Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Я. Савельев, С. В. Балакин, Б. В. Хромов, Накрывающие серии в двоичных марковских последовательностях, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 1, 50–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:35:15

Накрывающие серии в двоичных марковских последовательностях

© 2003 г. Л. Я. Савельев, С. В. Балакин, Б. В. Хромов

Описываются распределения длин начальных, накрывающих и концевых серий в двоичных марковских последовательностях. Вычисляются средние значения и дисперсии. Для них даются точные и асимптотические формулы с оценками. Находятся производящие функции. Отмечается, что в марковских последовательностях вероятности длин серий могут не всегда убывать с возрастанием длин и соответствующие распределения могут иметь сложный характер. Исследуются условия, при которых благодаря марковскому свойству вероятности возрастают вместе с длиной серии. Рассматриваются операторные уравнения, в которых используются концевые серии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00946.

1. Определения и обозначения

1.1. Рассмотрим двоичную марковскую последовательность ξ случайных переменных $\xi(k)$, $k \geq 0$ с множеством значений $C = \{1, 0\}$, начальным вектором A и переходной матрицей Q ,

$$A = (a, 1 - a), \quad Q = \begin{pmatrix} p & 1 - p \\ 1 - q & q \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{P}\{\xi(0) = 1\}, & 1 - a &= \mathbf{P}\{\xi(0) = 0\}, \\ p &= \mathbf{P}\{\xi(k) = 1 \mid \xi(k-1) = 1\}, & 1 - p &= \mathbf{P}\{\xi(k) = 0 \mid \xi(k-1) = 1\}, \\ q &= \mathbf{P}\{\xi(k) = 0 \mid \xi(k-1) = 0\}, & 1 - q &= \mathbf{P}\{\xi(k) = 1 \mid \xi(k-1) = 0\} \end{aligned}$$

(здесь $k > 0$). Будем предполагать, что $0 < p, q < 1$ и, следовательно, $-1 < d < 1$. Введем дополнительные обозначения. Для разности вероятностей появления значения 1 при переходе к следующему моменту, для отношения вероятности перехода $0 \rightarrow 1$ к вероятности изменения значения при переходе к следующему моменту (сумме вероятностей переходов $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$), для некоторого специального отношения будем использовать обозначения

$$d = p - (1 - q) = \det Q, \quad b = \frac{1 - q}{1 - d}, \quad c = \frac{a - b}{1 - d}.$$

Равенство $d = 0$ означает, что $q = 1 - p$, то есть вероятности переходов $0 \rightarrow 0$ и $1 \rightarrow 0$ одинаковы и переходная матрица имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} p & 1 - p \\ p & 1 - p \end{pmatrix}$$

При $a = p, d = 0, 0 \leq k \leq n$ получается последовательность Бернулли с параметрами $(n + 1, p)$. Определитель $d = \det Q$ можно считать мерой зависимости соседних членов двоичной марковской последовательности с переходной матрицей Q .

Равенство $c = 0$ означает, что $a = b$ и последовательность ξ стационарна, то есть $\mathbf{P}\{\xi(k) = 1\} = a$ при любом k . Выделяется также симметричный случай, когда $p = q$. В этом случае $b = 1/2$.

Основные свойства двоичных марковских последовательностей и яркий пример их применения подробно описаны А. А. Марковым в приложении «Замечательный случай испытаний, связанных в цепь» к книге [1].

1.2. По индукции легко доказать, что верно следующее выражение для k -й степени Q^k матрицы Q :

$$Q^k = \begin{pmatrix} b + (1-b)d^k & 1-b-(1-b)d^k \\ b-bd^k & 1-b+bd^k \end{pmatrix}.$$

Распределение $P_k = \{p_k, q_k\}$ в момент k ($d^k = 1$ при $k = 0$), где

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi(k) = 1\}, \quad q_k = \mathbf{P}\{\xi(k) = 0\}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

было вычислено еще А. А. Марковым [1], и имеет вид

$$P_k = \{b + (a-b)d^k, 1-b-(a-b)d^k\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Если, как предполагается, $|d| < 1$, то предельное распределение выражается равенствами

$$p_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(k) = 1\} = b, \quad q_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(k) = 0\} = 1-b.$$

Таким образом, отношение b вероятности перехода $0 \rightarrow 1$ к вероятности изменения значения является и предельной вероятностью значения 1. Пусть

$$R = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1-b & -(1-b) \\ -b & b \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица перехода через k моментов выражается равенством

$$Q^k = R + Sd^k.$$

Слагаемое $Q^\infty = R$ является бернуллиевой частью формулы. При достаточно большом k подпоследовательность $\xi(j_i), i \geq 0$, с номерами $j_{i+1} - j_i \geq k$ можно приближенно считать бернуллиевой с параметром b .

Будем всюду рассматривать сначала 1-серии. Результаты для 0-серий получаются из результатов для 1-серий по симметрии, а результаты для общих серий выводятся из полученных.

1.3. Обозначим $\alpha_1(i), i \geq 0$, длину 1-серии, накрывающей i слева (концевой 1-серии на отрезке $[0, i]$ последовательности ξ), ясно, что

$$\alpha_1(i) = \xi(0)\xi(1) \dots \xi(i) + \xi(1) \dots \xi(i) + \dots + \xi(i) = \sum_{j=0}^i \prod_{k=0}^j \xi(i-k).$$

Обозначим $\beta_1(i, n)$, $0 \leq i \leq n$, длину 1-серии, накрывающей i справа (начальной 1-серии на отрезке $[i, n]$ последовательности ξ), ясно, что

$$\beta_1(i, n) = \xi(i) + \xi(i)\xi(i+1) + \dots + \xi(i)\xi(i+1) \dots \xi(n) = \sum_{j=0}^{n-i} \prod_{k=0}^j \xi(i+k).$$

Обозначим $\gamma_1(i, n)$, $0 \leq i \leq n$, длину 1-серии, накрывающей i , на отрезке $[0, n]$ последовательности ξ , ясно, что

$$\gamma_1(i, n) = \alpha_1(i) + \beta_1(i, n) - \xi(i).$$

По данному определению 1-серия в последовательности ξ , накрывающая i , начинается в момент i или раньше и оканчивается в момент i или позже. Но не позже момента n .

Определим аналогичные величины для 0-серий. Обозначим $\alpha_0(i)$, $i \geq 0$, длину 0-серии, накрывающей i слева (концевой 0-серии на отрезке $[0, i]$ последовательности ξ); $\beta_0(i, n)$, $0 \leq i \leq n$, длину 0-серии, накрывающей i справа (начальной 0-серии на отрезке $[i, n]$ последовательности ξ); $\gamma_0(i, n)$, $0 \leq i \leq n$, длину 0-серии, накрывающей i , на отрезке $[0, n]$ последовательности ξ .

Формулы для $\alpha_0(i)$, $\beta_0(i, n)$, $\gamma_0(i, n)$ получаются из соответствующих формул для $\alpha_1(i)$, $\beta_1(i, n)$, $\gamma_1(i, n)$ заменой $\xi(i)$ на $1 - \xi(i)$.

Определим еще аналогичные переменные для общих серий (любого типа, 1-серий или 0-серий). Обозначим $\alpha(i)$, $i \geq 0$, длину серии, накрывающей i слева (концевой серии на отрезке $[0, i]$ последовательности ξ); $\beta(i, n)$, $0 \leq i \leq n$, длину серии, накрывающей i справа (начальной серии на отрезке $[i, n]$ последовательности ξ); $\gamma(i, n)$, $0 \leq i \leq n$, длину серии, накрывающей i , на отрезке $[0, n]$ последовательности ξ .

Из определений следует, что

$$\begin{aligned} \alpha(i) &= \alpha_1(i) + \alpha_0(i), \\ \beta(i, n) &= \beta_1(i, n) + \beta_0(i, n), \\ \gamma(i, n) &= \gamma_1(i, n) + \gamma_0(i, n), \\ \alpha_1(i)\alpha_0(i) &= \beta_1(i, n)\beta_0(i, n) = \gamma_1(i, n)\gamma_0(i, n) = 0. \end{aligned}$$

Замечание 1. Вместе с последовательностью

$$\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(n)$$

можно рассматривать обратную последовательность

$$\eta(0) = \xi(n), \eta(1) = \xi(n-1), \dots, \eta(n) = \xi(0).$$

Она тоже является марковской, но не обязательно однородной: обратные переходные вероятности в общем случае зависят от момента перехода. Используя формулу Байеса, их легко вычислить. В стационарном случае они равны прямым переходным вероятностям (см. [2]). Концевые серии последовательности $\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(n)$ являются начальными для обратной последовательности $\eta(0), \eta(1), \dots, \eta(n)$.

2. Распределения

2.1. Распределения для 1-серий

Опишем распределения начальных, накрывающих и концевых 1-серий.

