Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, А. А. Веденев, А. Н. Кузнецов, В. В. Носов,
О хороших парах в реберно регулярных графах, *Дискрет.
матем.*, 2003, том 15, выпуск 1, 77–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:05:06

О хороших парах в реберно регулярных графах

© 2003 г. А. А. Махнев, А. А. Веденев,
А. Н. Кузнецов, В. В. Носов

Неориентированный v -вершинный граф, в котором степени всех вершин равны k , а каждое ребро принадлежит точно λ треугольникам, называется реберно регулярным с параметрами (v, k, λ) . Положим $b_1 = k - \lambda - 1$. Пару вершин u, w назовем хорошей, если эти вершины имеют точно $k - 2b_1 + 1$ общих соседей. Доказано, что если $k \geq 3b_1 - 1$, то либо для любой вершины u не более двух вершин из Γ образуют хорошие пары с u , либо $k = 3b_1 - 1$, Γ является многоугольником или графом икосаэдра и любые две вершины, находящиеся на расстоянии 2 образуют хорошие пары. Получена новая верхняя оценка для числа вершин в реберно регулярном графе диаметра 2 с $k \geq 3b_1 - 1$. Установлено, что реберно регулярный граф с параметрами треугольного графа $T(n)$, $n = 5, 6$, графа Клебша или графа Шлефли совпадает с соответствующим графом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00772.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a .

Граф Γ называется регулярным графом степени k , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ) , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным графом. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем λ -подграфом (μ -подграфом).

Через $K_{m_1, \dots, m_n}$ обозначим полный n -дольный граф, доли которого содержат соответственно $m_1, \dots, m_n$ вершин. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$.

Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется $m \times n$ решеткой, если $|X| = m, |Y| = n$ и вершины $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

В лемме 1.4.2 из [1] доказано, что если Γ — неполный связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $\lambda \geq 2k/3 - 1$, (эквивалентно $k \geq 3b_1$), то Γ имеет диаметр 2, $v \leq 2k - 2$ и выполняется неравенство

$$kb_1 > (v - k - 1)(k + 1 - 2b_1). \quad (1)$$

Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Тогда (см. лемму 1) степень вершины в любом μ -подграфе из Γ не больше $k - 2b_1$. Поэтому для $\mu_* = k - 2b_1 + 1$ и любых вершин u, w , находящихся на расстоянии 2, выполняется неравенство $\mu(u, w) \geq \mu_*$. Пару несмежных вершин (u, w) назовем хорошей, если $\mu(u, w) = \mu_*$. Цель данной работы — изучение расположения хороших пар в реберно регулярных графах. При этом существенно уточнено неравенство (1) и получена характеристика треугольного графа $T(n)$, $n = 5, 6$, графа Клебша или графа Шлефли как реберно регулярных графов с соответствующими параметрами.

Теорема 1. Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $d \in \Gamma$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если $k \geq 4b_1 - 1$, то Γ не содержит хороших пар;
- (2) если $k \geq 3b_1 + 1$, то $\mu(d, w) = \mu_*$ для не более чем одной вершины w из $\Gamma_2(d)$;
- (3) если $k \geq 3b_1 - 1$, то либо $k = 3b_1 - 1$, Γ является многоугольником или графом икосаэдра и любые две вершины, находящиеся на расстоянии 2, образуют хорошие пары, либо $\mu(d, w_i) = \mu_*$ для не более чем двух вершин w_i из $\Gamma_2(d)$.

Следствие 1. Пусть Γ — неполный связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $k \geq 3b_1 - 1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $k = 3b_1 - 1$ и Γ — многоугольник или граф икосаэдра;
- (2) Γ — полный многодольный граф $K_{n \times m}$, треугольный граф $T(n)$, $n = 5, 6$, граф Клебша или граф Шлефли;
- (3) диаметр Γ равен 2, $b_1 \geq 5$ и либо Γ не содержит хороших пар и

$$kb_1 > (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2),$$

либо Γ содержит хорошую пару и

$$kb_1 > (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + 2b_1 - 3.$$

Следствие 2. Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами треугольного графа $T(n)$, $n = 5, 6$, графа Клебша или графа Шлефли. Тогда Γ совпадает с соответствующим графом.

Доказательство следствия 1 опирается на следующий результат, имеющий независимый интерес.

Предложение 1. Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $b_1 = 4$ и $k \geq 11$. Тогда Γ — полный многодольный граф $K_{r \times 5}$.

В работе используется следующее обозначение. Если x, y — различные вершины графа Γ , то через $\Lambda_{x,y}$ обозначается подграф $\Gamma - (x^\perp \cup y^\perp)$.

2. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = k - \lambda - 1$. Если вершины u, w находятся на расстоянии 2 в Γ , то выполняются следующие утверждения:

- (1) степень любой вершины в μ -подграфе из Γ не меньше $k - 2b_1$;
- (2) если вершина d имеет степень α в графе $[u] \cap [w]$, то $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$;
- (3) если $\mu(u, w) = \mu_*$, то подграф $[u] \cap [w]$ является кликой и $[d] \subset u^\perp \cup w^\perp$ для любой вершины $d \in [u] \cap [w]$;
- (4) если $\Lambda_{u,w}$ содержит единственную вершину z , то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.

Доказательство. Пусть $d \in [u] \cap [w]$. Тогда

$$|[d] - [u]| = |[d] - [w]| = b_1.$$

Поэтому по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[d]$ содержится в $[u] \cap [w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d \in [u] \cap [w]$ и степень d в этом μ -подграфе равна α . Тогда

$$k = \alpha + 2b_1 - |[d] - (u^\perp \cup w^\perp)|.$$

Поэтому $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (1), (2).

Пусть $\{z\} = \Lambda_{u,w}$. Число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1|[u] - [w]| - \mu(u, z)$, поэтому $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что если любая пара несмежных вершин графа Γ является хорошей, то Γ оказывается графом Тервиллигера без 3-лап и по теореме 1.2.3 из [1] Γ — пятиугольник.

Лемма 2. Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Если Γ — не полный граф и $\lambda \geq 2k/3 - 1$ (эквивалентно $k \geq 3b_1$), то Γ имеет диаметр 2, $v \leq 2k - 2$ и выполняется неравенство

$$kb_1 > (v - k - 1)(k + 1 - 2b_1).$$

Лемма 2 есть лемма 1.4.2 в [1].

Лемма 3. Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Если $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k+2}$, то Γ — дополнительный граф для сильно регулярного графа Δ с $\mu(\Delta) \leq 2$.

Лемма 3 есть второе утверждение теоремы 1.4.3 в [1].

Лемма 4. Пусть Γ — реберно регулярный граф и $\mu(u, w) = \mu(u, z) = \mu_*$ для смежных вершин w, z из $\Gamma_2(u)$. Тогда

$$|[u] \cap [w] \cap [z]| < 2.$$

Доказательство. Пусть $\gamma = |[u] \cap [w] \cap [z]|$ и p, q — различные вершины из $[u] \cap [w] \cap [z]$. Тогда $[p]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $([z] \cap [w]) - [u]$, причем

$$|([z] \cap [w]) - [u]| = \lambda - \gamma.$$

Следовательно, $[p] \cap [q]$ содержит $u, w, z, \gamma - 2$ вершин из $[u] \cap [w] \cap [z]$, по $\mu_* - \gamma$ вершин из $([u] \cap [w]) - [z]$ и из $([u] \cap [z]) - [w]$ и не менее $2(b_1 - 2) - (\lambda - \gamma)$ вершин из $([z] \cap [w]) - [u]$. Поэтому

$$|[p] \cap [q]| \geq 3 + (\gamma - 2) + 2(\mu_* - \gamma) + (2b_1 - 4 - \lambda + \gamma),$$

то есть $2\mu_* - 3 + 2b_1 \leq 2\lambda$. Получено противоречие с тем, что $\mu_* = \lambda + 2 - b_1$.

