} - d_{j+1}(s) \frac{q_j^2(s)}{A_{j+1}q_{j+1}(s)},$$

где

$$d_{j+1}(s) = -A_{j+1}(\delta_{j+1}(1 - q_j(s)) - \eta_{j+1}(1 - q_j(s))).$$

Умножая обе части этого равенства на $A(j+1)$, приходим к рекуррентному соотношению

$$b_{j+1}(s) = b_j(s) + \frac{B_{j+1}}{2A_{j+1}} A(j) - d_{j+1}(s) A(j) \frac{q_j^2(s)}{q_{j+1}(s)},$$

где $b_j(s) = A(j)/q_j(s)$. Из этого равенства нетрудно получить следующее разложение функции $b_j(s)$:

$$\begin{aligned} b_j(s) &= b_N(s) + T(j) - T(N) - \sum_{i=N}^{j-1} A(i)q_i(s)C_i(s) \\ &= \frac{1}{1-s} + T(j) - R_N(s) - \sum_{i=N}^{j-1} A(i)q_i(s)C_i(s), \end{aligned}$$

где

$$C_i(s) = d_{i+1}(s)q_i/q_{i+1}(s), \quad R_N(s) = (1-s)^{-1} + T(N) - b_N(s),$$

N — произвольное натуральное число, меньшее j . Отсюда следует представление (38).

Осталось показать, что функции $C_i(s)$, $R_N(s)$ аналитические и их нормы ограничены. Из леммы 3 следует, что

$$\|d_{j+1}\|_1 \leq A_{j+1}(\|\delta_{j+1}\|_1 + \|\eta_{j+1}\|_1) \leq \left(\frac{(g''_{j+1}(1))^2}{4A_{j+1}} + \frac{g'''_{j+1}(1)}{6} \right). \quad (39)$$

Из этого соотношения вытекает, что величины $\|d_{j+1}\|_1$ равномерно ограничены.

Если предположить, что $\gcd\{k: \rho_k > 0\} = 1$, то функция $(1 - \rho(s))/(1 - s)$ не будет иметь нулей в единичном круге. Действительно, если s_0 является нулем этой функции, то $\rho(s_0) = 1$. Следовательно, $|s_0| = 1$ и $s_0^k = 1$ для всякого k такого, что $\rho_k > 0$. Из условия апериодичности вытекает, что единственной точкой, удовлетворяющей этим условиям, является $s_0 = 1$. Но эта точка не является нулем функции $(1 - \rho(s))/(1 - s)$, так как

$$\left. \frac{1 - \rho(s)}{1 - s} \right|_{s=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k (1 + \dots + s^{k-1})|_{s=1} = a.$$

Из тауберовой теоремы Винера (см., например, [8], стр. 96) заключаем, что функция $(1 - s)/(1 - \rho(s))$ является аналитической и $\|(1 - s)/(1 - \rho(s))\|_1 < \infty$.

Из апериодичности последовательности p_k следует, что коэффициенты функции $g_j(s)$ также образуют апериодическую последовательность. Следовательно,

$$\left\| \frac{q_j}{q_{j+1}} \right\|_1 \leq \left\| \frac{1 - s}{1 - g_{j+1}(s)} \right\|_1 < \infty.$$

Более того, из соотношения (34) вытекает оценка

$$\left\| \frac{q_j}{q_{j+1}} \right\|_1 \leq \frac{1}{A_{j+1}} + \frac{B_{j+1}}{2A_{j+1}} \left\| \frac{q_j}{q_{j+1}} \right\|_1 \|q_j\|_1.$$

Привлекая лемму 4, заключаем, что

$$\left\| \frac{q_j}{q_{j+1}} \right\|_1 \leq 2 \quad (40)$$

при всех j , начиная с некоторого и достаточно малых y_0 .

Из (39) и (40) вытекает ограниченность норм $C_i(s)$ при всех i , начиная с некоторого номера N .

Рассмотрим теперь функцию $R_N(s)$. Ясно, что

$$\|R_N(s)\|_1 \leq T(N) + A(N) \left\| \frac{1}{q_N(s)} - \frac{1}{A(N)(1 - s)} \right\|_1.$$

Полагая в (32) $\rho(s) = G_N(s)$, получаем, что

$$\frac{1}{q_N(s)} - \frac{1}{A(N)(1 - s)} = \left(\frac{G_N(s) - 1 - A(N)(s - 1)}{A(N)(s - 1)^2} \right) \frac{1 - s}{q_N(s)}.$$

Применяя равенство (35), находим, что

$$\left\| \frac{G_N(s) - 1 - A(N)(s - 1)}{A(N)(s - 1)^2} \right\|_1 = \frac{G''_N(1)}{2A(N)} = \frac{T(N)}{2A(N)}.$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{1}{q_N(s)} - \frac{1}{A(N)(1-s)} \right\|_1 \leq \frac{T(N)}{2} \left\| \frac{1-s}{q_N(s)} \right\|_1.$$

Ограниченность величины $\|(1-s)/q_N(s)\|_1$ вытекает из аperiodичности коэффициентов функции $G_N(s)$ и упомянутой выше теоремы Винера. В итоге получаем ограниченность $R_N(s)$ по норме.