2.1.1. Из определений следует, что $\alpha_1(0) = \xi(0)$ и при $i \geq 1$ случайная величина $\alpha_1(i)$ имеет распределение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\alpha_1(i) = 0\} &= q_i = 1 - b - (a - b)d^i, \\ \mathbf{P}\{\alpha_1(i) = l\} &= q_{i-l}(1 - q)p^{l-1} = (1 - b - (a - b)d^{i-l})(1 - q)p^{l-1}, \quad 1 \leq l \leq i, \\ \mathbf{P}\{\alpha_1(i) = i + 1\} &= ap^i. \end{aligned}$$

2.1.2. Из определений следует, что $\beta_1(n, n) = \xi(n)$ и при $0 \leq i < n$ случайная величина $\beta_1(i, n)$ имеет распределение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\beta_1(i, n) = 0\} &= q_i = 1 - b - (a - b)d^i, \\ \mathbf{P}\{\beta_1(i, n) = m\} &= p_i(1 - p)p^{m-1} = (b + (a - b)d^i)(1 - p)p^{m-1}, \quad 1 \leq m \leq n - i, \\ \mathbf{P}\{\beta_1(i, n) = n - i + 1\} &= p_i p^{n-i} = (b + (a - b)d^i)p^{n-i}. \end{aligned}$$

2.1.3. Опишем распределение случайной величины $\gamma_1(i, n)$. Заметим, что $\gamma_1(0, n) = \beta_1(0, n)$ и $\gamma_1(n, n) = \alpha_1(n)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\gamma_1(0, n) = k\} &= a(1 - p)p^{k-1}, \\ \mathbf{P}\{\gamma_1(n, n) = k\} &= (1 - b - (a - b)d^{n-k})(1 - q)p^{k-1}. \end{aligned}$$

Кроме того, при $0 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = 0\} &= 1 - b - (a - b)d^i, \\ \mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = n + 1\} &= ap^n. \end{aligned}$$

Предположим, что $0 < i < n$, $1 \leq k \leq n$, и рассмотрим различные возможные случаи. Благодаря марковскому свойству

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} = \sum_l \mathbf{P}\{\alpha_1(i) = l\} \mathbf{P}\{\beta_1(i, n) = k - l + 1 \mid x_i(i) = 1\}.$$

Есть 4 возможности:

- 1-серия не накрывает ни один из концов отрезка $[0, n]$ и $k \leq \min[i, n - i]$,
- 1-серия накрывает только 0 и $i < k \leq n - i$,
- 1-серия накрывает только n и $n - i < k \leq i$,
- 1-серия накрывает либо 0, либо n , но не оба конца сразу, и $\max[i, n - i] < k$;

соответственно суммирование по l производится в интервалах

$$1 \leq l \leq k, \quad 1 \leq l < i + 1, \quad k - (n - i) \leq l \leq k, \quad k - (n - i) \leq l \leq i + 1.$$

Используя найденные вероятности для $\alpha_1(i)$, вычисляя условные вероятности для $\beta_1(i, n)$ и меняя порядок суммирования, находим вероятности для $\gamma_1(i, n)$:

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} = \sum_{j=i-k}^{i-1} (1-b-(a-b)d^j)(1-q)p^{k-1}(1-p), \quad k \leq \min[i, n-i],$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} = ap^{k-1}(1-p) + \sum_{j=0}^{i-1} (1-b-(a-b)d^j)(1-q)p^{k-1}(1-p), \quad i < k \leq n-i,$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} = \sum_{j=i-k}^{n-k-1} (1-b-(a-b)d^j)(1-q)p^{k-1}(1-p) + (1-b-(a-b)d^{n-k})(1-q)p^{k-1}, \quad n-i < k \leq i,$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} = ap^{k-1}(1-p) + \sum_{j=0}^{n-k-1} (1-b-(a-b)d^j)(1-q)p^{k-1}(1-p) + (1-b-(a-b)d^{n-k})(1-q)p^{k-1}, \quad \max[i, n-i] < k,$$

откуда

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} = (k(1-b) - c(1-d^k)d^k)(1-p)(1-q)p^{k-1}, \quad k \leq \min[i, n-i], \quad (1)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} = (a + (i(1-b) - c(1-d^i))(1-q))(1-p)p^{k-1}, \quad i < k \leq n-i, \quad (2)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} = (((n-i)(1-p) + 1)(1-b) - (a-b)(1-b)d^{i-k} - (a-b)bd^{n-k})(1-q)p^{k-1}, \quad n-i < k \leq i, \quad (3)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} = (a(1-p) + (((n-k)(1-p) + 1)(1-b) - (a-b)(1-b) - (a-b)bd^{n-k})(1-q))p^{k-1}, \quad \max[i, n-i] < k. \quad (4)$$

В частности, при $k = n$ и $0 < i < n$

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = n\} = (a(1-p) + (1-a)(1-q))p^{n-1}.$$

Если $0 < i < n/2$, то $i < n-i$ и используются равенства (1), (2), (4). Если $i = n/2$, то $i = n-i$ и используются равенства (1), (4). Если $n/2 < i < n$, то $n-i < i$ и используются равенства (1), (3), (4).

В стационарном случае, когда $a = b$, формулы существенно упрощаются.

2.2. Распределения для 0-серий

Нужные формулы получаются из соответствующих формул для 1-серий заменой $a \rightarrow 1-a$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, $b \rightarrow 1-b$:

$$\mathbf{P}\{\alpha_0(i) = 0\} = b + (a-b)d^i,$$

$$\mathbf{P}\{\alpha_0(i) = l\} = (b + (a-b)d^{i-l})(1-p)q^{l-1}, \quad 1 \leq l \leq i,$$

$$\mathbf{P}\{\alpha_0(i) = i+1\} = (1-a)q^i;$$

$$\mathbf{P}\{\beta_0(i, n) = 0\} = b + (a - b)d^i,$$

$$\mathbf{P}\{\beta_0(i, n) = m\} = (1 - b - (a - b)d^i)(1 - q)q^{m-1}, \quad 1 \leq m \leq n - i,$$

$$\mathbf{P}\{\beta_0(i, n) = n - i + 1\} = (1 - b - (a - b)d^i)q^{n-i};$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0(0, n) = k\} = (1 - a)(1 - q)q^{k-1},$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0(n, n) = k\} = (b + (a - b)d^{n-k})(1 - p)q^{k-1},$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0(i, n) = 0\} = b + (a - b)d^i,$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0(i, n) = n + 1\} = (1 - a)q^n, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0(i, n) = k\} = (kb + c(1 - d^k)d^{i-k})(1 - q)q^{k-1}, \quad k \leq \min[i, n - i], \quad (5)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0(i, n) = k\} = (1 - a + (ib + c(1 - d^i))(1 - p)) \times (1 - q)q^{k-1}, \quad i < k \leq n - i, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0(i, n) = k\} = (((n - i)(1 - q) + 1)b + (a - b)bd^{i-k} + (a - b)(1 - b)d^{n-k})(1 - p)q^{k-1}, \quad n - i < k \leq i, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0(i, n) = k\} = ((1 - a)(1 - q) + (((n - k)(1 - q) + 1)b + (a - b)b + (a - b)(1 - b)d^{n-k})(1 - p)q^{k-1}, \quad \max[i, n - i] < k \quad (8)$$

(здесь $0 < i < n$, $1 \leq k \leq n$). В частности, при $k = n$

$$\mathbf{P}\{\gamma_0(i, n) = n\} = (a(1 - p) + (1 - a))q^{n-1}, \quad 0 < i < n.$$

Если $0 < i < n/2$, то $i < n - i$ и используются равенства (5), (6), (8). Если $i = n/2$, то $i = n - i$ и используются равенства (5), (8). Если $n/2 < i < n$, то $n - i < i$ и используются равенства (5), (7), (8).

В стационарном случае, когда $a = b$, формулы существенно упрощаются.

2.3. Распределения для общих серий

Рассмотрим распределения начальных, накрывающих и концевых серий. Для ненулевых длин они получаются сложением соответствующих вероятностей для 1-серий и 0-серий. Из определений следует, что

$$\mathbf{P}\{\alpha(i) = 0\} = \mathbf{P}\{\beta(i, n) = 0\} = \mathbf{P}\{\gamma(i, n) = 0\} = 0,$$

$$\mathbf{P}\{\alpha(i) = l\} = \mathbf{P}\{\alpha_1(i) + \alpha_0(i) = l\}$$

$$= \mathbf{P}\{\alpha_1(i) = l\} + \mathbf{P}\{\alpha_0(i) = l\}, \quad l > 0,$$

$$\mathbf{P}\{\beta(i, n) = m\} = \mathbf{P}\{\beta_1(i, n) + \beta_0(i, n) = m\}$$

$$= \mathbf{P}\{\beta_1(i, n) = m\} + \mathbf{P}\{\beta_0(i, n) = m\}, \quad m > 0,$$

$$\mathbf{P}\{\gamma(i, n) = k\} = \mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) + \gamma_0(i, n) = k\}$$

$$= \mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\} + \mathbf{P}\{\gamma_0(i, n) = k\}, \quad k > 0.$$

Значения последних вероятностей в этих равенствах берутся из (1) и (2). Несложные преобразования позволяют получить симметричные по p и q выражения. Например, при

$$1 \leq l \leq i, 1 \leq m \leq n - i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\alpha(i) = l\} &= (1 - b)(1 - q)p^{l-1} + b(1 - p)q^{l-1} \\ &\quad + (a - b)((1 - p)q^{l-1} - (1 - q)p^{l-1})d^{i-l}, \\ \mathbf{P}\{\beta(i, n) = m\} &= b(1 - p)p^{m-1} + (1 - b)(1 - q)q^{m-1} \\ &\quad + (a - b)((1 - p)p^{m-1} - (1 - q)q^{m-1})d^i. \end{aligned}$$

При подробном выписывании формул удобно отдельно рассмотреть случаи

$$\begin{aligned} i = n = 0, & \quad 0 \leq k \leq 1; \\ i = 0, & \quad n > 0, \quad k = 0; \\ i = 0, & \quad 1 \leq k \leq n; \\ i = 0, & \quad n > 0, \quad k = n + 1; \\ 0 < i < n, & \quad k = 0; \\ 0 < i < n, & \quad 1 \leq k \leq n; \\ 0 < i < n, & \quad k = n + 1; \\ i = n > 0, & \quad k = 0; \\ i = n > 0, & \quad 1 \leq k \leq n; \\ i = n > 0, & \quad k = n + 1. \end{aligned}$$

Кроме того, можно определить нулевые вероятности для $0 \leq i \leq n, k > n + 1$.

В стационарном случае, когда $a = b$, формулы существенно упрощаются.

3. Средние значения

3.1. Средние для 1-серий

Вычислим средние значения для начальных, накрывающих и концевых 1-серий.