Лемма 5. Пусть Γ — реберно регулярный граф с $\mu(u, w) = \mu_*$, $\mu(u, z) = \mu_* + 1$ для смежных вершин w, z из $\Gamma_2(u)$, $\gamma = |[u] \cap [w] \cap [z]|$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $\gamma < 2$;
- (2) если $\gamma = 1$, $d \in [u] \cap [w] \cap [z]$, то $k \leq 3b_1 - 1$ и в случае равенства d не смежна с единственной вершиной из $([u] \cap [z]) - [w]$ и $[d] - u^\perp \subset [w] \cap [z]$.

Доказательство. Пусть $\gamma = |[u] \cap [w] \cap [z]|$ и p, q — различные вершины из $[u] \cap [w] \cap [z]$. Если $[p]$ содержит α вершин из $[w] - ([u] \cup [z])$, то по лемме 1 $[p]$ содержит $\mu_* - \gamma + \alpha$ вершин из $([z] \cap [u]) - [w]$ и $b_1 - 2 - \alpha$ вершин из $([z] \cap [w]) - [u]$, причем

$$|([z] \cap [w]) - [u]| = \lambda - \gamma.$$

Следовательно, $[p] \cap [q]$ содержит $u, w, z, \mu_* - 2$ вершин из $[u] \cap [w] \cap [z]$,

$$2(\mu_* - \gamma - 2) - (\mu_* - 2b_1 - \gamma + 1 + \lambda - \gamma)$$

вершин из $([u] \cap [z] - [w]) \cup ([w] \cap [z] - [u])$. Поэтому

$$|[p] \cap [q]| \geq 3 + (\mu_* - 2) + (\mu_* + 2b_1 - 5 - \lambda),$$

то есть $2\mu_* - 4 + 2b_1 \leq 2\lambda$. Так как $\mu_* = \lambda + 2 - b_1$, нестрогое неравенство превращается в равенство, поэтому каждая вершина из $[w] - [u]$ смежна не более чем с одной вершиной из $[u] \cap [w] \cap [z]$ и $[w] \cap [z] \subset [x] \cup [y]$ для любых различных вершин x, y из $[u] \cap [w] \cap [z]$.

Так как p не смежна по крайней мере с $\lambda - \gamma - b_1 + 2$ вершинами из $[w] \cap [z]$, то $\gamma(\lambda - \gamma - b_1 + 2) \leq \lambda - \gamma$. Отсюда $\gamma^2 - \gamma(\lambda + 3 - b_1) + \lambda \geq 0$. Заметим, что

$(\lambda - b_1 + 3)^2 - 2\lambda < (\lambda + 4 - b_1)^2$ при $b_1 \geq 4$, и в этом случае $\gamma \geq \lambda - b_1 + 3 = \mu_* + 1$, что невозможно.

Пусть $b_1 = 3$. Тогда $\gamma^2 - \gamma\lambda + \lambda \geq 0$ и $\lambda = \mu_* + 1 \leq 4$. Так как $\gamma \geq 2$, то $3 \leq k - 4 \leq 4$. Следовательно, $k = 8$, $\lambda = 4$ и $v = 15$. Поэтому $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$, $[z]$ содержит 3 вершины из $[u] - [w]$ и $\mu(u, z) \geq 5$, что невозможно.

Если $b_1 = 2$, то $\gamma^2 - \gamma(\lambda + 1) + \lambda \geq 0$ и $\lambda = 1$. Отсюда $k = 4$ и $\mu_* = 1$, что невозможно.

Наконец, если $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф $K_{u \times 2}$ и условия леммы нарушаются. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\gamma = 1$, $d \in [u] \cap [w] \cap [z]$. Тогда $[d]$ содержит $\mu_* - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$ и либо $\mu_* - 1$, либо μ_* вершин из $[u] \cap [z]$. В последнем случае $\lambda \geq 2\mu_* - 1$ и $k \leq 3b_1 - 2$. Если $k = 3b_1 - 1$, то d не смежна с единственной вершиной из $([u] \cap [z]) - [w]$ и $[d] - u^\perp \subset [w] \cap [z]$. Утверждение (2) доказано.

Лемма 6. Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v, k, λ, μ) . Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - t$ и $-t$ графа Γ — целые числа, где

$$n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu), \quad n - \lambda + \mu = 2t$$

и кратность $-t$ равна $k(t - 1)(k + t)/(\mu n)$.

Далее, если t — целое число, большее 1, то $t - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и

$$\mu = \lambda + 2 + (t - 1) - \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}, \quad n = t - 1 + \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}.$$

Лемма 6 есть лемма 3.1 в [3].

Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем в [1] (см. теорему 3.12.4). Любой зейделев граф — это либо полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли.

Лемма 7. Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий целочисленные собственные значения и $b_1 = k - \lambda - 1$. Тогда

- (1) если b_1 — простое число, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1 + 1)}$ или зейделевым графом;
- (2) если $b_1 = 2p$, p — простое число, то Γ либо является полным многодольным графом, либо имеет собственное значение -2 или -3 , либо является дополнительным к зейделеву графу;
- (3) если $b_1 = 4$, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$, 5×5 решеткой, треугольным графом $T(7)$ или дополнительным графом к 4×4 решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Клебша (заметим, что в половинном случае параметры графа равны $(17, 8, 3, 4)$ и он является графом Пэли).

Доказательство. Пусть $-t$ — наименьшее собственное значение графа. Если $t = 1$, то Γ состоит из изолированных клик. Но в этом случае $b_1 = 0$. Пусть t — целое число, большее 1. Тогда по лемме 6 $t - 1$ делит b_1 .

Если b_1 — простое число, то либо $t - 1 = 1$, либо $t - 1 = b_1$. Но в последнем случае Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1 + 1)}$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $b_1 = 2p$, p — простое число и Γ не является полным многодольным графом или зейделевым графом. Тогда либо $m - 1 = 2$, либо $m - 1 = p$. Но в последнем случае по лемме 3 $n - m = 1$ и Γ является дополнительным к зейделеву графу. Утверждение (2) доказано.

Наконец, если $b_1 = 4$, то ввиду утверждения (2) Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$, зейделевым графом или дополнительным к зейделеву графу. Среди зейделевых графов $b_1 = 4$ имеют только 5×5 решетка и треугольный граф $T(7)$. Аналогично, среди дополнительных к зейделевым графов $b_1 = 4$ имеют дополнительный граф к 4×4 решетке, треугольный граф $T(6)$ или граф Клебша. Утверждение (3) доказано.

Лемма 8. Если Γ — реберно регулярный граф с $k \geq 4b_1 - 1$, то Γ не содержит хороших пар.

Доказательство. Пусть $\mu(u, w) = \mu_*$, X_i — множество всех вершин из $([u] \cup [w]) - ([u] \cap [w])$, смежных точно с i вершинами из $[u] \cap [w]$, $x_i = |X_i|$. Подсчитав число ребер между $[u] \cap [w]$ и $([u] \cup [w]) - ([u] \cap [w])$, а также число треугольников с основанием в $[u] \cap [w]$ и вершиной в $([u] \cup [w]) - ([u] \cap [w])$, получим равенства

$$\sum x_i = 4b_1 - 2, \quad \sum i x_i = \mu_*(2b_1 - 2), \quad \sum \binom{i}{2} x_i = \binom{\mu_*}{2} (b_1 - 2).$$

Отсюда

$$0 \leq \sum x_i (i - \beta)^2 = \mu_*(\mu_* - 1)(b_1 - 2) - (2\beta - 1)\mu_*(2b_1 - 2) + (4b_1 - 2)\beta^2.$$

Поэтому

$$(4b_1 - 2)\beta^2 - 4\mu_*(b_1 - 1)\beta + (\mu_*^2 b_1 - 2) - \mu_* b_1 \geq 0,$$

дискриминант данного квадратного трехчлена неположителен, и

$$2b_1\mu_*^2 - 2b_1(2b_1 - 1)\mu_* \leq 0.$$

Таким образом, $\mu_* \leq 2b_1 - 1$ и $k \leq 4b_1 - 2$.