Лемма 6. При $i \rightarrow \infty$

$$q_i(s) \left(\frac{(1-s)^{-1} + T(i)}{A(i)} \right) \rightarrow 1 \quad (41)$$

равномерно по всем s из единичного круга.

Доказательство. Очевидно, что для доказательства леммы достаточно убедиться в том, что имеет место равномерная в единичном круге сходимость к нулю функции

$$\frac{R_N(s) + \sum_{i=N}^{j-1} A(i)q_i(s)C_i(s)}{(1-s)^{-1} + T(j)}.$$

Пусть α_i, β_i — числовые последовательности, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \rightarrow \infty, \quad \beta_i \rightarrow 0.$$

Тогда, как нетрудно убедиться,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \rightarrow 0.$$

Из определения $T(j)$ следует, что

$$\sum_{i=N}^{j-1} A(i) = O(T(j)).$$

Согласно лемме 4 $q_i(0) \rightarrow 0$. Из этих фактов вытекает соотношение

$$\frac{\sum_{i=N}^{j-1} A(i)q_i(0)}{T(j)} \rightarrow 0. \quad (42)$$

Очевидно, что

$$\left\| \frac{R_N(s) + \sum_{i=N}^{j-1} A(i)q_i(s)C_i(s)}{(1-s)^{-1} + T(j)} \right\|_1 \leq \frac{\|R_N(s)\|_1 + \sum_{i=N}^{j-1} A(i)\|q_i(s)\|_1\|C_i(s)\|_1}{T(j)}.$$

Из того, что $\|R_N(s)\|_1 < \infty$ и $T(j) \rightarrow \infty$, следует соотношение $\|R_N(s)\|_1/T(j) \rightarrow 0$. Пользуясь леммами 4 и 5, получаем, что

$$\frac{1}{T(j)} \sum_{i=N}^{j-1} A(i)\|q_i(s)\|_1\|C_i(s)\|_1 \leq \frac{2C}{T(j)} \sum_{i=N}^{j-1} A(i)q_i(0).$$

Вследствие (42) правая часть в последнем неравенстве стремится к нулю. В итоге получаем, что

$$\left\| \frac{R_N(s) + \sum_{i=N}^{j-1} A(i)q_i(s)C_i(s)}{(1-s)^{-1} + T(j)} \right\|_1 \rightarrow 0.$$

Это, в свою очередь, означает, что функция

$$\frac{R_N(s) + \sum_{i=N}^{j-1} A(i)q_i(s)C_i(s)}{(1-s)^{-1} + T(j)}$$

сходится к нулю равномерно по s из единичного круга.

Лемма доказана.

Пусть $\rho(s)$ — степенной ряд. Через $a_k[\rho(s)]$ будем обозначать k -й коэффициент этого ряда.

Лемма 7. Пусть $\rho(s)$ — вероятностная производящая функция и $\rho'(1) < \infty$. Тогда для всякого $a > 0$ справедливо неравенство

$$a_l[\rho(s)] \leq \frac{1}{l} \int_{-a}^a |\rho'(e^{it})| dt. \quad (43)$$

Доказательство. Очевидно, что функция $\rho'(s)/\rho'(1)$ является вероятностной производящей функцией. Известна следующая оценка для функции концентрации ([4], стр. 56)

$$\sup_x \mathbf{P}(X = x) \leq (96/95)^2 (la)^{-1} \int_{-a}^a |\varphi(t)| dt,$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция величины X , $a > 0$.

Применяя эту оценку к случайной величине с распределением, соответствующим производящей функции $\rho'(s)/\rho'(1)$, получаем, что

$$\sup_l a_l[\rho'(s)/\rho'(1)] \leq (96/95)^2 a^{-1} \int_{-a}^a |\rho'(e^{it})/\rho'(1)| dt.$$

Нетрудно заметить, что для любого $l \geq 1$

$$a_l[\rho(s)] = \frac{1}{l} a_l[\rho'(s)].$$

Утверждение леммы следует из двух последних соотношений.

Лемма 8. Существует константа M_1 такая, что

$$|G'_k(s)| \leq M_1 A(k) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{A_i} \operatorname{Re}(q_{i-1}(s)) \right\}. \quad (44)$$

Доказательство. Из определения $G_k(s)$ следует, что

$$G'_k(s) = \prod_{i=1}^k g'_i(G_{i-1}(s)) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^k \ln g'_i(G_{i-1}(s)) \right\}.$$

Теперь, в силу равенств

$$\begin{aligned} g'_i(s) &= g'_i(1) + B_i(s-1) + O((s-1)^2), \\ \ln g'_i(s) &= \ln g'_i(1) + \ln(1 + B_i(s-1)/g'_i(1) + O((s-1)^2)) \\ &= \ln g'_i(1) + \frac{B_i}{A_i}(s-1) + O((s-1)^2) \end{aligned}$$