3.1.1. Используя равенства из §1.3, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\alpha_1(i) &= \sum_{j=0}^i \mathbf{M} \prod_{k=0}^j \xi(i - k) = \sum_{j=0}^i \mathbf{P} \left\{ \prod_{k=0}^j \xi(i - k) = 1 \right\} \\ &= \sum_{j=0}^i p_{i-j} p^j = \sum_{j=0}^i (b + (a - b)d^{i-j}) p^j \\ &= \frac{b}{1 - p} - \left(\frac{b}{1 - p} - \frac{a - b}{1 - q} \right) p^{i+1} - \frac{a - b}{1 - q} d^{i+1} \\ &= \frac{b}{1 - b} \frac{1}{1 - d} \left(1 - \left(1 - \frac{1 - b}{b} \frac{a - b}{b} \right) p^{i+1} - \frac{1 - b}{b} \frac{a - b}{b} d^{i+1} \right), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\beta_1(i, n) &= \sum_{j=0}^{n-i} \mathbf{M} \prod_{k=0}^j \xi(i+k) = \sum_{j=0}^{n-i} \mathbf{P} \left\{ \prod_{k=0}^j \xi(i+k) = 1 \right\} = \sum_{j=0}^{n-i} p_i p^j \\
&= (b + (a-b)d^i) \sum_{j=0}^{n-i} p^j = \frac{b}{1-p} - \frac{b}{1-p} p^{n-i+1} + \frac{a-b}{1-p} d^i - \frac{a-b}{1-p} p^{n-i+1} d^i \\
&= \frac{b}{1-b} \frac{1}{1-d} \left(1 - p^{n-i+1} + \frac{a-b}{b} d^i - \frac{a-b}{b} p^{n-i+1} d^i \right), \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\gamma_1(i, n) &= \mathbf{M}\alpha_1(i) + \mathbf{M}\beta_1(i, n) - \mathbf{M}\xi(i) \\
&= \left(\frac{b}{1-p} (1+p) - \frac{a-b}{1-q} \right) p^{i+1} + \left(\frac{a-b}{1-p} - \frac{a-b}{1-q} p \right) d^i \\
&\quad - \left(\frac{b}{1-p} + \frac{a-b}{1-p} d^i \right) p^{n-i+1} \\
&= \frac{b}{1-b} \frac{1}{1-d} \left(1 + p - \left(1 - \frac{1-b}{b} \frac{a-b}{b} \right) p^{i+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a-b}{b} \left(1 - \frac{1-b}{b} p \right) d^i - \left(1 - \frac{a-b}{b} d^i \right) p^{n-i+1} \right) \tag{11}
\end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\mathbf{M}\xi(i) = \mathbf{P}\{\xi(i) = 1\} = b + (a-b)d^i$).

В стационарном случае при $a = b$ формулы для средних существенно упрощаются:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\alpha_1(i) &= \frac{b}{1-b} \frac{1}{1-d} (1 - p^{i+1}), \\
\mathbf{M}\beta_1(i, n) &= \frac{b}{1-b} \frac{1}{1-d} (1 - p^{n-i+1}), \\
\mathbf{M}\gamma_1(i, n) &= \frac{b}{1-b} \frac{1}{1-d} (1 + p - p^{i+1} - p^{n-i+1}).
\end{aligned}$$

3.1.2. Средние значения имеют простую асимптотику. Положим $\rho = \max(p, |d|)$. Заметим, что $d = p - (1-q) < p$ и поэтому $\rho = p$ при $d > 0$. Так как по предположению $0 < p, q < 1$ и поэтому $|d| < 1$, $\rho < 1$, из точных формул (9), (10), (11) для средних сразу следуют асимптотические при $i \rightarrow \infty$ с простыми оценками погрешностей:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\alpha_1(i) &= \frac{b}{1-b} \frac{1}{1-d} (1 + O(\rho^i)), \\
|O(\rho^i)| &\leq \left(1 + \frac{2}{b^2} \right) \rho^i, \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\beta_1(i, n) &= \frac{b}{1-b} \frac{1}{1-d} (1 + O(\rho^i \vee \rho^{n-i})), \\
|O(\rho^i \vee \rho^{n-i})| &\leq \left(1 + \frac{2}{b} \right) (\rho^i \vee \rho^{n-i+1}), \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\gamma_1(i, n) &= \frac{b}{1-b} \frac{1}{1-d} (1 + p + O(\rho^i \vee \rho^{n-i})), \\
|O(\rho^i \vee \rho^{n-i+1})| &\leq 2 \left(1 + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{b} \right) (\rho^i \vee \rho^{n-i}). \tag{14}
\end{aligned}$$

При необходимости оценки в (12), (13), (14) можно легко уточнить. Для компьютерных вычислений при не слишком больших значениях i , n можно пользоваться и точными формулами (9), (10), (11).

Заметим, что главные члены всех вычисленных средних равны умноженному на коэффициент $1/(1-d)$ среднему значению геометрического распределения с параметром

$$b = p_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(k) = 1\}$$

(см. [3]). В симметричном случае, когда $p = q$ и $b = 1/2$ главные члены равны $1/(1-d)$. Коэффициент $1/(1-d)$ выражает влияние марковской зависимости. Для последовательности независимых случайных переменных, когда $d = 0$, он равен 1. Если $d \rightarrow 1$, то $1/(1-d) \rightarrow \infty$.

3.2. Средние для 0-серий

Нужные формулы получаются из соответствующих формул для 1-серий заменой $a \rightarrow 1-a$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, $b \rightarrow 1-b$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\alpha_0(i) &= \frac{1-b}{b} \frac{1}{1-d} \left(1 - \left(1 + \frac{b}{1-b} \frac{a-b}{1-b} \right) q^{i+1} + \frac{b}{1-b} \frac{a-b}{1-b} d^{i+1} \right), \\ \mathbf{M}\beta_0(i, n) &= \frac{1-b}{b} \frac{1}{1-d} \left(1 - q^{n-i+1} + \frac{a-b}{1-b} d^i q^{n-i+1} d^i \right), \\ \mathbf{M}\gamma_0(i, n) &= \frac{1-b}{b} \frac{1}{1-d} \left(1 + q - \left(1 + \frac{b}{1-b} \frac{a-b}{1-b} \right) q^{i+1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a-b}{1-b} \left(1 - \frac{b}{1-b} q \right) d^i - \left(1 + \frac{a-b}{1-b} d^i \right) q^{n-i+1} \right). \end{aligned}$$

3.3. Средние для общих серий

Средние для общих серий равны суммам соответствующих средних для 1-серий и 0-серий. В стационарном случае при $a = b$ формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\alpha(i) &= \frac{1}{1-d} \left(\frac{a}{1-a} (1 - p^{i+1}) + \frac{1-a}{a} (1 - q^{i+1}) \right), \\ \mathbf{M}\beta(i, n) &= \frac{1}{1-d} \left(\frac{a}{1-a} (1 - p^{n-i+1}) + \frac{1-a}{a} (1 - q^{n-i+1}) \right), \\ \mathbf{M}\gamma(i, n) &= \frac{1}{1-d} \left(\frac{a}{1-a} (1 + p - p^{i+1} - p^{n-i+1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-a}{a} (1 + q - q^{i+1} - q^{n-i+1}) \right). \end{aligned}$$

В стационарном случае при обращении последовательности обратные переходные вероятности равны прямым и концевые серии последовательности $\xi(0)$, $\xi(1)$, $\dots$, $\xi(n)$ являются начальными для обратной последовательности $\eta(0)$, $\eta(1)$, $\dots$, $\eta(n)$. Поэтому $\mathbf{M}\beta(i, n) = \mathbf{M}\alpha(n-i)$.

4. Дисперсии

4.1. Дисперсии для 1-серий

Найдем дисперсии длин начальных, накрывающих и концевых 1-серий.

4.1.1. Вычислим дисперсию $\mathbf{D}\alpha_1(i)$ случайной величины $\alpha_1(i)$, используя формулу квадратов и равенство (9):

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\alpha_1(i) &= \mathbf{M}\alpha_1^2(i) - (\mathbf{M}\alpha_1(i))^2 = \sum_{l=1}^{i+1} l^2 \mathbf{P}\{\alpha_1(i) = l\} - (\mathbf{M}\alpha_1(i))^2 \\ &= \sum_{l=1}^i l^2 (1 - b - (a - b)d^{i-l})(1 - q)p^{l-1} + (i + 1)^2 ap^i \\ &\quad - \left(\left(\frac{b}{1-p} - \frac{a-b}{1-q} \right) (1 - p^{i+1}) + \frac{a-b}{1-q} (1 - d^{i+1}) \right)^2.\end{aligned}$$

После суммирования и некоторых преобразований приходим к равенству

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\alpha_1(i) &= \frac{b}{1-p} \frac{1+p}{1-p} (1 - p^i) - \left(\frac{b}{1-p} \right)^2 (1 - p^{i+1})^2 \left(1 - \frac{a-b}{b} \frac{1-b}{b} \frac{d^{i+1} - p^{i+1}}{1 - p^{i+1}} \right)^2 \\ &\quad + ap^i + 2ip^i \left(a - \frac{b}{1-p} + \frac{a-b}{1-q} d \right) + \left(\frac{2p}{1-q} - 1 \right) \frac{a-b}{1-q} d (d^i - p^i),\end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{D}\alpha_1(i) = \frac{b}{(1-b)^2} \frac{1}{(1-d)^2} (1 - b + p + (2A_{11}i + B_{11})p^i + C_{11}d^i + D_{11}(i)), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}A_{11} &= -\frac{(1-b)(1-q-a(1-p))p}{b^2}, \\ B_{11} &= -1 - \frac{(2a(1-b)-b)p}{b} + \frac{(1-b)^2(bd(d+p) + a((1-q)^2 - d(d+p)))}{b^3}, \\ C_{11} &= \frac{(a-b)(1-b)(2b^2 + 2p(1-b) - b(1-b)(1-d))d}{b^3}, \\ D_{11}(i) &= -\frac{(a(1-b)(p^{l+i} - d^{l+i}) - b(p^{l+i} - (1-b)d^{l+i}))^2}{b^3},\end{aligned}$$

В стационарном случае при $a = b$ формула для дисперсии существенно упрощается. Формулу (15) можно переписать в асимптотической форме и оценить погрешности:

$$\mathbf{D}\alpha_1(i) = \frac{b}{(1-b)^2} \frac{1}{(1-d)^2} (1 - b + p + O(i\rho^i) + O(\rho^i) + O(\rho^{2i})),$$

где

$$\begin{aligned} O(i\rho^i) &= 2A_{11}i\rho^i \leq \frac{2p}{b^2}i\rho^i, \\ O(\rho^i) &= (B_{11} + C_{11})\rho^i \leq \left(1 + \frac{3p}{b} + \frac{13}{b^3}\right)\rho^i, \\ O(\rho^{2i}) &= D_{11}(i) \leq \frac{4p^2}{b^3}\rho^{2i} \end{aligned}$$

и $\rho = \max(p, |d|)$. При необходимости эти оценки легко уточнить. Для компьютерных вычислений при не слишком больших значениях i можно пользоваться точной формулой (15).