Лемма 9. Если Γ является реберно регулярным графом с $b_1 \leq 3$, $k \geq 3b_1 - 1$, то Γ — либо многоугольник или граф икосаэдра, либо полный многодольный граф $K_{r \times (b_1 + 1)}$, треугольный граф $T(n)$, $n = 5, 6$ или граф Клебша.

Доказательство. Если $b_1 = 1$, то Γ — многоугольник или полный многодольный граф $K_{r \times 2}$.

Если Γ — сильно регулярный граф, то лемма следует из леммы 7. Допустим, что Γ — не сильно регулярный граф.

Пусть $b_1 = 2$. Ввиду леммы 3

$$\lambda < 1/2 + k - \sqrt{2k + 2},$$

то есть $2k + 2 < (b_1 + 3/2)^2$ и $k \leq (b_1^2 + 3b_1)/2$. Следовательно, $k = 5$, $\lambda = 2$, и Γ является графом икосаэдра.

Пусть $b_1 = 3$. Снова ввиду леммы 3

$$k \leq (b_1^2 + 3b_1)/2.$$

Следовательно, $k = 8$, $\lambda = 4$, и по следствию из [2] диаметр Γ равен 2, а число вершин в Γ не больше 16. Так как $vk\lambda$ делится на 6, то $v = 15$. Для любой вершины u число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно 24.

Так как Γ — не сильно регулярный граф, то $\mu(u, w) = 3$ для некоторых несмежных вершин $u, w \in \Gamma$. В этом случае число треугольников с основанием в $[u] \cap [w]$ и вершиной в $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ равно 3. Заметим, что вершина из $[u] - [w]$ не может быть смежна с тремя вершинами из $[u] \cap [w]$, так как в противном случае каждая вершина из $[w] - [u]$ смежна с единственной вершиной из $[u] \cap [w]$ и $||[w] - [u]|| \geq 6$, что невозможно. Поэтому можно считать, что $[w] - [u]$ содержит не менее двух вершин z_i , смежных с ребрами из $[u] \cap [w]$. Тогда $[u] - [x]$ содержит единственную вершину, смежную с ребром из $[u] \cap [w]$, и 4 вершины, каждая из которых смежна с единственной вершиной из $[u] \cap [w]$. Ввиду леммы 5 $\mu(u, z_i) \geq 5$, поэтому $[w] - [u]$ содержит еще одну вершину x с $\mu(u, x) = 3$. Отсюда

$$[u] - ([w] \cup [x]) = \{y_1, y_2\}.$$

Как и выше, $[u] - [x]$ содержит единственную вершину, смежную с ребром из $[u] \cap [w]$, поэтому вершины y_1 и y_2 смежны. Далее, каждая вершина d из $[u] \cap [w]$ смежна с единственной вершиной из $[u] \cap [x]$ и из $\{y_1, y_2\}$. Поэтому $[y]$ и $[z]$ содержат непересекающиеся тройки вершин из $[u] \cap ([w] \cup [x])$. Следовательно, $[y] \cap [z]$ содержит 3 вершины из $[x] \cap [w]$, каждая из которых смежна с единственной вершиной из $[u] \cap [w]$. Получено противоречие с тем, что $[x] \cap [w]$ состоит из 4 вершин, две из которых смежны с ребрами из $[u] \cap [w]$.

Лемма доказана.

3. Реберно регулярные графы с $b_1 = 4$

Пусть Γ — граф, являющийся контрпримером к предложению 1, $\bar{\Gamma}$ — граф, дополнительный к Γ . Из того, что число ребер в Γ (в $\Gamma(a)$) равно $vk/2$ (равно $k\lambda/2$), следует, что числа vk и $k\lambda$ четны. Аналогично, число треугольников в Γ равно $vk\lambda/6$, поэтому $vk\lambda$ делится на 6.

Лемма 10. *Граф Γ имеет диаметр 2, но не является сильно регулярным, $6 \leq v - k - 1 \leq k - 1$ и $k \leq 11$.*

Доказательство. Если $k \geq 10$, то по следствию из [2] диаметр Γ равен 2 и $v \leq 2k$. Если граф Γ сильно регулярен, то ввиду леммы 7 он является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$, 5×5 решеткой, треугольным графом $T(7)$, графом Пэли с параметрами $(17, 8, 3, 4)$ или дополнительным графом к 4×4 решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Клебша. Среди этих графов только полный многодольный граф имеет степень $k \geq 11$. Получено противоречие с выбором Γ .

Итак, граф Γ не сильно регулярен и $v - k - 1 = 4 + \bar{\mu}$, где $2 \leq \bar{\mu} \leq 6$. Поэтому $6 \leq v - k - 1 \leq k - 1$. Ввиду леммы 3

$$k \leq (b_1^2 + 3b_1)/2, \quad k \leq 12.$$

Пусть $k = 12 + y$, $\lambda = 7 + y$ и $\mu_* = 5 + y$. Число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $48 + 4y$, а степень вершины в μ -подграфе не меньше $4 + y$.

Если некоторая вершина d из $[u]$ смежна по крайней мере с 2 вершинами w_i , образующими хорошие пары с u , то ввиду леммы 4 $\lambda(u, d)$ не меньше $8 + 2y$, что невозможно.

Следовательно, $v - k - 1 \leq 8$, причем в случае равенства $y = 0$ и либо Γ сильно регулярен с параметрами (21, 12, 7, 6), либо $\mu(u, w) = 5$ для единственной вершины w из $\Gamma_2(u)$. В последнем случае число треугольников с основанием в $[u] \cap [w]$ и вершиной в $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ равно 20. С другой стороны, $\mu(u, x) = 7$ для одной вершины из $\Gamma_2(u)$ и $\mu(u, y) = 6$ для $y \in \Gamma_2(u) - \{x, w\}$, поэтому указанное число треугольников равно 18, что невозможно.

Пусть $v - k - 1 = 7$. Если $y = 2$, то Γ — сильно регулярный граф с параметрами (22, 14, 9, 8) и собственным значением -2 . Это противоречит тому, что не существует зейделевых графов с этими параметрами. Если $y = 1$, то $\Gamma_2(u)$ содержит не менее 4 вершин w_i с $\mu(u, w_i) = 7$. Получаем противоречие с тем, что тогда $[u] \cap [w_i]$ является регулярным графом степени 5. Если же $y = 0$, то $\mu(u, w) = 6$ для некоторой вершины w из $\Gamma_2(u)$ и граф $[u] \cap [w]$ является октаэдром. Если $\mu(u, z) = 6$ для другой вершины z из $\Gamma_2(u)$, $\{r, s\} = [u] \cap [w] \cap [z]$, то $[r]$ содержит не более 3 вершин из $([u] \cap [z]) - [w]$. Поэтому r, s смежны и $[r] \cap [s]$ содержит u, w, z и по 2 вершины из $([u] \cap [w]) - [z]$ и из $([u] \cap [z]) - [w]$. Положим $\{p, q\} = [u] - ([w] \cup [z])$. Если вершины p, q смежны, то $[p] \cap [q]$ содержит u , по крайней мере 4 вершины из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и не менее 3 вершин из $\Gamma_2(u)$, что невозможно. Значит, p, q не смежны и $[p] \cap [q]$ содержит u , по крайней мере 6 вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и не менее 3 вершин из $\Gamma_2(u)$, поэтому $\mu(p, q) \geq 10$. В этом случае $\mu(p, x_i) = 6$ для по крайней мере 4 вершин x_i из $\Gamma_2(p)$. Это противоречит тому, что $[q] - [p]$ содержит не более двух вершин.