получаем, что

$$G'_k(s) = A(k) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{A_i} q_{i-1}(s) + O \left(\sum_{i=1}^k q_{i-1}^2(s) \right) \right\}. \quad (45)$$

Пользуясь неравенством (37), находим, что

$$\sum_{i=1}^k |q_{i-1}(s)|^2 \leq 4 \sum_{i=0}^{k-1} Q_i^2 + 4 \sum_{j=0}^{k-1} y_j^2. \quad (46)$$

Ограниченность первой суммы в правой части вытекает из того, что $Q_i = O(1/i)$, а ограниченность второй — из (23). Это означает, что существует константа M_1 такая, что

$$|G'_k(s)| \leq M_1 A(k) \left| \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{A_i} q_{i-1}(s) \right\} \right|.$$

Принимая во внимание формулу $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, приходим к требуемому неравенству.

Лемма 9. Существует натуральное N такое, что для всех $k > N$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^k \frac{B_j}{A_j} \operatorname{Re}(q_{j-1}(e^{it})) \geq \frac{3}{4} \ln \left(1 + \frac{(2T(k)+1)^2(1-\cos t)^2}{\sin^2 t} \right) - a(N), \quad (47)$$

где $a(N)$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Согласно лемме 6 при $j \rightarrow \infty$

$$q_j(s) \left(\frac{(1-s)^{-1} + T(j)}{A(j)} \right) \rightarrow 1$$

равномерно по s из единичного круга. Это означает, что существует число N такое, что для всех $j \geq N$

$$\operatorname{Re}(q_j(s)) \geq \frac{3}{4} \operatorname{Re} \left[\frac{A(j)}{(1-s)^{-1} + T(j)} \right] - \frac{1}{4} \left| \operatorname{Im} \left[\frac{A(j)}{(1-s)^{-1} + T(j)} \right] \right|.$$

Положим $s = e^{it}$. Пользуясь соотношением

$$\frac{1}{1-s} = \frac{1}{(1-\cos t) - i \sin t} = \frac{1}{2} + \frac{i \sin t}{2(1-\cos t)}$$

получаем, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left[\frac{A(j)}{(1-s)^{-1} + T(j)} \right] &= \frac{2A(j)(2T(j)+1)}{(2T(j)+1)^2 + \sin^2 t (1 - \cos t)^{-2}}, \\ \operatorname{Im} \left[\frac{A(j)}{(1-s)^{-1} + T(j)} \right] &= -\frac{2A(j)(1 - \cos t) \sin^{-1} t}{1 + (2T(j)+1)^2 (1 - \cos t)^2 \sin^{-2} t}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{j=N}^{k-1} \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}} \operatorname{Re}(q_j(s)) &\geq \frac{3}{4} \sum_{j=N}^{k-1} \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}} \frac{2A(j)(2T(j)+1)}{(2T(j)+1)^2 + \sin^2 t (1 - \cos t)^{-2}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}} \frac{2A(j)(1 - \cos t) |\sin^{-1} t|}{1 + (2T(j)+1)^2 (1 - \cos t)^2 \sin^{-2} t}.\end{aligned}\quad (48)$$

В силу определения $T(j)$

$$\frac{B_{j+1}}{2A_{j+1}} A(j) = T(j+1) - T(j) = \Delta T(j).$$

Значит,

$$\begin{aligned}\sum_{j=N}^{k-1} \frac{4(2T(j)+1)\Delta T(j)}{(2T(j)+1)^2 + \sin^2 t (1 - \cos t)^{-2}} &\geq \int_{2T(N)+1}^{2T(k)+1} \frac{2x \, dx}{x^2 + \sin^2 t (1 - \cos t)^{-2}} \\ &= \ln \left(1 + \frac{(2T(k)+1)^2 (1 - \cos t)^2}{\sin^2 t} \right) - \ln \left(1 + \frac{(2T(N)+1)^2 (1 - \cos t)^2}{\sin^2 t} \right).\end{aligned}\quad (49)$$

Аналогично показывается, что

$$\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}} \frac{2A(j)(1 - \cos t) |\sin^{-1} t|}{1 + (2T(j)+1)^2 (1 - \cos t)^2 \sin^{-2} t} \leq \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.\quad (50)$$

Утверждение леммы легко следует из (48), (49) и (50).

Лемма 10. Существует константа M_2 такая, что для всех $k, l \geq 1$

$$|a_l[q_k(s)]| \leq M_2 \frac{A(k)}{lT(k)}.\quad (51)$$

Доказательство. Очевидно, что $a_l[q_k(s)] = -a_l[G_k(s)]$. Поэтому надо показать, что оценка (51) имеет место для коэффициентов функции $G_k(s)$.

Из лемм 8 и 9 заключаем, что

$$|G'_k(e^{it})| \leq c_1 A(k) T^{-3/2}(k) \frac{|\sin t|^{3/2}}{(1 - \cos t)^{3/2}},\quad (52)$$

где c_1 – некоторая постоянная.