Замечание 2. Главный член дисперсии равен умноженной на коэффициент $(1 - b + p)/(1 - d)^2$ дисперсии геометрического распределения с параметром

$$b = p_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(k) = 1\}$$

(см. [3]). Коэффициент $(1 - b + p)/(1 - d)^2$ выражает влияние марковской зависимости. Для последовательности независимых случайных переменных $d = 0$ и $b = p = 1 - q$ и он равен 1.

4.1.2. Вычислим дисперсию $\mathbf{D}\beta_1(i, n)$ случайной величины $\beta_1(i, n)$, используя формулу квадратов и равенство (10). Так как $\beta_1(i, n)$ зависит от двух переменных, то выражение для $\mathbf{D}\beta_1(i, n)$ получается сложнее, чем для $\mathbf{D}\alpha_1(i)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\beta_1(i, n) &= \frac{b}{(1-p)^2} (1 - b + p + (A_2(n-i) + B_2)p^{n-i+1} + C_2d^i \\ &\quad + (D_2(n-i) + E_2)p^{n-i+1}d^i + F_2(i, n)), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= -2(1-p), \quad B_2 = -(2(1-b) + (1-p)), \quad C_2 = \frac{a-b}{b}(2(1-b) - (1-p)), \\ D_2 &= -2\frac{a-b}{b}(1-p), \quad E_2 = -(2(1-b) + (1-p)), \\ F_2(i, n) &= -b \left(p^{n-i+1} - \frac{a-b}{b}d^i + \frac{a-b}{b}p^{n-i+1}d^i \right)^2. \end{aligned}$$

Формулу (16) можно переписать в асимптотической форме и оценить погрешности:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\beta_1(i, n) &= \frac{b}{(1-p)^2} (1 - b + p \\ &\quad + O((n-i)\rho^{n-i}) + O((n-i)\rho^{n+1}) + O(\rho^{(n-i)\wedge i}) + O(\rho^{2((n-i)\wedge i)})), \end{aligned}$$

где $\rho = \max(p, |d|)$ и

$$\begin{aligned} O((n-i)\rho^{n-i}) &= A_2(n-i)p^{n-i+1} \leq 2(n-i)\rho^{n-i}, \\ O((n-i)\rho^{n+1}) &= D_2(n-i)p^{n-i+1}d^i \leq 2\frac{|a-b|}{b}(n-i)\rho^{n+1}, \\ O(\rho^{(n-i)\wedge i}) &= B_2p^{n-i+1} + C_2d^i + E_2p^{n-i+1}d^i \leq 3\left(2 + \frac{|a-b|}{b}\right)\rho^{(n-i)\wedge i}, \\ O(\rho^{2((n-i)\wedge i)}) &= F_2[i, n] \leq \left(1 + 2\frac{|a-b|}{b}\right)^2 \rho^{2((n-i)\wedge i)}. \end{aligned}$$

При необходимости эти оценки легко уточнить. Для компьютерных вычислений при не слишком больших значениях i, n можно пользоваться и точной формулой (16).

4.1.3. Можно вычислить дисперсию $\mathbf{D}\gamma_1(i, n)$ случайной величины $\gamma_1(i, n)$, используя формулу квадратов и равенство (11), но удобнее использовать равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\gamma_1(i, n) &= \mathbf{D}(\alpha_1(i) + \beta_1(i, n) - \xi(i)) = \mathbf{D}\alpha_1(i) + \mathbf{D}\beta_1(i, n) + \mathbf{D}\xi(i) \\ &\quad + 2(\text{cov}(\alpha_1(i), \beta_1(i, n)) - \text{cov}(\alpha_1(i), \xi(i)) - \text{cov}(\beta_1(i, n), \xi(i))). \end{aligned}$$

Из определений и марковского свойства следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\alpha_1(i)\beta_1(i, n)) &= \mathbf{M}\alpha_1(i) \left(\frac{1-p^{n-i}}{1-p} + p^{n-i} \right), \\ \text{cov}(\alpha_1(i), \beta_1(i, n)) &= \mathbf{M}(\alpha_1(i)) \left(\frac{1-p^{n-i}}{1-p} + p^{n-i} - \mathbf{M}\beta_1(i, n) \right), \\ \text{cov}(\alpha_1(i), \xi(i)) &= \mathbf{M}\alpha_1(i)(1 - \mathbf{M}\xi(i)), \\ \text{cov}(\beta_1(i, n), \xi(i)) &= \mathbf{M}\beta_1(i, n)(1 - \mathbf{M}\xi(i)), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\gamma_1(i, n) &= \mathbf{D}\alpha_1(i) + \mathbf{D}\beta_1(i, n) + \mathbf{D}\xi(i) \\ &\quad + 2 \left(\mathbf{M}\alpha_1(i) \frac{1-p^{n-i+1}}{1-p} - \mathbf{M}\gamma_1(i, n)(1 - \mathbf{M}\xi(i)) - \mathbf{M}\alpha_1(i)\mathbf{M}\beta_1(i, n) \right), \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\xi(i) &= b + (a-b)d^i, \\ \mathbf{D}\xi(i) &= (b + (a-b)d^i)(1 - b - (a-b)d^i). \end{aligned}$$

4.2. Дисперсии для 0-серий

Нужные формулы получаются из соответствующих формул для 1-серий заменой $a \rightarrow 1 - a$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, $b \rightarrow 1 - b$, $\rho \rightarrow \sigma = \max(q, |d|)$:

$$\mathbf{D}\alpha_0(i) = \frac{1-b}{b^2} \frac{1}{(1-d)^2} (b + q + O(i\sigma^i) + O(\sigma^i) + O(\sigma^{2i})), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\beta_0(i, n) &= \frac{1-b}{(1-q)^2} (b + q + O((n-i)\sigma^{n-i}) \\ &\quad + O((n-i)\sigma^{n+1}) + O(\sigma^{(n-i)\wedge i}) + O(\sigma^{2((n-i)\wedge i})), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\gamma_0(i, n) &= \mathbf{D}\alpha_0(i) + \mathbf{D}\beta_0(i, n) + \mathbf{D}\xi(i) \\ &\quad + 2 \left(\mathbf{M}\alpha_0(i) \frac{1-q^{n-i+1}}{1-q} - \mathbf{M}\gamma_0(i, n) \mathbf{M}\xi(i) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

4.3. Дисперсии для общих серий

Эти дисперсии получаются из соответствующих дисперсий для 1-серий и 0-серий. Из определений следует, что

$$\begin{aligned} \alpha(i) &= \alpha_1(i) + \alpha_0(i), \\ \beta(i, n) &= \beta_1(i, n) + \beta_0(i, n), \\ \gamma(i, n) &= \gamma_1(i, n) + \gamma_0(i, n), \\ \alpha_1(i)\alpha_0(i) &= \beta_1(i, n)\beta_0(i, n) = \gamma_1(i, n)\gamma_0(i, n) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\alpha(i) &= \mathbf{D}(\alpha_1(i) + \alpha_0(i)) = \mathbf{D}\alpha_1(i) + \mathbf{D}\alpha_0(i) + 2\text{cov}(\alpha_1(i), \alpha_0(i)), \\ 2\text{cov}(\alpha_1(i), \alpha_0(i)) &= \mathbf{M}(\alpha_1(i)\alpha_0(i)) - \mathbf{M}(\alpha_1(i))\mathbf{M}\alpha_0(i) = -\mathbf{M}\alpha_1(i)\mathbf{M}\alpha_0(i), \\ \mathbf{D}\alpha(i) &= \mathbf{D}\alpha_1(i) + \mathbf{D}\alpha_0(i) - 2\mathbf{M}\alpha_1(i)\mathbf{M}\alpha_0(i). \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично

$$\mathbf{D}\beta(i) = \mathbf{D}\beta_1(i) + \mathbf{D}\beta_0(i) - 2\mathbf{M}\beta_1(i)\mathbf{M}\beta_0(i), \quad (22)$$

$$\mathbf{D}\gamma(i) = \mathbf{D}\gamma_1(i) + \mathbf{D}\gamma_0(i) - 2\mathbf{M}\gamma_1(i)\mathbf{M}\gamma_0(i). \quad (23)$$

Используя (9)–(14), (15)–(23), можно получить точные и асимптотические выражения для всех рассматриваемых дисперсий.