Итак, $v - k - 1 = 6$ и Γ имеет параметры $(19 + y, 12 + y, 7 + y)$. Если $y = 2$, то $\Gamma_2(u)$ содержит не менее 4 вершин w_i с $\mu(u, w_i) = 9$, причем $u^\perp \cup w^\perp = \Gamma$ и $[u] \cap [w]$ — регулярный граф степени 7. Если $y = 1$, то $vk\lambda$ не делится на 6. Значит, $y = 0$. Тогда либо Γ сильно регулярен с параметрами (19, 12, 7, 8), либо $\Gamma_2(u)$ содержит вершину w с $\mu(u, w) = 7$, причем $u^\perp \cup w^\perp = \Gamma$ и $[u] \cap [w]$ — регулярный граф степени 4. Но первый случай невозможен. Если $\Gamma_2(u)$ содержит еще одну вершину z с $\mu(u, z) = 7$, x — единственная вершина из $[u] - ([w] \cup [z])$, то окрестность вершины из $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит либо x и по 2 вершины из $([u] \cap [w]) - [z]$, $([u] \cap [z]) - [w]$ и из $[u] \cap [w] \cap [z]$, либо по 3 вершины из $([u] \cap [w]) - [z]$, $([u] \cap [z]) - [w]$ и единственную вершину из $[u] \cap [w] \cap [z]$.

Если $\mu(u, p) = 10$ для некоторой вершины p из $\Gamma_2(u)$, то вершины

$$\{q_1, q_2, q_3\} = \Gamma_2(u) - \{w, z, p\}$$

образуют треугольник и $\mu(u, q_i) = 8$. Следовательно, $[q_i]$ содержит 2 вершины из $[u] - [p]$ и 6 из $[u] \cap [p]$. Положим $\Delta = ([u] \cap [p]) - \{x\}$. Тогда $[q_1] \cap [q_2]$ содержит единственную вершину из Δ . Получаем противоречие с тем, что $[q_3] \cap \Delta$ содержит не менее 2 вершин из $[q_1]$ или из $[q_2]$. Таким образом,

$$\Gamma_2(u) - \{w, z, p\} = \{p_1, p_2, q_1, q_2\},$$

где $\mu(u, p_i) = 9$, $\mu(u, q_j) = 8$. При этом можно считать, что индуцированный подграф $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ является геодезическим путем p_1, q_1, q_2, p_2 .

Если $[x]$ содержит все 3 вершины из $[u] \cap [w] \cap [z]$ и по 2 из $([u] \cap [w]) - [z]$, $([u] \cap [z]) - [w]$, то $\mu(x, w) = \mu(x, z) = 9$. Это противоречит тому, что вершины w, z смежны. Значит, $[x]$ содержит единственную вершину из $[u] \cap [w] \cap [z]$ и по 3 вершины из $([u] \cap [w]) - [z]$, $([u] \cap [z]) - [w]$. Теперь вершина $p \in \Gamma_2(x)$ с $\mu(x, p) = 7$ принадлежит $[w] \cap [z]$, причем $p^\perp$ содержит $\Gamma_2(x)$. Получаем противоречие с тем, что $([u] \cap [w] \cap [z]) - [x]$ является 2-кликкой.

Значит, $\Gamma_2(u)$ содержит по одной вершине w, z с $\mu(u, w) = 7$, с $\mu(u, z) = 9$ и с $\mu(u, p) = 8$ для $p \in \Gamma_2(u) - \{w, z\}$. Следовательно, компоненты связности в $\bar{\Gamma}(u)$ состоят из вершины, ребра и 2-пути. Таким образом, число треугольников Δ в $\bar{\Gamma}$ таких, что $\bar{\Gamma} - \Delta$ не содержит вершин, смежных с ребром из Δ , равно $19/2$, что невозможно.

Лемма доказана.

В нижеследующих леммах 11–16 предполагается, что $k = 11$, $\lambda = 6$, поэтому v принимает значения 18, 20 или 22. Для вершины u графа Γ число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно 44. Далее, степень вершины в любом μ -подграфе не меньше 3.

Лемма 11. Если $\mu(u, w) = 4$, то выполняются следующие утверждения:

- (1) $v = 20$ или 22 и $[x]$ содержится в $u^\perp \cup w^\perp$ для $x \in [u] \cap [w]$;
- (2) число ребер между $[u] \cap [w]$ и $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ равно 24;
- (3) число треугольников с основанием в $[u] \cap [w]$ и вершиной в $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ равно 12;
- (4) если $v = 22$, то вершины p, q из $\Lambda_{u,w}$ смежны и $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ содержится в $[p] \cap [q]$;
- (5) если $x \in [w] - [u]$, то $[x]$ не содержит $[u] \cap [w]$.

Доказательство. Пусть $\mu(u, w) = 4$, $x \in [u] \cap [w]$. Тогда $|u^\perp \cup w^\perp| = 20$ и $[x]$ содержит 3 вершины из $[u] \cap [w]$ и по 4 вершины из $u^\perp - [w]$ и из $w^\perp - [u]$. Ввиду леммы 5 $v \neq 21$. Далее, число ребер между $[u] \cap [w]$ и $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ равно 24. Утверждения (1) и (2) доказаны.

Число ребер в $[u] \cap [w]$ равно 6 и каждое такое ребро смежно с u, w , с двумя вершинами из $[u] \cap [w]$ и с двумя из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$. Поэтому число треугольников с основанием в $[u] \cap [w]$ и вершиной в $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ равно 12. Утверждение (3) доказано.

Если $v = 22$, то $|\Lambda_{u,w}| = 2$. Допустим, что вершины p, q из $\Lambda_{u,w}$ не смежны. Тогда каждая из них смежна с 11 вершинами из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ и $\mu(p, q) \geq 8$. Далее, $\mu(p, u) + \mu(p, w) = 11$ и число ребер между $[p]$ и $\Gamma_2(p)$ не меньше 47, что невозможно.

Значит, вершины p, q из $\Lambda_{u,w}$ смежны и $[p] \cap [q]$ содержит не менее 6 вершин из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$. Так как $\lambda = 6$, то $[p] \cap [q]$ содержит точно 6 вершин из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$. Утверждение (4) доказано.

Предположим, что $x \in [w] - [u]$ и $[x]$ содержит $[u] \cap [w]$. Заметим, что число треугольников с основанием в $[u] \cap [w]$ и вершиной в $[u] - [w]$ не меньше 5, поэтому $[w] - [u]$ содержит не более одной вершины, смежной с 2 вершинами из $[u] \cap [w]$, и число ребер между $[u] \cap [w]$ и $[w] - [u]$ не больше 11, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 12. Если $\mu(u, w) = 4$, то $v = 20$.

Доказательство. Пусть $\mu(u, w) = 4$. Если $x \in [w] - [u]$ и $\mu(u, x) = 4$, то по лемме 6 x смежна не более чем с одной вершиной из $[u] \cap [w]$.

Пусть $v = 22$, $\{p, q\} = \Lambda_{u,w}$. Тогда по лемме 11 x смежна с единственной вершиной из $\{p, q\}$.

Допустим, что $\mu(u, p) = 4$. Тогда $\mu(w, p) = 6$ и $\mu(y_i, w) = 4$ для по крайней мере 7 вершин из $\Gamma_2(w)$. Положим $\beta = \mu(w, q)$. Подграф $[u] \cap [p] \cap [q]$ содержит точно $\beta - 3$ вершины и $|\{y_i\}| \geq 2 + \beta$. Если $q \in \{y_i\}$, то не менее 5 вершин из $\{y_i\}$ принадлежат

$[u] - [w]$ и не менее двух из них попадают в $[u] \cap [p]$. Значит, $\mu(u, q) \leq 5$ и $\mu(w, q) \geq 5$, что невозможно. Итак, по крайней мере $\beta + 2$ вершины из $\{y_i\}$ принадлежат $[u] - [w]$ и не менее $\beta - 1$ из них попадают в $[u] \cap [p]$. Значит, $\mu(u, q) \leq 8 - \beta$, что невозможно.

Таким образом, $\mu(a, b) = 5$ для любых $a \in \{u, w\}$, $b \in \{p, q\}$. В этом случае $|\{y_i\}| \leq 5$ и число ребер между $[w]$ и $\Gamma_2(w)$ не меньше 45, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть $v = 20$, $\mu(u, w) = 6$. Тогда для $\{p, q\} = \Delta_{u, w}$ выполняются следующие утверждения:

- (1) $[p] \cap [q]$ не пересекает $[u] \cap [w]$;
- (2) $[u] \cap [w] \cap [q]$ — треугольник, причем для любой вершины $x \in [u] \cap [w] \cap [q]$ подграф $[x] \cap ([w] - [u])$ содержится в $[q]$;
- (3) подграф $[u] \cap [w]$ является октаэдром.