Полагая в неравенстве (43) $\rho = G_k$, $a = \Pi/2$, получаем, что

$$a_l[G_k(s)] \leq \frac{1}{l} \left(\int_{1/T(k) < |t| < \Pi/2} |G'_k(e^{it})| dt + \int_{|t| < 1/T(k)} |G'_k(e^{it})| dt \right). \quad (53)$$

Из очевидной оценки $|G'_k(e^{it})| \leq G'_k(1) = A(k)$ вытекает неравенство

$$\int_{|t| < 1/T(k)} |G'_k(e^{it})| dt \leq 2 \frac{A(k)}{T(k)}. \quad (54)$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{|\sin t|}{|1 - \cos t|} \leq \frac{2}{|t|}.$$

Применяя эту оценку к правой части (52), находим, что

$$|G'_k(e^{it})| \leq 4c_1 A(k) T^{-3/2}(k) |t|^{-3/2}.$$

Следовательно,

$$\int_{1/T(k) < |t| < \pi/2} |G'_k(e^{it})| dt \leq 4c_1 A(k) T^{-3/2}(k) \int_{1/T(k) < |t| < \pi/2} |t|^{-3/2} dt \leq c_2 \frac{A(k)}{T(k)}. \quad (55)$$

Комбинируя (53), (54) и (55), получаем требуемое неравенство.

Пусть $\{\tau_k\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$K_\tau = \sup_{n \geq 1} \sup_{k \geq n/2} \left(\frac{\tau_k}{\tau_n} \right) < \infty.$$

Для всякого $\rho(s)$ такого, что $\|\rho(s)\|_1 < \infty$ положим

$$P_\tau(\rho) = \sup_{n \geq 1} |\rho_n|/\tau_n.$$

В статье [9] получено неравенство

$$P_\tau(\rho_1 \rho_2) \leq K_\tau (P_\tau(\rho_1) \|\rho_2\|_1 + P_\tau(\rho_2) \|\rho_1\|_1). \quad (56)$$

С помощью этой оценки нетрудно получить следующий результат.

Лемма 11. Пусть

$$\lambda(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i t^i$$

— ряд с неотрицательными коэффициентами, сходящийся при $|t| < t_0$. Тогда для всякого $\rho(s)$ такого, что $K_\tau \|\rho\|_1 < t_0$

$$P_\tau(\lambda(\rho)) \leq \lambda'(K_\tau \|\rho\|_1) P_\tau(\rho). \quad (57)$$

Доказательство. При помощи математической индукции из неравенства (56) легко выводится оценка

$$P_{\tau}(\rho^i) \leq H_i \|\rho\|_1^{i-1} P_{\tau}(\rho),$$

где числа H_i вычисляются следующим образом:

$$H_1 = 1, \quad H_{i+1} = K_{\tau}(1 + H_i).$$

Очевидно, что $K_{\tau} \geq 1$. Значит,

$$H_{i+1} \leq K_{\tau}^i + K_{\tau} H_i \leq \dots \leq (i+1) K_{\tau}^i.$$

Следовательно,

$$P_{\tau}(\rho^i) \leq i K_{\tau}^{i-1} \|\rho\|_1^{i-1} P_{\tau}(\rho).$$

С другой стороны,

$$P_{\tau}(\lambda(\rho)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_{\tau}(\rho^i).$$

Комбинируя два последних неравенства, приходим к утверждению леммы.

Всюду в дальнейшем будем полагать $\tau_n = n^{-1}$. Очевидно, что $K_{\tau} = 2$.

Лемма 12. *Существует константа M_3 такая, что для любого i , начиная с некоторого номера N , имеет место неравенство*

$$P_{\tau}(C_i) \leq M_3 \frac{A(i)}{T(i)}. \quad (58)$$

Доказательство. Пусть $\delta(s)$ — функция, определенная в лемме 3. Предположим, что производящая функция $\rho(s)$, по которой построена $\delta(s)$, сходится в круге радиуса $R = 1 + t_0$. Несложно убедиться в том, что

$$\delta(s) = \frac{b}{2a^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\rho^{(i)}(1)}{i!} (s-1)^{i-2}.$$

Пусть $q(s)$ — степенной ряд с конечной нормой, причем его норма удовлетворяет условию $\|q\|_1 < t_0/K_{\tau}$. Тогда, согласно лемме 11,

$$\begin{aligned} P_{\tau}(\delta(1-q)) &\leq P_{\tau}(q) \frac{b}{2a^2} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\rho^{(i)}(1)}{i!} (i-2)(K_{\tau}\|q\|_1)^{i-3} \\ &\leq P_{\tau}(q) \frac{b}{2a^2} \rho^{(3)}(1 + K_{\tau}\|q\|_1). \end{aligned} \quad (59)$$