5. Особенности распределения длин серий

В марковских последовательностях вероятности длин серий могут не всегда убывать с возрастанием длин и соответствующие распределения могут иметь сложный характер. Будем по-прежнему предполагать, что $0 < p, q < 1$ и, следовательно, $0 < b < 1$, $-1 < d < 1$, $b = 1 \iff p = 1$, $b = 0 \iff q = 1$.

5.1. Особенности концевых 1-серий

Будем рассматривать 1-серии. Результаты для 0-серий получаются из результатов для 1-серий по симметрии. А результаты для общих серий складываются из полученных.

Обозначим через $p_s[k, n]$, $s = 1, 0$, вероятность того, что длина концевой s -серии на отрезке $[0, n]$ равна k . Мы хотим выяснить условия монотонного убывания последовательности $p_s[k, n]$, $s = 1, 0$.

5.1.1. Промежуточный случай $0 < k < n$. Для вероятностей $p_1[k, n]$ в этом случае верны соотношения

$$\begin{aligned} p_1[k, n] &= (1 - b - (a - b)d^{n-k})(1 - q)p^{k-1}, \\ p_1[k + 1, n] &= (1 - b - (a - b)d^{n-k-1})(1 - q)p^k, \\ \frac{p_1[k + 1, n]}{p_1[k, n]} &= \frac{(1 - b - (a - b)d^{n-k-1})(1 - q)p^k}{(1 - b - (a - b)d^{n-k})(1 - q)p^{k-1}} \\ &= \frac{(1 - b - (a - b)d^{n-k-1})p}{(1 - b - (a - b)d^{n-k})}, \\ \frac{p_1[k + 1, n]}{p_1[k, n]} > 1 &\iff p > \frac{1 - b - (a - b)d^{n-k}}{1 - b - (a - b)d^{n-k-1}} \\ &\iff (b - a)d^{n-k-1} > \frac{(1 - b)(1 - p)}{1 - q}, \end{aligned}$$

откуда

$$p_1[k + 1, n] > p_1[k, n] \iff \begin{cases} d^{n-k-1} > \frac{(1 - b)(1 - p)}{(b - a)(1 - q)}, & \text{если } b > a, \\ d^{n-k-1} < \frac{(1 - b)(1 - p)}{(b - a)(1 - q)}, & \text{если } b < a. \end{cases} \quad (24)$$

Пример 1. Пусть

$$n = 100, \quad 90 \leq k \leq 99, \quad a = 0,5, \quad p = 0,97, \quad q = 0,5.$$

Тогда отношения

$$(1 - b)(1 - p)/((b - a)(1 - q)),$$

степени d^{n-k-1} и их разности выражаются таблицами:

$$b = 0,94, \quad d = 0,7, \quad \frac{(1 - b)(1 - p)}{(b - a)(1 - q)} = 0,008,$$

$$d^{n-k-1} = \{0,001, 0,002, 0,005, 0,011, 0,023, 0,049, 0,104, 0,221, 0,470\},$$

$$\begin{aligned} d^{n-k-1} - \frac{(1 - b)(1 - p)}{(b - a)(1 - q)} &= \{-0,007, -0,006, -0,003, 0,003, 0,015, \\ &0,041, 0,096, 0,213, 0,462, 0,992\}. \end{aligned}$$

График распределения $p_1[k, n]$, $1 \leq k \leq 101$ имеет вид

5.1.2. Крайний случай $k = 0$. В этом случае нужно решить неравенство $p_1[1, n] > p_1[0, n]$. Заметим, что

$$p_1[1, 0] > p_1[0, 0] \iff a > 1 - a \iff a > \frac{1}{2}. \quad (25)$$

Если $n > 0$, то

$$p_1[1, n] > p_1[0, n] \iff q < \frac{(b-a)(1-d)d^{n-1}}{1-b+(b-a)d^{n-1}}. \quad (26)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} p_1[1, n] > p_1[0, n] &\iff \frac{p_1[1, n]}{p_1[0, n]} > 1 \iff \frac{(1-b-(a-b)d^{n-1})(1-q)}{1-b-(a-b)d^n} > 1, \\ 1-q &> \frac{1-b-(a-b)d^n}{1-b-(a-b)d^{n-1}} \iff q < 1 - \frac{1-b-(a-b)d^n}{1-b-(a-b)d^{n-1}} \\ &= \frac{(b-a)(1-d)d^{n-1}}{1-b+(b-a)d^{n-1}}. \end{aligned}$$

По сделанному предположению $-1 < d < 1$, поэтому неравенство $p_1[1, n] > p_1[0, n]$ невозможно при $(b-a)d^{n-1} < 0$: оно эквивалентно неравенству $q < 0$. В частности, неравенство $p_1[1, n] > p_1[0, n]$ невозможно при $a \leq b$, $d > 0$ и $n > 0$. Так как $d^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, неравенство $p_1[1, n] > p_1[0, n]$ для больших n возможно только при малых вероятностях q перехода $0 \rightarrow 0$.

Для $n = 1$ получаем простую эквивалентность

$$p_1[1, 1] > p_1[0, 1] \iff q < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a(1-p)}{1-a} \right). \quad (27)$$

Из (27) следует, что для $p_1[1, 1] > p_1[0, 1]$ необходимо, чтобы

$$q < 1/2 \iff 1 - q > 1/2,$$

то есть вероятность перехода $0 \rightarrow 1$ должна быть достаточно велика. Легко получить аналогичную эквивалентность для начальной вероятности:

$$p_1[1, 1] > p_1[0, 1] \iff a < \frac{1-2q}{2(1-q)-p}, \quad p < 2(1-q). \quad (28)$$

При $2(1-q) - p < 0$ неравенство $p_1[1, 1] > p_1[0, 1]$ невозможно, так как в противном случае из (27) следовало бы, что

$$a(2(1-q) - p) < 1 - 2q \iff 1 \leq a < \frac{1-2q}{2(1-q)-p} \iff p > 1.$$

Пример 2. Пусть $a = 1/2$, $p = 0.05m$, $1 \leq m \leq 10$, $q = 0.01$. Тогда

$$\begin{aligned} p_1[1, 1] &= 0,495, \\ p_1[0, 1] &= \{0,503, 0,500, 0,498, 0,495, 0,493, 0,490, 0,488, 0,485, 0,483, 0,480\}, \\ \frac{1}{2} - \frac{a(1-p)}{2(1-a)} - q &= \{-0,0075, -0,0050, -0,0025, 0,0000, 0,0025, \\ &\quad 0,0050, 0,0075, 0,0100, 0,0130, 0,0150\}, \\ \frac{1-2q}{2(1-q)-p} - a &= \{-0,0038, -0,0025, -0,0013, 0,0000, 0,0013, \\ &\quad 0,0026, 0,0039, 0,0052, 0,0065, 0,0078\}, \end{aligned}$$

Пример 3. Пусть $a = 1/4$, $p = q = \{1/6, 1/4\}$. Тогда

$$\begin{aligned} p_1[1, 3] &= \{0,51, 0,42\}, \\ p_1[0, 3] &= \{0,43, 0,47\}, \\ \frac{(b-a)(1-d)d^2}{(1-b+(b-a)d^2)} - q &= \{0,14, -0,08\}. \end{aligned}$$

5.1.3. Крайний случай $k = n$. В этом случае нужно решить неравенство $p_1[n+1, n] > p_1[n, n]$ при прежних предположениях. Из определений следует, что

$$p_1[n, n] = (1-a)(1-q)p^{n-1}, \quad p_1[n+1, n] = ap^n, \quad n > 1.$$

Поэтому

$$p_1[n, n] < p_1[n+1, n] \iff a > \frac{1-q}{1+p-q}. \quad (29)$$

При сделанных предположениях неравенство $p_1[n, n] < p_1[n+1, n]$ верно для достаточно больших начальных вероятностей $a = p_1[0, 1]$ и любых n . Если $p \rightarrow 0$, то $a \rightarrow 1$. Если $q \rightarrow 1$, то $a \rightarrow 0$. При $p = q$

$$p_1[n, n] < p_1[n+1, n] \iff a > 1-q.$$

Пример 4. Пусть $p = 4/5$, $q = 1/(j+1)$, $1 \leq j \leq 10$. Тогда значения нижней границы $(1-q)/(1+p-q)$ для a выражаются таблицей

$$\frac{1-q}{1+p-q} = \{0,38, 0,45, 0,48, 0,50, 0,51, 0,52, 0,52, 0,53, 0,53, 0,53\}.$$

5.2. Особенности накрывающих 1-серий

Особенности начальных 1-серий аналогичны особенностям концевых. Их можно исследовать, обратив последовательность. Распределения длин накрывающих серий имеют более сложный характер, чем распределения начальных или концевых. Это показывают графики распределений, вычисленных с помощью формул (1)–(4).

Пример 5. Пусть $i = 50$, $n = 100$, $a = 0,5$, $p = 0,97$, $q = 0,5$. Тогда график распределения $\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\}$, $1 \leq k \leq 101$, имеет вид

Пример 6. Пусть $i = 25$, $n = 100$, $a = 0,5$, $p = 0,97$, $q = 0,5$. Тогда график распределения $\mathbf{P}\{\gamma_1(i, n) = k\}$, $1 \leq k \leq 101$, имеет вид

Заметим, что распределение для общих накрывающих серий еще сложнее.

6. Производящие функции

6.1. Производящие функции для 1-серий

Будем рассматривать сначала 1-серии. Результаты для 0-серий получаются из результатов для 1-серий по симметрии, а результаты для общих серий складываются из полученных.