Доказательство. Пусть $v = 20$, $\mu(u, w) = 6$. Если r, s — различные вершины из $[u] \cap [w] \cap [p] \cap [q]$, то r, s смежны и $[r] \cap [s]$ содержит u, w, p, q и 4 вершины из $[u] \cap [w]$, что невозможно.

Пусть $\{r\} = [u] \cap [w] \cap [p] \cap [q]$. Тогда $[r]$ содержит $u, w, p, q, 5$ вершин из $[u] \cap [w]$ и по одной из $[u] - [w]$ и из $[w] - [u]$. Следовательно, $[p] \cap [r]$ содержит не более 3 вершин из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u]) \cup \{q\}$ и не менее 3 вершин из $[u] \cap [w]$. Получаем противоречие с тем, что тогда $[p] \cap [q] \cap [r]$ содержит вершину из $[u] \cap [w]$. Утверждение (1) доказано.

Подграф $[p] \cup [q]$ пересекает $[u] \cap [w]$, в противном случае вершины p, q смежны и $|[p] \cap [q]| = 10$, что невозможно. Пусть $x \in [u] \cap [w] \cap [q]$. Тогда $[x]$ содержит $u, w, q, 4$ вершины из $[u] \cap [w]$ и по две из $[u] - [w]$ и из $[w] - [u]$. Если $[x] \cap [q]$ содержит не менее 3 вершин из $[u] \cap [w]$, то $[p]$ не пересекает $[u] \cap [w]$. В этом случае $[p] = ([u] - [w]) \cup ([w] - [u]) \cup \{q\}$ и $|[q] \cap [u] \cap [w]| = 4$. Следовательно, $\Gamma_2(p) - \{u, w\} \cup ([u] \cap [w])$, причем $\mu(u, p) = \mu(w, p) = 5$. Далее, $\mu(a, p) = 5$ для $a \in [u] \cap [w] \cap [q]$, так как $[a] - [u]$ содержит w, q и еще 2 вершины из $[p] - [u]$; симметрично, $[a] - [w]$ содержит u, q и еще 2 вершины из $[p] - [w]$. Аналогично, $\mu(d, p) = 6$ для $d \in ([u] \cap [w]) - [q]$, и число ребер между $[p]$ и $\Gamma_2(p)$ равно 42, что невозможно.

Таким образом, $[x] \cap [q]$ содержит точно 2 вершины из $[u] \cap [w]$ и все 4 смежные с x вершины из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$. Утверждение (2) доказано.

Число вершин из $[u] \cap [w]$, не смежных с p и q , четно, поэтому $[u] \cap [w]$ состоит из двух треугольников, смежных с p и q соответственно. Поэтому $[u] \cap [w]$ — октаэдр.

Лемма доказана.

Лемма 14. Для любых несмежных вершин u, w параметр $\mu(u, w)$ не равен 4, поэтому, в частности, $v \leq 20$.

Доказательство. Пусть $\mu(u, w) = 4$. По лемме 12 $v = 20$. Далее, найдется такая вершина d , что $\mu(u, d) = 6$. Положим $\{p, q\} = \Delta_{u, d}$, $\{r, s\} = [u] \cap [w] \cap [d]$. Тогда $[u] \cap [w]$ содержит по ребру из $[u] - [d]$ и из $[u] \cap [d]$. Если r и s смежны с p , то по лемме 13 $[p]$ содержит $[u] \cap [w]$, это противоречит лемме 12. Без ограничения общности, $r \in [p]$ и $s \in [q]$. Снова по лемме 13 $([u] \cap [w]) - [d]$ содержится в $[p] \cap [q]$. Получаем противоречие с тем, что $[r] \cap [s]$ содержит u, w, d и по 2 вершины из $([u] \cap [w]) - [d]$ и из $[u] \cap [d]$. Итак, $\mu(u, w) \neq 4$ для любых несмежных вершин u, w .

Если $v \geq 21$, то $|\Gamma_2(u)| \geq 9$. Число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно 44, поэтому $\mu(u, w) = 4$ для некоторой вершины $w \in \Gamma_2(u)$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 15. Для любых несмежных вершин u, w параметр $\mu(u, w)$ не равен 5, поэтому $v = 18$.

Доказательство. Пусть $\mu(u, w) = 5$. Тогда $v = 20$ и $\{p\} = \Lambda_{u,w}$. Далее, число вершин из $[u] \cap [w]$, не смежных с p , четно.

Ввиду леммы 14 подграф $[p]$ не содержит $[u] \cap [w]$ (в противном случае $\mu(p, q) = 4$ для некоторой вершины $q \in \Gamma_2(p)$). Если $[p]$ содержит единственную вершину из $[u] \cap [w]$, то $\mu(p, u) = \mu(p, w) = 6$. Получаем противоречие с тем, что по лемме 12 $|[p] \cap [u] \cap [w]| = 3$. Значит, $[p]$ содержит 3 вершины из $[u] \cap [w]$ и $\mu(p, u) = \mu(p, w) = 7$. Следовательно, $\mu(p, x) = 5$ для любой вершины $x \in \Gamma_2(p) - \{u, w\}$. Это противоречит тому, что для $y \in \Gamma_2(p) \cap [u] \cap [w]$ справедливо $\mu(p, y) = 5$, но $\mu(p, z) \neq 7$ для $z \in \Lambda_{p,y}$.

Теперь $v \leq 19$ (в противном случае по первому утверждению леммы 6 ($v - 12$) больше 44). Из четности vk следует, что $v = 18$.

Лемма доказана.

Лемма 16. Выполняются следующие утверждения:

- (1) $\mu(u, w) < 9$ для любых несмежных вершин u, w ;
- (2) $\mu(u, w) = 6$ для некоторых несмежных вершин u, w ;
- (3) если $\mu(u, w) = 7$, $\{z\} = \Lambda_{u,w}$ и $\mu(u, z) = \mu(z, w) = 7$, то подграф $([w] \cap [z]) - [u]$ является 3-путем $pqrs$, где $\mu(u, p) = \mu(u, s) = 8$, $\mu(u, q) = \mu(u, r) = 7$.

Доказательство. Если $\mu(u, w) = 10$, то $\Gamma_2(u)$ содержит единственную вершину x с $\mu(u, x) = 6$ и 4-клику $\{y_1, \dots, y_4\}$ с $\mu(u, y_i) = 7$. В этом случае $\Lambda_{u,y_i} = \{w\}$ и по лемме 1 $\mu(y_i, w) = 10$, что невозможно.

Если $\mu(u, w) = 9$, то $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины x, y , смежные с w , и 3 вершины $\{z_1, \dots, z_3\}$ не смежные с w . Допустим, что $\mu(u, z_1) = 7$. Тогда $\{w\} = \Lambda_{u,z_1}$ и по лемме 1 $\mu(z_1, w) = 9$. Следовательно, $\mu(w, z_2) = \mu(w, z_3) = 7$ и симметрично, $\mu(u, z_2) = \mu(u, z_3) = 9$, что невозможно. Значит, $\mu(u, z_i) \geq 8$ и число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше 45, что невозможно. Утверждение (1) доказано.