Из леммы 10 заключаем, что

$$P_{\tau}(q_i) \leq M_2 \frac{A(i)}{T(i)}. \quad (60)$$

Из того, что $\|q_i\|_1$ и y_0 стремятся к нулю, следует, что для всех $i \geq N$

$$(1 + 2\|q_i\|_1)(1 + y_0) < \frac{R+1}{2}.$$

Несложно заметить, что

$$g_{i+1}^{(3)}(1+x) \leq (1+y_0)^2 f^{(3)}((1+x)(1+y_0)).$$

Полагая в (59) $\rho = g_{i+1}$, $q = q_i$ и учитывая две последние оценки, получаем, что

$$P_\tau(\delta_{i+1}(1-q_i)) \leq P_\tau(q_i) \frac{B_{i+1}}{2A_{i+1}^2} (1+y_0)^2 f^{(3)}((R+1)/2).$$

Из того, что

$$B_{i+1} = B(1 + O(y_0)), \quad A_{i+1} = 1 + O(y_0)$$

и справедливо неравенство (60), вытекает существование константы c_1 такой, что

$$P_\tau(\delta_{i+1}(1-q_i)) \leq c_1 \frac{A(i)}{T(i)}. \quad (61)$$

С помощью аналогичных рассуждений получаем оценку

$$P_\tau(\eta_{i+1}(1-q_i)) \leq c_2 \frac{A(i)}{T(i)}.$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$P_\tau(d_{i+1}) \leq A_{i+1} P_\tau(\delta_{i+1}(1-q_i)) + A_{i+1} P_\tau(\eta_{i+1}(1-q_i)) \leq c_3 \frac{A(i)}{T(i)}. \quad (62)$$

Далее, полагая в (34) $\rho = g_{i+1}$, $s = q_i$, получаем, что

$$\frac{q_i(s)}{q_{i+1}(s)} = \frac{1}{A_{i+1}} + \frac{2A_{i+1}}{B_{i+1}} \delta_{i+1}(1-q_i(s)) \frac{q_i^2(s)}{q_{i+1}(s)}.$$

Следовательно,

$$\frac{q_i(s)}{q_{i+1}(s)} = \frac{1}{A_{i+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^l A_{i+1}^l}{B_{i+1}^l} \delta_{i+1}^l (1-q_i(s)) q_i^l(s).$$

Применяя неравенство (56) к функциям δ_{i+1} и $q_i(s)$ и учитывая (61), получаем оценку

$$P_\tau(\delta_{i+1} q_i) \leq c_4 \frac{A(i)}{T(i)}.$$

Из этой оценки и леммы 11 получаем, что

$$P_\tau(q_i/q_{i+1}) \leq c_5 \frac{A(i)}{T(i)} \left(1 - \frac{2A_{i+1}}{B_{i+1}} \|\delta_{i+1}\|_1 \|q_i\|_1 \right)^{-2} \leq c_6 \frac{A(i)}{T(i)}. \quad (63)$$

Применяя неравенство (56) к функциям d_{i+1} и q_i/q_{i+1} и используя соотношения (62) и (63), приходим к утверждению леммы.

3. Доказательство теоремы 1

Без ограничения общности можно считать, что $k > Bn/2$. Положим

$$y_0 = \frac{4k}{B^2 n^2} - \frac{2}{Bn}.$$

Из условий теоремы следует, что $y_0 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Несложно заметить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n = k) &= a_k[f_n(s)] = r_0^{-k} f_n(r_0) a_k[f_n(r_0 s)/f_n(r_0)] \\ &= r_0^{-k} (1 + y_0) a_k[G_n(s)] = -r_0^{-k} (1 + y_0) a_k[q_n(s)]. \end{aligned} \quad (64)$$

Полагая в лемме 1 $y_0 = 4k/B^2 n^2 - 2/Bn$, получаем, что

$$y_n = \frac{2}{Bn} - \frac{1}{k} + \frac{B}{2} \gamma \left(\frac{2}{Bn} - \frac{1}{k} \right)^2 \ln(2k/Bn) + O(n^{-2}).$$

Раскрывая скобки и используя неравенство $\ln x < x$, приходим к соотношению

$$y_n = \frac{2}{Bn} - \frac{1}{k} + \frac{2}{B} \gamma \frac{1}{n^2} \ln(k/n) + O(n^{-2}).$$

Следовательно,

$$r_0^{-k} = (1 + y_n)^{-k} = \exp \left\{ -\frac{2k}{Bn} + 1 - \frac{2}{B} \gamma \frac{k}{n^2} \ln(k/n) \right\} (1 + O(k/n^2)). \quad (65)$$

Теперь найдем асимптотику $a_l[q_n(s)]$.