6.1.1. Найдем производящую функцию для распределения случайной величины $\alpha_1(n)$. Используя равенства пункта 2.1.1, получаем, что

$$\begin{aligned} f_1[i, x] &= 1 - b - (a - b)d^i + \sum_{l=1}^i (1 - b - (a - b)d^{i-l})(1 - q)p^{l-1}x^l + ap^i x^{i+1} \\ &= 1 - b - (a - b)d^i \\ &\quad + x \left((1 - b)(1 - q) \frac{1 - (px)^i}{1 - px} - (a - b)(1 - q) \frac{d^i - (px)^i}{d - px} + a(px)^i \right). \end{aligned} \quad (30)$$

По условию $-1 < p, d < 1$, поэтому при $i \rightarrow \infty$

$$f_1[i, x] \rightarrow f_1[\infty, x] = 1 - b + \frac{(1 - b)(1 - q)x}{1 - px} = 1 - b + b(1 - p) \frac{x}{1 - px}.$$

Функция $f_1[\infty, x]$ равна производящей функции геометрического распределения с коэффициентом b .

В стационарном случае, когда $a = b$, формула для $f_1[i, x]$ существенно упрощается:

$$f_1[i, x] = 1 - b - (a - b)d^i + x \left((1 - b)(1 - q) \frac{1 - (px)^i}{1 - px} + a(px)^i \right).$$

6.1.2. Найдем производящую функцию для распределения случайной величины $\beta_1(i, n)$. Используя равенства пункта 2.1.2, получаем, что

$$\begin{aligned} g_1[i, n, x] &= 1 - b - (a - b)d^i + \sum_{m=1}^{n-i} (b + (a - b)d^i)(1 - p)p^{m-1}x^m \\ &\quad + (b + (a - b)d^i)p^{n-i}x^{n-i+1} = 1 - b - (a - b)d^i \\ &\quad + x \left((b + (a - b)d^i)(1 - p) \frac{1 - (px)^{n-i}}{1 - px} + (b + (a - b)d^i)(px)^{n-i} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

По условию $-1 < p, d < 1$, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$g_1[i, n, x] \rightarrow g_1[i, \infty, x] = 1 - b - (a - b)d^i + (b + (a - b)d^i)(1 - p) \frac{x}{1 - px},$$

при $n \rightarrow \infty, n - i \rightarrow \infty$

$$g_1[i, n, x] \rightarrow g_1[\infty, \infty, x] = 1 - b + b(1 - p) \frac{x}{1 - px},$$

при $i \rightarrow \infty$ и $m > 0$

$$g_1[i, i + m, x] \rightarrow 1 - b + x \left(b(1 - p) \frac{1 - (px)^m}{1 - px} + b(px)^m \right).$$

В стационарном случае, когда $a = b$, формула для $g_1[i, n, x]$ существенно упрощается:

$$g_1[i, n, x] = 1 - b + b \left((1 - p) \frac{1 - (px)^{n-i}}{1 - px} + (px)^{n-i} \right).$$

6.1.3. Найдем производящую функцию для распределения случайной величины $\gamma_1(i, n)$. Положим

$$\begin{aligned} p_1[i, k] &= \mathbf{P}\{\alpha_1(i) = k\} = (1 - b - (a - b)d^{i-k})(1 - q)p^{k-1}, & 1 \leq k \leq i, \\ p_1[i, k] &= ap^i, & k = i + 1, \\ q_1[i, n, m] &= \mathbf{P}\{\beta_1(i, n) = m \mid \xi(i) = 1\} = p^{m-1}(1 - p), & 1 \leq m \leq n - i, \\ q_1[i, n, m] &= p^{n-i}, & m = n - i + 1, \\ r_1[i, n, k] &= \mathbf{P}\{\gamma(i, n) = k\}, \\ \hat{g}_1[i, n, x] &= \sum_{m=1}^{n-i+1} q_1[i, n, m]x^{m-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$r_1[i, n, 0] = \mathbf{P}\{\xi(i) = 0\} = 1 - b - (a - b)d^i,$$

и благодаря марковскому свойству

$$r_1[i, n, k] = \sum_{l=1}^k p_1[i, n, l]q_1[i, n, k - l + 1], \quad 1 \leq l \leq n + 1,$$

откуда

$$\begin{aligned}
 h_1[i, n, x] &= \sum_{k=0}^{n+1} r_1[i, n, k] x^k = p_1[i, 0] + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l=1}^k p_1[i, l] x^l q_1[i, n, k-l+1] x^{k-l} \\
 &= p_1[i, 0] + \sum_{l=1}^{i+1} x^l \sum_{m=1}^{n-i+1} q_1[i, n, m] x^{m-l} \\
 &= p_1[i, 0] + (f_1[i, x] - p_1[i, 0]) \hat{g}_1[i, n, x].
 \end{aligned}$$

Подстановка значений вероятностей и суммирование приводят к равенствам

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_1[i, n, x] &= \frac{(1-p)(1-(px)^{n-i})}{1-px} + p^{n-i} x^{n-i}, \\
 h_1[i, n, x] &= 1-b-(a-b)d^i \\
 &\quad + \left((1-b)(1-q) \frac{1-(px)^i}{1-px} - (a-b)(1-q) \frac{d^i-(px)^i}{d-px} + a(px)^i \right) \\
 &\quad \times \left(\frac{(1-p)(1-(px)^{n-i})}{1-px} + p^{n-i} x^{n-i} \right) x. \tag{32}
 \end{aligned}$$

В стационарном случае, когда $a = b$, формула для $h_1[i, n, x]$ упрощается.

По условию $-1 < p, d < 1$, поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 h_1[i, n, x] &\rightarrow h_1[i, \infty, x] = \left(1-b-(a-b)d^i \right. \\
 &\quad \left. + \left((1-b)(1-q) \frac{1-(px)^i}{1-px} - (a-b)(1-q) \frac{d^i-(px)^i}{d-px} + a(px)^i \right) x \right) \frac{1-p}{1-px} x
 \end{aligned}$$

и при $i \rightarrow \infty$

$$h_1[i, \infty, x] \rightarrow h_1[\infty, \infty, x] = \left(1-b + \frac{(1-b)(1-q)}{1-px} x \right) \left(\frac{1-p}{1-px} x \right).$$

6.2. Производящие функции для 0-серий

Нужные формулы получаются из формул (30)–(32) для 1-серий заменой $a \rightarrow 1-a$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, $b \rightarrow 1-b$:

$$f_0[i, x] = b + (a-b)d^i \tag{33}$$

$$+ \left(b(1-p) \frac{1-(qx)^i}{1-qx} + (a-b)(1-p) \frac{d^i-(qx)^i}{d-qx} + (1-a)(qx)^i \right) x,$$

$$g_0[i, n, x] = b + (a-b)d^i \tag{34}$$

$$+ \left((1-b-(a-b)d^i)(1-q) \frac{1-(qx)^{n-i}}{1-qx} + (1-b-(a-b)d^i)(qx)^{n-i} \right) x,$$

$$\begin{aligned}
 h_0[i, n, x] &= b + (a-b)d^i + \left(b(1-p) \frac{1-(qx)^{n-i}}{1-qx} + (a-b)(1-p) \frac{d^i-(qx)^i}{d-qx} \right. \\
 &\quad \left. + (1-a)(qx)^i \right) \left(\frac{(1-q)(1-(qx)^{n-i})}{1-qx} + q^{n-i} x^{n-i} \right) x. \tag{35}
 \end{aligned}$$

В стационарном случае, когда $a = b$, формулы (33)–(35) значительно упрощаются.

6.3. Производящие функции для общих серий

Формулы для общих серий получаются из формул (30)–(35) для 1-серий и 0-серий. Найдем, например, производящую функцию $f[i, x]$ для распределения длины $\alpha(i)$ общей концевой серии. Так как $\mathbf{P}\{\alpha(i) = 0\} = 0$, из формул (30), (33) следует, что

$$\begin{aligned} f[i, x] &= \sum_{l=0}^{i+1} \mathbf{P}\{\alpha(i) = l\} x^l = \sum_{l=0}^{i+1} (\mathbf{P}\{\alpha_1(i) = l\} + \mathbf{P}\{\alpha_0(i) = l\}) x^l \\ &= f_1[i, x] - (1 - b - (a - b)d^i) + f_0[i, x] - (b + (a - b)d^i), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} f[i, x] &= \left(a(px)^i + \frac{(1-b)(1-q)(1-(px)^i)}{1-px} - \frac{(a-b)(1-q)(d^i - (px)^i)}{d-px} \right. \\ &\quad \left. + (1-a)(qx)^i + \frac{b(1-p)(1-(qx)^i)}{1-qx} + \frac{(a-b)(1-p)(d^i - (qx)^i)}{d-qx} \right) x. \end{aligned}$$

Разложение функции $f[i, x]$ в ряд удобно получать с помощью разложений функций $f_1[i, x]$ и $f_0[i, x]$.

7. Операторные уравнения

Использование концевых серий позволяет составить сравнительно простые операторные уравнения для распределений максимумов длин серий в марковских последовательностях. Некоторые такие уравнения для конечных и счетных множеств значений выписаны в [4]–[7].

7.1. Совместные распределения

Приведем уравнения, определяющие совместные распределения числа x_n значений и числа y_n серий выбранных типов, максимума z_n длин этих серий в марковской последовательности $\xi(0), \dots, \xi(n)$ с конечным множеством C значений, начальным распределением $P = (p_\delta)$ и переходной матрицей $Q = (q_{\gamma\delta})$, $\gamma, \delta \in C$. Предполагаемая однородность марковской последовательности позволяет упростить рассуждения, проведенные в [5] для общего случая (см. также [7]).