Если $\mu(u, w) > 6$ для любых несмежных вершин u, w , то для любой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины x_1, x_2 с $\mu(u, x_i) = 8$ и 4 вершины $y_1, \dots, y_4$ с $\mu(u, y_i) = 7$. Число ребер в Γ равно 99, причем число ребер $\{x, y\}$ с подграфом $\Lambda_{x,y}$, являющимся 2-кокликой, равно $2v/2 = 18$. Поэтому число четырехугольников в графе Γ равно $(99 - 18)/2$, что невозможно. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\mu(u, w) = 7$, $\{z\} = \Lambda_{u,w}$ и $\mu(u, z) = \mu(z, w) = 7$. Тогда $[z]$ содержит по 4 вершины из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ и 3 из $[u] \cap [w]$. Далее, окрестность любой вершины d из $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит u, w, z и по 2 вершины из $([u] \cap [z]) - [w]$, $([u] \cap [w]) - [z]$, $([w] \cap [z]) - [u]$. Следовательно, $[u] \cap [w] \cap [z]$ является 3-кликой, а каждая вершина из $([w] \cap [z]) - [u]$ смежна точно с 3 вершинами из $([u] \cap [z]) - [w]$. Имеется 6 треугольников с основанием в $[u] \cap [w] \cap [z]$ и вершиной вне $\{u, w, z\} \cup [u] \cap [w] \cap [z]$. Если $\mu(u, x) = 6$ для некоторой вершины x из $([w] \cap [z]) - [u]$, то $[x] \cap [u]$ — регулярный граф степени 3 и любая отличная от x вершина из $([w] \cap [z]) - [u]$ смежна точно с 2 вершинами из $[u] \cap [w] \cap [z]$. В этом случае в одном из подграфов $([u] \cap [z]) - [w]$, $([u] \cap [w]) - [z]$ содержится не более одной вершины, в окрестность которой попадает ребро из $[u] \cap [w] \cap [z]$, что невозможно.

Таким образом, подграф $([w] \cap [z]) - [u]$ является 3-путем $pqrs$, где

$$\mu(u, p) = \mu(u, s) = 8, \quad \mu(u, q) = \mu(u, r) = 7.$$

Лемма доказана.

Лемма 17. *Параметр k не равен 11.*

Доказательство. Пусть $k = 11$. По лемме 16 найдутся несмежные вершины u, w с $\mu(u, z) = 6$. Тогда $[z] - [u]$ содержит вершины d_1, d_2, d_3, w_1, w_2 с $\mu(u, d_j) = 8$ и $\mu(u, w_i) = 7$. Ввиду утверждения (3) леммы 16 вершины w_1, w_2 смежны. Поэтому можно считать, что вершины w_1, d_1 не смежны. Тогда $\{d_1\} = \Lambda_{u, w_1}$ и по лемме 1 $\mu(d_1, w_1) = 8$. В этом случае $[d_1] \cap [w_1]$ содержит 3 вершины из $[d_1] - [u]$ и 5 из $[d_1] \cap [u]$. Далее, можно считать, что вершины w_2, d_2 не смежны. Так как $[d_1] \cap [d_3]$ содержит z, w_2 и не менее 5 вершин из $[u]$, вершины d_1, d_2 не смежны с d_3 и $\{d_1, d_2\}$ — ребро.

Заметим, что каждая вершина из $[z] - [u]$ не смежна с единственной вершиной из $[u] - [z]$. Поэтому $[w_1] \cap [d_3]$ содержит z, w_2 , точно 3 вершины из $[u] - [z]$ и единственную вершину из $[u] \cap [z]$, в частности, $[w_1]$ содержит обе вершины из $([u] \cap [z]) - [d_3]$. Аналогично, $[w_2]$ содержит обе вершины из $([u] \cap [z]) - [d_3]$. Получаем противоречие с тем, что тогда $[w_1] \cap [w_2]$ содержит z, d_3 , 3 вершины из $[u] - [z]$ и две из $[u] \cap [z]$. Лемма 17 и предложение 1 доказаны.

4. Расположение хороших пар

Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , $b_1 = k - \lambda - 1$. Зафиксируем хорошую пару (u, w) . По лемме 8 $k \leq 4b_1 - 2$. В нижеследующих леммах 18–19 предполагается, что (u, z) — хорошая пара для некоторой вершины $z \in [w] - [u]$ и $\gamma = |[u] \cap [w] \cap [z]|$. По лемме 6 параметр γ меньше 2.

Лемма 18. *Если $\gamma = 0$, то выполняются утверждения*

- (1) $k \leq 3b_1 - 1$;
- (2) *если $\Gamma_2(u)$ не содержится в $w^\perp \cap z^\perp$, то $k \leq 3b_1 - 2$;*
- (3) *если $k = 3b_1 - 1$, то диаметр Γ равен 2, $\Gamma_2(u) = w^\perp \cap z^\perp$ (в частности, $v - k - 1 = 2b_1$ и $b_1(b_1 - 1)$ делится на 6) и либо Γ является пятиугольником, либо $b_1 \geq 6$.*

Доказательство. Пусть $\gamma = 0$. Тогда $[z]$ содержит $\lambda + 1$ вершин из $w^\perp - u^\perp$, поэтому $1 + \lambda + \mu_* \leq k$ и $k \leq 3b_1 - 1$. Утверждение (1) доказано.

Если $\Lambda_{u, w} - [z]$ содержит вершину x , то $[x]$ не пересекает $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и

$$\mu_* \leq \mu(u, x) \leq 4b_1 - 2 - k.$$

Поэтому $2k \leq 6b_1 - 3$. Утверждение (2) доказано.

Если $k = 3b_1 - 1$, то $k = \mu_* + 1 + \lambda$, причем $[z] - [u]$ содержит $\lambda + 1$ вершин из $w^\perp$. Поэтому

$$\Gamma_2(u) \subset w^\perp \cap z^\perp.$$

Если $b_1 = 1$, то Γ является n -угольником и из условий леммы следует, что $n = 5$. Если $b_1 = 2$, то Γ является локально 5-угольником. Получаем противоречие с тем, что тогда Γ является графом икосаэдра и пересечение окрестностей двух смежных вершин из $\Gamma_2(u)$ содержит вершину из $[u]$. Теперь ввиду следствия из [2] диаметр Γ равен 2, $\Gamma_2(u) = w^\perp \cap z^\perp$ и $v - k - 1 = 2b_1$. Число треугольников в Γ равно $vk\lambda/6$, поэтому $b_1(b_1 - 1)$ делится на 6.

Положим

$$\{x_1, \dots, x_{b_1-1}\} = [u] - ([w] \cap [z]).$$

Пусть $b_1 = 3$. Тогда $k = 8$, $\lambda = 4$, $\mu_* = 3$ и число ребер между $[u]$ и $[w] \cap [z]$ равно 18. Каждое ребро из $[u] \cap [w]$ смежно с единственной вершиной из $\Gamma - (\{u, w\} \cup [u] \cap [w])$. Если некоторая вершина y из $[w] \cap [z]$ не смежна с x_1, x_2 , то $[y]$ содержит $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и вершина x_1 смежна не более чем с одной вершиной из $[u] \cap [w]$ и из $[u] \cap [z]$. Получаем противоречие с тем, что тогда $\lambda(u, x_1) \leq 3$. Значит, $[w] \cap [z]$ содержит две вершины r_1, r_2 , смежные с x_1, x_2 , и вершины s_1, s_2 , где s_i смежна с единственной вершиной x_i из $\{x_1, x_2\}$. Далее, имеется точно два треугольника с основанием в $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и вершиной в $\{x_1, x_2\}$, поэтому вершины x_1, x_2 смежны. Получаем противоречие с тем, что тогда $[x_1] \cap [x_2]$ содержит u, r_1, r_2 и вершину из $[u] \cap ([w] \cup [z])$.

Пусть $b_1 = 4$. Тогда $k = 11$, что противоречит предложению 1. Теперь из делимости $b_1(b_1 - 1)$ на 3 следует, что $b_1 \geq 6$.

Лемма доказана.

Лемма 19. Если $\gamma = 1$, то выполняются утверждения:

- (1) $k \leq 3b_1 - 1$, $[z]$ содержит единственную вершину w^* из $\Lambda_{u,w}$ и $[w]$ содержит единственную вершину z^* из $\Lambda_{u,z}$;
- (2) если $\Gamma_2(u)$ не содержится в $w^\perp \cup z^\perp$, то $k \leq 3b_1 - 2$;
- (3) если $k = 3b_1 - 1$, то либо Γ является графом икосаэдра, либо диаметр Γ равен 2, $v - k - 1 = 2b_1 + 1$, b_1 нечетно, $b_1 - 1$ делится на 3 и $b_1 \geq 7$.