Из леммы 5 следует представление

$$q_n(s) = \frac{A(n)}{(1-s)^{-1} + T(n)} + \frac{q_n(s)}{(1-s)^{-1} + T(n)} \left(R_N(s) + \sum_{i=N}^{n-1} A(i) C_i(s) q_i(s) \right).$$

Значит,

$$\begin{aligned} a_l[q_n(s)] &= a_l \left[\frac{A(n)}{(1-s)^{-1} + T(n)} \right] \\ &\quad + a_l \left[\frac{q_n(s)}{(1-s)^{-1} + T(n)} \left(R_N(s) + \sum_{i=N}^{n-1} A(i) C_i(s) q_i(s) \right) \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{1}{(1-s)^{-1} + T(n)} = \frac{1}{1 + T(n)} - \frac{1}{(1 + T(n))^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{T(n)}{1 + T(n)} \right)^{j-1} s^j.$$

Поэтому

$$\left| a_l \left[\frac{q_n(s)}{(1-s)^{-1} + T(n)} \left(R_N(s) + \sum_{i=N}^{n-1} A(i) C_i(s) q_i(s) \right) \right] \right| \leq F_1 + F_2, \quad (67)$$

где

$$F_1 = \frac{1}{1 + T(n)} \left| a_l \left[q_n(s) \left(R_N(s) + \sum_{i=N}^{n-1} A(i) C_i(s) q_i(s) \right) \right] \right|,$$

$$F_2 = \frac{\|q_n(s)\|_1}{(1 + T(n))^2} \left(\|R_N(s)\|_1 + \sum_{i=N}^{n-1} A(i) \|C_i(s)\|_1 \|q_i(s)\|_1 \right).$$

Оценим сначала F_1 . Из лемм 10, 12 и неравенства (56) вытекает оценка

$$P_\tau(C_i q_i) \leq c_1 \frac{A(i)}{T(i)}.$$

Вновь используя лемму 10 и (56), получаем, что

$$\begin{aligned} P_\tau(q_n C_i q_i) &\leq c_2 \left(\|q_i\|_1 \frac{A(n)}{T(n)} + \|q_n\|_1 \frac{A(i)}{T(i)} \right) \\ &= 2c_2 \left(q_i(0) \frac{A(n)}{T(n)} + q_n(0) \frac{A(i)}{T(i)} \right). \end{aligned}$$

Из леммы 6 вытекает существование констант c_3, c_4 таких, что для всех i

$$c_3 \frac{A(i)}{T(i)} \leq q_i(0) \leq c_4 \frac{A(i)}{T(i)}. \quad (68)$$

Из двух последних соотношений заключаем, что

$$P_\tau \left(q_n \sum_{i=N}^{n-1} A(i) C_i q_i \right) \leq \sum_{i=N}^{n-1} A(i) P_\tau(q_n C_i q_i) \leq c_5 \frac{A(n)}{T(n)} \sum_{i=N}^{n-1} A(i) q_i(0).$$

Из леммы 3 и соотношения (7) вытекает неравенство

$$q_i(0) \leq c_6 (y_{n-i} + i^{-1}) \leq c_6 (y_0 + i^{-1}).$$

Вследствие возрастания $A(i)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^{n-1} A(i) q_i(0) &\leq c_6 y_0 T(n) + c_6 \sum_{i=1}^{n-1} A(i) i^{-1} \\ &\leq c_6 y_0 T(n) + c_6 A([n/2]) \ln n + 2c_6 T(n) n^{-1} \leq c_7 (y_0 T(n) + \ln n), \end{aligned} \quad (69)$$

так как $A([n/2])$ ограничено, а $n^{-1} \leq c_8 y_0$. В итоге получаем, что

$$P_\tau \left(q_n \sum_{i=N}^{n-1} A(i) C_i q_i \right) = O(A(n)(y_0 + T^{-1}(n) \ln n)).$$

Следовательно, при $l \geq \alpha T(n)$

$$\frac{1}{1 + T(n)} \left| a_l \left[q_n(s) \sum_{i=N}^{n-1} A(i) C_i(s) q_i(s) \right] \right| = O \left(\frac{A(n)}{T^2(n)} (y_0 + T^{-1}(n) \ln n) \right) \quad (70)$$

для любого $\alpha > 0$.

Вследствие лемм 5 и 10

$$\begin{aligned} a_l[q_n(s)R_N(s)] &\leq \|R_N(s)\|_1 \sup_{t \geq l/2} a_t[q_n(s)] + \|q_n(s)\|_1 \sup_{t \geq l/2} a_t[R_N(s)] \\ &\leq R \frac{2A(n)}{lT(n)} + c_{15} \frac{A(n)}{T(n)} \sup_{t \geq l/2} a_t[R_N(s)]. \end{aligned}$$

Согласно определению $R_N(s)$

$$a_l[R_N(s)] = A(N)a_l \left[\frac{1}{1 - G_N(s)} - \frac{1}{A(N)(1 - s)} \right].$$

Из того, что $G_N''(1) < \infty$ и результата А. О. Гельфонда [10] (см. также [11])

$$\sup_{t \geq l/2} a_t[R_N(s)] = O(T^{-1}(n))$$

при $l \geq \alpha T(n)$. Следовательно,

$$\frac{1}{1 + T(n)} a_l[q_n(s)R_N(s)] = O\left(\frac{A(n)}{T^3(n)}\right) \quad (71)$$

при $l \geq \alpha T(n)$.