7.1.1. Разобьем множество C на части A_ν , $\nu \in \Gamma$, и положим $B_\nu = C - A_\nu$. Рассмотрим семейства

$$x_n = (x_{n\nu}), \quad y_n = (y_{n\nu}), \quad z_n = (z_{n\nu})$$

случайных величин $x_{n\nu}$, $y_{n\nu}$, $z_{n\nu}$, равных соответственно числу ν -значений, ν -серий, максимуму длин ν -серий в марковской последовательности

$$\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(n)$$

$n \geq 0, v \in \Gamma$. Индикаторы множеств $R, S, T \subset \Gamma$ определяют семейства

$$Rx_n = (R(v)x_{nv}), \quad Sy_n = (S(v)y_{nv}), \quad Tz_n = (T(v)z_{nv})$$

с нулевыми значениями для $v \notin R, v \notin S, v \notin T$. Аналогично определяются семейства

$$Ri = (R(v)i_v), \quad Sj = (S(v)j_v), \quad Tk = (T(v)k_v)$$

для семейств $i = (i_v), j = (j_v), k = (k_v)$ целых чисел $i_v, j_v, k_v \geq 0$. Для каждого $\delta \in C$ существует единственный индекс $\mu = \mu(\delta) \in \Gamma$ такой, что $\delta \in A_\mu$. Положим

$$e_\mu = (e_\mu(v)), \quad e = (e(v)), \quad e_\mu(\mu) = 1, \quad e_\mu(v) = 0, \quad v \neq \mu, \quad e(v) = 1, \quad v \in \Gamma.$$

Множества $R, S, T \subset \Gamma$ определяют семейства Re_μ, Se_μ, Te_μ . Кроме множества $A \subset C$ и его индикатора будем той же буквой A обозначать диагональную $C \times C$ матрицу с элементами $A(\delta)$ на диагонали, $A(\delta) = 1$ при $\delta \in A$ и $A(\delta) = 0$ при $\delta \notin A$. В частности, I обозначает множество $I = C$, его тождественное преобразование и единичную $C \times C$ матрицу. Положим

$$A_{\mu\mu} = A_\mu Q A_\mu, \quad B_{\mu\mu} = B_\mu Q B_\mu.$$

7.1.2. Рассмотрим вероятности f_δ , составленные из них семейства F и векторную производящую функцию $\hat{F}$:

$$\begin{aligned} f_\delta(i, j, k, n) &= \mathbf{P}\{Rx_n = Ri, Sy_n = Sj, Tz_n \leq Tk, \xi_n = \delta\}, \\ F(i, j, k, n) &= (f_\delta(i, j, k, n)), \quad \delta \in C, \\ \hat{F}(s, t, k, u) &= \sum_{i, j, n} F(i, j, k, n) s^{Ri} t^{Sj} u^n, \end{aligned}$$

где

$$s^{Ri} = \prod_{\rho \in R} s_\rho^{i(\rho)}, \quad t^{Sj} = \prod_{\sigma \in S} t_\sigma^{j(\sigma)}, \quad s = (s_v), \quad t = (t_v), \quad |s_v| \leq 1, \quad |t_v| \leq 1, \quad |u| < 1.$$

Из результатов раздела 4.2 в [5] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Функция $\hat{F}$ является решением уравнения

$$\hat{F}(I - Ku) = L,$$

где

$$\begin{aligned} K &= \sum_{\mu} (A_{\mu\mu} + B_{\mu\mu} \Delta_\mu t^{Se_\mu}) s^{Re_\mu}, \\ L &= \sum_{\mu} P(\Delta_\mu - B_\mu) t^{Se_\mu} s^{Re_\mu}, \\ \Delta_\mu &= I - T(\mu) A_{\mu\mu}^m s^{mRe_\mu} u^m. \end{aligned}$$

Эти формулы уточняют формулы, указанные в разделе 4.2 в [5] и теореме 3 в разделе 2.1.4 статьи [7]. Матрицы $Q, A_{\mu\mu}, B_{\mu\mu}, \Delta_\mu, K$ представляют ограниченные линейные

операторы в пространстве $L^1 = L^1(C)$ вещественных функций на множестве C , причем для норм верны соотношения

$$|Q| = 1, \quad |A_{\mu\mu}| \leq 1, \quad |B_{\mu\mu}| \leq 1, \quad \Delta_\mu \leq 1, \quad |K| \leq 3.$$

Поэтому при $|u| < 1/3$ рассматриваемое уравнение корректно и

$$\hat{F} = L(I - Ku)^{-1} = L \sum_{n=0}^{\infty} K^n u^n, \quad |u| < 1/3.$$

Замечание 3. При составлении рекуррентных уравнений, из которых выводятся операторные, существенно используются длины концевых серий в последовательности $\xi(0), \dots, \xi(n)$. Аналогичные операторные равенства верны и для бесконечного счетного множества C (см. [4]).

7.2. Случайные блуждания

Для двоичных марковских последовательностей, когда $C = \Gamma = \{1, 0\}$, распределения характеристик серий существенно упрощаются. Будем рассматривать только 1-серии. Результаты для 0-серий и общих серий можно получить по аналогии.

7.2.1. Вернемся к определениям раздела 7.1 и перейдем к индексной нумерации переменных. Обозначим z_n максимум длин 1-серий и $w_n = \alpha_1(n)$ длину концевой 1-серии на отрезке $[0, n]$. Заметим, что $w_n \in \{0, \dots, n+1\}$, последовательность $\{w_n\}$ марковская и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{w_{n+1} = 0 \mid w_n = 0\} &= q, \\ \mathbf{P}\{w_{n+1} = 1 \mid w_n = 0\} &= 1 - q, \\ \mathbf{P}\{w_{n+1} = 0 \mid w_n = 1\} &= 1 - p, \\ \mathbf{P}\{w_{n+1} = l + 1 \mid w_n = l\} &= p, \quad l > 0. \end{aligned}$$

Из определений следует, что $\xi(n) \leq w_n \leq z_n$. Последовательность пар (z_n, w_n) марковская и описывает случайное блуждание по целочисленной решетке в бесконечном треугольнике $T = \{(k, l) : 0 \leq l \leq k\}$. Будем пару (k, l) обозначать также kl . Переходные вероятности для (z_n, w_n) определяются равенствами

$$\begin{aligned} \hat{q}(k0, k0) &= \mathbf{P}\{(z_{n+1}, w_{n+1}) = k0 \mid (z_n, w_n) = k0\} = q, \\ \hat{q}(k0, k1) &= \mathbf{P}\{(z_{n+1}, w_{n+1}) = k1 \mid (z_n, w_n) = k0\} = 1 - q, \\ \hat{q}(k0, kl) &= \mathbf{P}\{(z_{n+1}, w_{n+1}) = kl \mid (z_n, w_n) = k0\} = 1 - p, \quad 0 < l \leq k, \\ \hat{q}(kl, (k, l+1)) &= \mathbf{P}\{(z_{n+1}, w_{n+1}) = (k, l+1) \mid (z_n, w_n) = kl\} = p, \quad 0 < l < k, \\ \hat{q}(kk, (k+1, k+1)) &= \mathbf{P}\{(z_{n+1}, w_{n+1}) = (k+1, k+1) \mid (z_n, w_n) = kk\} = p. \end{aligned}$$

Находясь в момент n во внутренней точке треугольника T , частица в момент $n+1$ может с вероятностью p подняться на единицу вверх, а с вероятностью $1-p$ упасть на горизонтальную ось. С вероятностью q она может остаться на оси, а с вероятностью $1-q$ подняться на единицу вверх. Находясь в точке (k, k) на диагонали, частица может с вероятностью p передвинуться по ней в точку $(k+1, k+1)$, а с вероятностью $1-p$ упасть на горизонтальную ось. Таким образом, частица может двигаться скачками указанных размеров вверх, вниз, вправо-вверх и не может двигаться влево.

7.2.2. Запишем множество значений пары (z_n, w_n) в лексикографическом порядке:

$$C = \{00, 10, 11, 20, 21, 22, \dots, k0, k1, \dots, kk, \dots\}.$$

Случайные векторы (z_n, w_n) образуют марковскую последовательность с множеством значений C , начальными вероятностями

$$p(00) = \mathbf{P}\{(z_0, w_0) = 00\} = 1 - a, \quad p(11) = \mathbf{P}\{(z_0, w_0) = 11\} = a$$

и переходными вероятностями $\hat{q}(ij, kl)$. Составленная из них $C \times C$ матрица $\hat{Q}$ является блочно-треугольной. Ее диагональ состоит из элемента $A(0) = q$ и матриц

$$A(k) = \begin{pmatrix} q & 1-q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & \dots & p \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

размера $(k+1) \times (k+1)$, $k > 0$. К матрице $A(k)$ справа примыкает матрица $B(k)$ размера $(k+1) \times (k+2)$ с единственным ненулевым элементом p в правом нижнем углу. Вместе с нулевыми матрицами перед $A(k)$ и после $B(k)$ они составляют бесконечную k -ю полосу матрицы $\hat{Q}$.

В степенях $\hat{Q}^n$ матрицы $\hat{Q}$ диагональ состоит из матриц $A^n(k)$. Вслед за ними идут произведения различных матриц $A(l)$, $B(m)$ и их степеней. В частности, ненулевыми блоками в k -й полосе матрицы $\hat{Q}^2$ являются

$$A^2(k), \quad A(k)B(k) + B(k)A(k+1), \quad B(k)B(k+1).$$

Все эти матрицы имеют простой вид.

7.3. Рекуррентные уравнения

Случайное блуждание, описанное в разделе 7.2.1, определяется системой рекуррентных уравнений и эквивалентным ей матричным уравнением специального вида.