Доказательство. Пусть $\gamma = 1$, $\{d\} = [z] \cap [u] \cap [w]$. Тогда $[z]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u] - [w]$ и единственную вершину w^* из $\Lambda_{u,w}$. Симметрично, $[w]$ содержит единственную вершину z^* из $\Lambda_{u,z}$. Далее, $[d]$ содержит $2\mu_* - 2$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$, поэтому $2k - 4b_1 \leq k - b_1 - 1$ и утверждение (1) доказано.

Пусть $k = 3b_1 - \alpha$. Тогда

$$\mu_* = b_1 - \alpha + 1, \quad |[u] - ([w] \cup [z])| = b_1 + \alpha - 1.$$

Если $x \in \Lambda_{u,w} - \{w^*\}$, то $[x] \cap [u]$ не пересекает $[w] \cup [z]$ и $\mu_* \leq \mu(u, x) \leq b_1 + \alpha - 1$. В этом случае $\alpha \geq 1$, причем в случае равенства $[x] \cap [d]$ не пересекает $[u]$ и содержит не более $b_1 - 2$ вершин, что невозможно. Утверждение (2) доказано.

Пусть $k = 3b_1 - 1$. Тогда

$$\Gamma_2(u) \subset \{w, z, w^*, z^*\} \cup ([w] \cap [z]).$$

Если $b_1 = 1$, то Γ является n -угольником и условия леммы не выполняются. Если $b_1 = 2$, то Γ является графом икосаэдра. Если же $b_1 > 2$, то ввиду следствия из [2] диаметр Γ равен 2 и $v - k - 1 = 2b_1 + 1$. Из четности vk следует, что b_1 нечетно. Далее, $vk\lambda$ делится на 6, поэтому $b_1 \equiv 1 \pmod{3}$.

Если $b_1 = 4$, то $k = 11$, что противоречит предложению 1. Теперь из делимости $b_1 - 1$ на 3 следует, что $b_1 \geq 7$.

Лемма доказана.

Лемма 20. Если $\mu(u, z) = \mu_*$ для некоторой вершины $z \in \Lambda_{u,w}$, то выполняются следующие утверждения:

- (1) если $\Lambda_{u,w}$ не содержится в $z^\perp$, то $k \leq 3b_1 - 2$;
- (2) если $k = 3b_1 - 1$, то либо Γ является многоугольником или графом икосаэдра, либо диаметр Γ равен 2 и $|\Lambda_{u,w}| > 1$;
- (3) если $k \geq 3b_1$, то $k = 3b_1$, b_1 чётно и

$$\Gamma_2(u) = \{w, z\} \cup ([w] \cap [z]).$$

Доказательство. Пусть $x \in \Lambda_{u,w} - z^\perp$. Тогда $[x]$ не пересекает $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и $\mu_* \leq \mu(u, x) \leq k - 2\mu_*$. В этом случае $k \leq 3b_1 - 2$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $k = 3b_1 - 1$. Тогда $\mu_* = b_1$ и $[z] - [u]$ содержит $k - b_1$ вершин. Если $b_1 = 1$, то Γ является многоугольником. Если $b_1 = 2$, то Γ является графом икосаэдра. Если же $b_1 \geq 3$, то по следствию из [2] диаметр Γ равен 2. В этом случае $[w] \cap [z]$ содержит $k - b_1 - 1$ вершин и некоторая вершина из $[z] - [u]$ не попадает в $[w]$. Поэтому $|\Lambda_{u,w}| > 1$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $k = 3b_1 + \alpha$. Тогда $\mu_* = b_1 + \alpha + 1$, диаметр Γ равен 2 и $[w] \cap [z]$ содержит $2b_1 + \alpha - 1$ вершин. Следовательно, $k \geq 3b_1 + 2\alpha$, $\alpha = 0$ и $\Gamma_2(u)$ содержит w, z и $2b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [z]$.

Лемма доказана.

В нижеследующих леммах 21–25 предполагается, что $k \geq 3b_1 - 1$ и три различных вершины w, x, z из $\Gamma_2(u)$ образуют хорошие пары с u . Если диаметр Γ больше 2, то по следствию из [2] Γ является многоугольником или графом икосаэдра. В этом случае каждая пара вершин, находящихся на расстоянии 2, является хорошей. Поэтому можно считать, что диаметр Γ равен 2.

Лемма 21. Верны равенства

$$k = 3b_1 - 1, \quad v = 5b_1 + 1,$$

подграф $[u]$ содержит по одной вершине d и t , смежной с w, x и x, z соответственно, и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) подграф $\{w, x, z\}$ является кликой, и $[u]$ содержит две вершины p, q , каждая из которых не смежна ни с одной вершиной из $\{w, x, z\}$;
- (2) вершины w, z не смежны и попадают в $[x]$, подграф $[u]$ содержит единственную вершину o , не смежную ни с одной вершиной из $\{w, x, z\}$, и $[w] \cap [z]$ содержит единственную вершину x^* , не смежную с x .

Доказательство. Если μ -подграфы вершин w, x, z с u попарно не пересекаются, то $k = 3b_1$ и ввиду леммы 18 подграф $\{w, x, z\}$ является кокликкой. Получаем противоречие с леммой 20. Значит, можно предположить, что подграф $[u] \cap [w] \cap [x]$ содержит вершину d . Тогда вершины w, x смежны и по лемме 19

$$k = 3b_1 - 1, \quad v = 5b_1 + 1.$$

Если $[u] \cap [z]$ не пересекает $[w] \cup [x]$, то ввиду леммы 18 вершины w, x не смежны с z , что противоречит лемме 19. Итак, можно считать, что $x \in [w] \cap [z]$ и ввиду леммы 18 подграф $[u] \cap [w] \cap [x]$ содержит вершину t .

Если вершины w, z смежны, то $[w] \cap [z]$ содержит единственную вершину r из $[u]$. В этом случае $[u]$ содержит точно 2 вершины p, q , каждая из которых не смежна ни с одной вершиной из $\{w, x, z\}$. Утверждение (1) доказано.

Если же вершины w, z не смежны, то подграфы $[u] \cap [w]$, $[u] \cap [z]$ не пересекаются и $[u]$ содержит единственную вершину o , не смежную ни с одной вершиной из $\{w, x, z\}$. Далее, $[w] \cap [z]$ содержит единственную вершину x^* , не смежную с x .

Лемма доказана.

Лемма 22. *Выполняется случай (1) из заключения леммы 21.*

Доказательство. Пусть вершины w, z не смежны. Тогда подграф $[d] \cap [t]$ содержит u , $b_1 - 2$ вершин из $[u]$ и $b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [z]$. Далее, $[d] \cap [z]$ содержит единственную вершину t из $[u]$ и точно $b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [z]$, поэтому (d, z) — хорошая пара. Симметрично, (t, w) — хорошая пара, в частности, o не смежна с вершинами из $[d] \cap [w] \cap [z]$.

Так как (u, x) — хорошая пара, то $[x^*]$ не пересекает $[u] \cap [x]$, поэтому $[x^*] - w^\perp$ содержит z , o и $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [z]$. Таким образом, $[x^*]$ содержит w, z, o , по $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$, $[u] \cap [z]$ и b_1 вершин из $[w] \cap [z]$.