Из формул (70) и (71) следует, что

$$F_1 = O\left(\frac{A(n)}{T^2(n)}(y_0 + T^{-1}(n) \ln n)\right), \quad (72)$$

если $l \geq \alpha T(n)$ для некоторого $\alpha > 0$.

Оценим теперь F_2 . Согласно леммам 3, 5 и соотношению (69)

$$\sum_{k=N}^{n-1} A(i) \|C_i(s)\|_1 \|q_i(s)\|_1 \leq 2C \sum_{k=N}^{n-1} A(i) q_i(0) = O(T(n)(y_0 + T^{-1}(n) \ln n)).$$

В силу равенства $\|q_n(s)\|_1 = 2q_n(0)$ и оценки (68)

$$\|q_n(s)\|_1 \left(\|R_N(s)\|_1 + \sum_{k=N}^{n-1} A(i) \|C_i(s)\|_1 \|q_i(s)\|_1 \right) = O(A(n)(y_0 + \ln n T^{-1}(n))).$$

Это означает, что

$$F_2 = O\left(\frac{A(n)}{T^2(n)}(y_0 + T^{-1}(n) \ln n)\right). \quad (73)$$

Из (66), (72), (67) и (73) вытекает соотношение

$$a_l[q_n(s)] = -\frac{A(n)}{T^2(n)} \left(\frac{T(n)}{1 + T(n)} \right)^{l-1} + O\left(\frac{A(n)}{T^2(n)}(y_0 + T^{-1}(n) \ln n)\right),$$

верное при всех $l \geq \alpha T(n)$. Это означает, что равномерно по $\alpha T(n) \leq l \leq \beta T(n)$

$$a_l[q_n(s)] = -\frac{A(n)}{T^2(n)} \exp\left\{-\frac{l}{T(n)}\right\} (1 + O(y_0 + T^{-1}(n) \ln n)), \quad (74)$$

где $\alpha, \beta, \alpha < \beta$, — произвольные действительные числа.

Из определения y_0 и формул (27), (28) следует, что

$$T(n) = k(1 + O(y_0)), \quad \frac{A(n)}{T^2(n)} = \frac{4}{B^2 n^2} (1 + O(y_0)). \quad (75)$$

Полагая в соотношении (74) $l = k$, получаем, что

$$a_k[q_n(s)] = -\frac{4}{B^2 n^2} e^{-1} (1 + O(kn^{-2} + k^{-1} \ln n)).$$

Утверждение теоремы следует из этого равенства и формул (64), (65).

4. Доказательство теоремы 2

Предположим сначала, что $k \geq \lambda n \ln n$, где λ выбрано так, чтобы для всякого $k \geq \lambda n \ln n$ выполнялось соотношение

$$r_0^{-\lambda n \ln n} = O(n^{-1}). \quad (76)$$

Существование такого λ вытекает из (65).

Далее, согласно теореме 1

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) = \sum_{i=k}^{2k-1} \frac{4}{B^2 n^2} \left(\exp \left\{ -\frac{2i}{Bn} - \frac{2\gamma i}{Bn^2} \ln \left(\frac{i}{n} \right) \right\} \right) (1 + O(kn^{-2})) + \mathbf{P}(Z_n \geq 2k). \quad (77)$$

Пусть $\gamma > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{2k-1} \exp \left\{ -\frac{2i}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{i}{n^2} \ln \left(\frac{i}{n} \right) \right\} &\leq \exp \left\{ -\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{k}{n^2} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right\} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-2i/Bn} \\ &= \frac{Bn}{2} \exp \left\{ -\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{k}{n^2} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right\} (1 + O(n^{-1})). \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу условия на λ

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{2k-1} \exp \left\{ -\frac{2i}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{i}{n^2} \ln \left(\frac{i}{n} \right) \right\} \\ \geq \exp \left\{ -\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{k}{n^2} \ln \left(\frac{2k}{n} \right) \right\} \sum_{i=0}^{k-1} \exp \left\{ -\frac{2i}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{i}{n^2} \ln \left(\frac{2k}{n} \right) \right\} \\ = \frac{Bn}{2} \exp \left\{ -\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{k}{n^2} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right\} (1 + O(kn^{-2})). \end{aligned}$$

Из двух последних соотношений заключаем, что при $\gamma > 0$

$$\sum_{i=k}^{2k-1} \exp \left\{ -\frac{2i}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{i}{n^2} \ln \left(\frac{i}{n} \right) \right\} = \frac{Bn}{2} \exp \left\{ -\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B} \gamma \frac{k}{n^2} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right\} (1 + O(kn^{-2})). \quad (78)$$

С помощью аналогичных рассуждений доказывается, что (78) остается верным и при $\gamma < 0$.