7.3.1. Пусть

$$p(k, l, n) = \mathbf{P}\{z_n = k, w_n = l\}, \quad p(0, 0, 0) = 1 - a, \quad p(1, 1, 0) = a.$$

Используя формулу полной вероятности и марковское свойство, получаем, что при $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} p(k, 0, n) &= p(k, 0, n-1)q + (1-p) \sum_{l=1}^k p(k, l, n-1), \\ p(k, 1, n) &= p(k, 0, n-1)(1-q), \\ p(k, l, n) &= p(k, l-1, n-1)p, & 1 < l \leq k, \\ p(k, k, n) &= p(k-1, k-1, n-1)p, & 1 < k \leq n+1. \end{aligned} \tag{36}$$

В частности,

$$p(0, 0, n) = (1 - a)q^n, \quad p(n + 1, n + 1, n) = ap^n.$$

Эти равенства позволяют последовательно вычислять вероятности $p(k, l, n)$. Суммируя, можно получить распределения случайных переменных z_n, w_n :

$$p(k, n) = \mathbf{P}\{z_n = k\} = \sum_{l=0}^k p(k, l, n),$$

$$q(k, n) = \mathbf{P}\{w_n = l\} = \sum_{k=l}^{n+1} p(k, l, n).$$

Заметим, что первое из уравнений системы (36) имеет порядок k по переменной l . Он может быть большим. Переход к функциям распределения

$$f(k, m, n) = \mathbf{P}\{z_n = k, w_n \leq m\} = \sum_{l=0}^m p(k, l, n)$$

позволяет избежать больших порядков, но требует дополнительно вычисления и исследования разностей

$$p(k, l, n) = f(k, l, n) - f(k, l - 1, n)$$

(ср. с [5]).

7.3.2. Рассмотрим векторы

$$\bar{p}(k, n) = (p(k, 0, n), p(k, 1, n), \dots, p(k, k, n)).$$

Если $1 < k \leq n$, то система (36) эквивалентна матричному уравнению

$$\bar{p}(k, n) = \bar{p}(k, n - 1)A(k) + \bar{p}(k - 1, n - 1)B(k - 1). \quad (37)$$

Заметим, что

$$\bar{p}(k - 1, n - 1)B(k - 1) = (0, \dots, 0, p(k - 1, k - 1, n - 1)p) = \bar{b}(k, n),$$

$$p(k, k, n) = p(k - 1, k - 1, n - 1)p + p(k, k - 1, n - 1)p. \quad (38)$$

Уравнение (38) можно решить с помощью системы (36). Уравнение (37) можно переписать в виде

$$\bar{p}(k, n) = \bar{p}(k, n - 1)A(k) + \bar{b}(k, n). \quad (39)$$

Соответствующее однородное уравнение

$$\bar{p}(k, n) = \bar{p}(k, n - 1)A(k) \quad (40)$$

имеет матрицу простого вида: все ее элементы, кроме элементов первого столбца и следующей за ним диагонали, равны 0. В первой строке два ненулевых элемента равны q и $1 - q$, а во всех остальных равна p и $1 - p$.

7.3.3. Как нетрудно проверить, для характеристического полинома

$$\Delta_k(\lambda) = \det(\lambda I(k) - A(k))$$

матрицы $A(k)$ верны равенства

$$\Delta_0(\lambda) = \lambda - q, \quad \Delta_{k+1}(\lambda) = \lambda \Delta_k(\lambda) - (1 - q)(1 - p)p^k,$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta_k(\lambda) &= \lambda^k(\lambda - q) - (1 - q)(1 - p)(\lambda^{k-1} + p\lambda^{k-2} + \dots + p^{k-2}\lambda + p^{k-1}), \\ (\lambda - p)\Delta_k(\lambda) &= \lambda^{k+2} - (p + q)\lambda^{k+1} + (1 - p - q)\lambda^k + (1 - p)(1 - q)p^k. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты при степенях переменной λ следующим образом выражаются через определитель d матрицы Q переходных вероятностей двоичной марковской последовательности $(\xi(n))$:

$$p + q - 1 = d = \det Q.$$

Аналогичные полиномы рассматривались в [7]–[9] при исследовании распределения длин серий в последовательностях независимых случайных величин.

7.3.4. Для вычисления экстремального корня $\lambda(k)$ полинома $(\lambda - p)\Delta_k(\lambda)$ можно использовать теорему Лагранжа об обращении ряда [10]. Пусть $d \neq 0$ и

$$\varphi(y) = y^{1+1/k} \left(\frac{y^{1/k} - 1}{d} - 1 \right), \quad a = (1 - p)(1 - q) \frac{p^k}{d}.$$

При $\lambda \neq p$ характеристическое уравнение $\Delta_k(\lambda) = 0$ эквивалентно системе уравнений

$$y = a + \varphi(y), \quad y = \lambda^k(k).$$

По теореме Лагранжа

$$\lambda(k) = y^{1/k} = a + \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}} [y^{1/(k-1)} \varphi^m(y), y = a].$$

Вычислив нужные производные в точке $y = a$ произведений $y^{1/(k-1)} \varphi^m(y)$, можно получить выражение для $\lambda(k) = y^{1/k}$ в виде ряда, аналогичное полученным в [8, 9]. Первые члены этого ряда дадут приближенные значения экстремального корня $\lambda(k)$, а вместе с ними и приближенные значения вычисляемых вероятностей [3].

7.4. Операторные уравнения

Составим операторное уравнение для распределения

$$\bar{p}(n) = (p(kl, n)), \quad kl \in C, \quad p(kl, n) = \mathbf{P}\{z_n = k, w_n = l\}$$

случайного вектора (z_n, w_n) .

7.4.1. Из определений следует (см. раздел 7.2.2), что

$$\bar{p}(0) = (1 - a, 0, a, 0, \dots), \quad \bar{p}(n+1) = \bar{p}(n)\bar{Q}, \quad n \geq 0. \quad (41)$$

Рассмотрим банахово пространство $L^1 = L^1(C)$ суммируемых числовых функций на множестве

$$C = \{00, 10, 11, \dots, k0, k1, \dots, kk, \dots\}.$$

Ясно, что $\bar{p}(n) \in L^1$ и норма $|\bar{p}(n)| = 1$. Матрица $\bar{Q}$ представляет ограниченный линейный оператор в $L^1(C)$ и имеет норму 1. Такие операторы и линейные операторные уравнения подробно рассматривались в [11]. Пусть

$$\hat{p}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)u^n, \quad |u| < 1.$$

Так как $|\hat{p}(u)| = 1$, векторный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)u^n$$

абсолютно суммируем при $|u| < 1$ и функция $\hat{p}$ определена внутри единичного круга.

7.4.2. Умножая равенство (41) на u^n и суммируя, получаем операторное уравнение для $\hat{p}$:

$$\hat{p}(u) - \bar{p}(0) = \hat{p}(u)\bar{Q}u, \quad \hat{p}(u)(I - \bar{Q}u) = \bar{p}(0). \quad (42)$$

Здесь $\hat{p}(u)$ обозначает единичную $C \times C$ матрицу, которая представляет тождественное преобразование множества C . Так как

$$|\bar{Q}u| = |\bar{Q}||u| < 1,$$

уравнение (42) корректно и его решение представляется рядом Неймана

$$\hat{p}(u) = \bar{p}(0)(I - \bar{Q}u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(0)\bar{Q}^n u^n.$$

Это соответствует равенству $\bar{p}(n) = \bar{p}(0)\bar{Q}^n$, вытекающему из марковского свойства (41).

Дело сводится к исследованию степеней блочно-треугольной матрицы $\bar{Q}$ или обратной матрицы $(I - \bar{Q}u)^{-1}$. Особенно простой вид эти матрицы имеют при $p = q$ и при $p = q = 1/2$.

Замечание 4. В последние годы появился целый ряд работ, посвященных различным характеристикам серий в случайных последовательностях. Рассматриваются, в частности, и двоичные марковские последовательности [12]–[16].

Список литературы

1. Марков А.А., *Исчисление вероятностей*. Типография Императорской Академии Наук, Санкт-Петербург, 1913.
2. Романовский В. И., *Дискретные цепи Маркова*. Гостехиздат, Москва, 1949.
3. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1. Мир, Москва, 1984.
4. Савельев Л. Я., Операторные уравнения для производящих функций. *Докл. АН СССР* (1995) **343**, №6, 740–742.
5. Savelyev L. Ya., Runs in finite Markov chains. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. VSP, Utrecht, 1993, pp. 437–450.
6. Savelyev L. Ya., Operator and recursion equations for runs in random sequences. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. VSP, Utrecht, 1997, pp. 65–86.
7. Савельев Л. Я., Случайные соответствия, двоичные матрицы и серии. *Дискретная математика* (1999) **11**, №4, 3–26.
8. Косточка А. В., Мазуров В. Д., Савельев Л. Я., Число q -ичных слов с ограничениями на длину максимальной серии. *Дискретная математика* (1998) **10**, №1, 10–19.
9. Савельев Л. Я., Максимум длин серий в обобщенных последовательностях Бернулли. *Дискретная математика* (1999) **11**, №1, 29–52.
10. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., *Курс современного анализа*. Москва, Гостехиздат, 1962.
11. Савельев Л. Я., Марковские матричные операторы. Деп. ВИНТИ, №457-В95, 1995.
12. Fu J. C., Koutras M. V., Distribution theory of runs: A Markov chain approach. *J. Amer. Statist. Assoc.* (1994) **89**, 1050–1058.
13. Koutras M. V., Alexandrou V. A., Runs, scans and urn model distributions: A unified Markov chain approach. *Ann. Inst. Statist. Math.* (1995) **47**, 519–529.
14. Balakrishnan N., Joint distributions of numbers of success-runs and failures until the first consecutive k successes in a binary sequence. *Ann. Inst. Statist. Math.* (1997) **49**, 519–529.
15. Uchida M., On number of occurrences of success runs of specified length in a higher-order two-state Markov chain. *Ann. Inst. Statist. Math.* (1998) **50**, 587–601.
16. Aki S., Hirano K., Numbers of success-runs of specified length until certain stopping time rules and generalized binomial distributions of order k . *Ann. Inst. Statist. Math.* (2000) **52**, 767–777.

Статья поступила 17.11.2002.