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (77). Нетрудно заметить, что для всякого $s \geq 1$

$$\mathbf{P}(Z_n \geq 2k) \leq s^{-2k}(f_n(s) - f_n(0)).$$

Полагая в этом неравенстве $s = r_0$, получаем, что

$$\mathbf{P}(Z_n \geq 2k) \leq r_0^{-2k}(y_0 + Q_n) = O(kn^{-2}r_0^{-2k}).$$

Согласно (65) и выбору λ

$$\mathbf{P}(Z_n \geq 2k) = O(kn^{-3}r_0^{-k}) = O\left(\frac{k}{n^3} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B}\gamma \frac{k}{n^2} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\right). \quad (79)$$

Из (77), (78) и (79) вытекает (11).

Осталось показать, что (11) верно и для $k \leq \lambda n \ln n$. Из (10) заключаем, что

$$\mathbf{P}(Z_n = i) = \frac{4}{B^2 n^2} \exp\left\{-\frac{2i}{Bn} - \frac{2\gamma}{B} \frac{i}{n^2} \ln\left(\frac{i}{n}\right)\right\} (1 + O(n^{-1} \ln n))$$

равномерно по i таким, что $i = O(n \ln n)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &= \left(\sum_{i=k}^{k+\lambda n \ln n} \frac{4}{B^2 n^2} \exp\left\{-\frac{2i}{Bn} - \frac{2\gamma}{B} \frac{i}{n^2} \ln\left(\frac{i}{n}\right)\right\} \right) (1 + O(n^{-1} \ln n)) \\ &\quad + \mathbf{P}(Z_n \geq k + \lambda n \ln n). \end{aligned} \quad (80)$$

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным при выводе (78), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{k+\lambda n \ln n} \exp\left\{-\frac{2i}{Bn} - \frac{2}{B}\gamma \frac{i}{n^2} \ln\left(\frac{i}{n}\right)\right\} \\ = \frac{Bn}{2} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B}\gamma \frac{k}{n^2} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right\} (1 + O(n^{-1} \ln n)). \end{aligned}$$

Асимптотика второго слагаемого в правой части (80) уже установлена при исследовании случая $k \geq \lambda n \ln n$. В итоге приходим к равенству

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq k) &= \frac{2}{Bn} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B}\gamma \frac{k}{n^2} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right\} (1 + O(n^{-1} \ln n)) \\ &\quad + \frac{2}{Bn} \exp\left\{-\frac{2k + \lambda n \ln n}{Bn} - \frac{2}{B}\gamma \frac{k + \lambda n \ln n}{n^2} \ln\left(\frac{k + \lambda n \ln n}{n}\right)\right\} (1 + O(n^{-1} \ln n)). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что из условия, наложенного на λ , вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\frac{2k + \lambda n \ln n}{Bn} - \frac{2}{B}\gamma \frac{k + \lambda n \ln n}{n^2} \ln\left(\frac{k + \lambda n \ln n}{n}\right)\right\} \\ \leq \frac{c}{n} \exp\left\{-\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{B}\gamma \frac{k}{n^2} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(Z_n \geq k) = \frac{2}{Bn} \exp \left\{ -\frac{2k}{Bn} - \frac{2}{Bn} \gamma \frac{k}{n^2} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \right\} (1 + O(n^{-1} \ln n)).$$

Таким образом, теорема 2 доказана.

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность рецензенту, который обратил их внимание на ряд неточностей и опечаток и сделал полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения представленных результатов.

Список литературы

1. Харрис Т., *Теория ветвящихся процессов*. Мир, Москва, 1966.
2. Нагаев С. В., Мухамедханова Р., Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся процессов. В кн.: *Предельные теоремы и статистические выводы*. Фан, Ташкент, 1966, с. 90–112.
3. Нагаев С. В., Вахрушев Н. В., Оценка вероятности больших уклонений для критического процесса Гальтона–Ватсона. *Теория вероятностей и ее применения* (1975), **20**, №1, 181–182.
4. Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
5. Макаров Г. Д., Большие уклонения для процесса Гальтона–Ватсона. *Теория вероятностей и ее применения* (1980) **25**, №3, 490–501.
6. Боровков К. А., Анализ переходных явлений для ветвящихся процессов. *Теория вероятностей и ее применения* (1994) **39**, №3, 449–468.
7. Kesten H., Ney P., Spitzer F., The Galton–Watson process with mean one and finite variance. *Теория вероятностей и ее применения* (1966) **11**, №4, 579–611.
8. Люмис Л., *Введение в абстрактный гармонический анализ*. ИЛ, Москва, 1956.
9. Рогозин Б. А., Асимптотика коэффициентов в теоремах Леви–Винера об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах. *Сибирский матем. ж.* (1973) **14**, №6, 1304–1312.
10. Гельфонд А. О., Оценка остаточного члена в предельной теореме для рекуррентных событий. *Теория вероятностей и ее применения* (1964) **9**, №2, 327–331.
11. Рогозин Б. А., Оценка остаточного члена в предельных теоремах теории восстановления. *Теория вероятностей и ее применения* (1973) **18**, №3, 703–717.

Статья поступила 29.04.2002.