Пусть a — отличная от x вершина из $[d] \cap [w] \cap [z]$ и $[a]$ содержит $\beta + 2$ вершин из $[u] \cap [x]$. Тогда $[a]$ содержит по $b_1 - \beta$ вершин из $[u] \cap [w]$, $[u] \cap [z]$, поэтому $[a] - x^\perp$ содержит точно $2b_1 - 2\beta - 2$ вершин из $[u]$ и быть может вершину x^* . По лемме 19 b_1 нечетно, поэтому a смежна с x^* и $\beta = (b_1 - 1)/2$. Значит, $[x^*] - o^\perp$ содержит w, z и $b_1 - 2$ вершин из $[d] \cap [w] \cap [z]$. Поэтому $[o] - (x^*)^\perp$ содержит u , $b_1 - 3$ вершин из $[w] \cap [z]$ и 2 вершины из $[u]$. Итак, либо (o, x) — хорошая пара, либо $[o] \cap [u]$ содержит точно 2 вершины из $[x]$. Если (o, x) — хорошая пара, то для вершины c из $[u] \cap [x] \cap [o]$ подграф $[c] \cap [d]$ содержит u, x , $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [x]$ и $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$. Но в этом случае $[u] \cap [c]$ содержит $3b_1 - 5$ вершин и $b_1 = 3$, что невозможно. Пусть $\{p, q\} = [u] \cap [x] \cap [o]$. Тогда $[p]$ содержит по крайней мере $b_1 - 2$ вершин из $[o] \cap [w] \cap [z]$. Поэтому подграф $[p] \cap [d]$ содержит u , $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [x]$, не более 2 вершин из $[w] \cap [z]$ и не менее $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [w]$. Но в этом случае $[p] \cap [q]$ содержит u, x и не менее $3b_1 - 7$ вершин из $[u]$. Получаем противоречие с тем, что тогда $3b_1 - 5 \leq 2b_1 - 2$ и $b_1 \leq 3$.

Лемма доказана.

По лемме 22 подграф $\{w, x, z\}$ является кликой. Для $y \in \{w, x, z\}$ через y^* обозначим единственную вершину из $\Gamma_2(u)$, не смежную с y . Положим

$$\Delta = \Gamma_2(u) - \{w, w^*, x, x^*, z, z^*\}.$$

Лемма 23. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) $b_1 = 7, k = 20, \lambda = 12, v = 36$, подграф $\{w^*, x^*, z^*\}$ является кликой и содержится в $[p] \cap [q]$, p смежна с 4 вершинами из Δ ;
- (2) $[d]$ содержит w, x и 5 вершин из Δ , $[t] \cap [d]$ содержит 4 вершины из Δ и число ребер между $[u] \cap [x]$ и Δ равно 32;

- (3) $[w^*]$ содержит по 4 вершины из $[u] \cap [x]$, $[u] \cap [z]$ и 6 вершин из Δ , $[w^*] \cap [z^*]$ содержит либо 3 вершины из $[u] \cap [x]$ и 5 вершин из Δ , либо по 4 вершины из $[u] \cap [x]$, Δ .

Доказательство. Допустим, что вершина z^* не смежна с p . Тогда $[z^*] - w^\perp$ содержит w^* , q и $b_1 - 2$ вершин из $([u] \cap [x]) - \{d, r\}$. Симметрично, $[z^*] - x^\perp$ содержит x^* , q и $b_1 - 2$ вершин из $([u] \cap [w]) - \{d, r\}$. Если же z^* смежна с p, q , то $[z^*]$ содержит не менее $2b_1 - 3$ вершин в каждом из подграфов $[u] - [w]$, $[u] - [x]$. В любом случае $\mu(u, z^*) \geq 2b_1 - 4$. С другой стороны, $\mu(z, z^*) \leq b_1 + 3$, а по утверждению (4) леммы 1 $\mu(u, z^*) = \mu(z, z^*)$. Так как по лемме 19 $b_1 \geq 7$, то $b_1 = 7$, вышеуказанные нестрогие неравенства превращаются в равенства, z^* не смежна с d и выполняется утверждение (1).

Теперь подграф $[d] - x^\perp$ содержит u и $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$, поэтому $[d] - u^\perp$ содержит w, x и $b_1 - 2 = 5$ вершин из Δ . Далее, $[d] \cap [t]$ содержит $u, r, x, b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [x]$ и $b_1 - 3 = 4$ вершин из Δ .

Подграф $[w^*]$ содержит по 4 вершины из $[u] \cap [x]$, $[u] \cap [z]$ и 6 вершин из Δ . Если $[w^*] \cap [z^*]$ содержит 6 вершин из $[u]$, то одна вершина из $[u] \cap [x] - \{t, d\}$ смежна с 6 вершинами из Δ , а каждая из четырех оставшихся с 4. Если же $[w^*] \cap [z^*]$ содержит 5 вершин из $[u]$, то две вершины из $[u] \cap [x] - \{t, d\}$ смежны с 5 вершинами из Δ , а каждая из трех оставшихся с 3. В любом случае число ребер между $[u] \cap [x] - \{t, d\}$ и Δ равно 22.

Лемма доказана.

Лемма 24. Подграф Δ содержит три вершины, смежные с d, t, r и по одной вершине, смежной с парами вершин из $\{d, t, r\}$.

Доказательство. Подграф Δ содержит либо три вершины, смежные с d, t, r и по одной вершине, смежной с парами вершин из $\{d, t, r\}$, либо четыре вершины, смежные с d, t, r и по одной вершине, смежной с единственной вершиной из $\{d, t, r\}$.

Допустим, что выполняется последняя возможность. Тогда

$$\Delta = \Delta_0 \cup \{f, g, h\} \cup \{o_1, o_2\},$$

где $\Delta_0 \subset [d] \cap [t] \cap [r]$, а вершины f, g, h смежны с d, t, r соответственно.

Подграф $[d] \cap [z]$ содержит x, w, t, r и пять вершин из Δ , причем $\Delta_{d,z} = \{p, q, z^*\}$. Так как вершина f не смежна с t, r , то степень f в графе $[d] \cap [z]$ равна 6, $[f]$ содержит Δ_0 и не пересекает $\{p, q, z^*\}$. Симметрично, $[g]$ содержит Δ_0 и не пересекает $\{p, q, w^*\}$, $[h]$ содержит Δ_0 и не пересекает $\{p, q, x^*\}$. Таким образом,

$$\{w, x, z, d, t, r, f, g, h\} \subset \Lambda_{p,q},$$

поэтому вершины p, q не смежны и $\mu(p, q) \geq 15$.

Заметим, что для любой вершины y из Δ_0 подграф $[y] - ([p] \cup [q])$ содержит $w, x, z, d, t, r, f, g, h$, поэтому p, q не смежны с y . Получаем противоречие с тем, что $|[p] \cap \Delta| = 4$.

Лемма доказана.

Ввиду леммы 24 можно считать, что $\Delta = \Delta_0 \cup \{f, g, h\} \cup \{o_1, o_2, o_3\}$, где $\Delta_0 \subset [d] \cap [t] \cap [r]$, а вершины f, g и h смежны с парами d, t, d, r и t, r соответственно.

Лемма 25. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $[p] \cap [q]$ не пересекает $\Delta_0 \cup \{f, g, h\}$;

(2) $\Delta_0 \subset \Lambda_{p,q}$.

Доказательство. Заметим, что

$$[d] \cap [z] = \{x, w, t, r, f, g\} \cup \Delta_0, \quad \Lambda_{d,z} = \{z^*, p, q\}.$$

Если $f \in [p] \cap [q]$, то степень f в графе $[d] \cap [z]$ равна 8, что противоречит тому, что f не смежна с r . Значит, f смежна не более чем с одной вершиной из $\{z^*, p, q\}$.

Пусть вершина y из Δ_0 смежна с p, q . Тогда $[d] \cap [z] \subset y^\perp$ и вершины y, z^* не смежны. Симметрично, x^*, w^* не смежны с y , а $[y]$ содержит f, g, h . Так как каждая из вершин f, g, h смежна не более чем с одной вершиной из $\{p, q\}$, можно считать, что f, g не смежны с p . Получаем противоречие с тем, что $[y] - p^\perp$ содержит 8 вершин w, x, z, d, t, r, f, g . Утверждение (1) доказано.

Пусть вершина y из Δ_0 смежна с p . Тогда y не смежна с q и $[y] - [p]$ содержит не более одной вершины из Δ . Допустим, что вершины y, z^* смежны. Тогда

$$y^\perp \cap \Delta = \{f, g\} \cup \Delta_0$$

и y не смежна с h . Рассмотрев подграфы

$$[t] \cap [w] = \{x, z, d, r, f, h\} \cup \Delta_0, \quad \Lambda_{t,w} = \{w^*, p, q\},$$

убедимся, что w^*, p, q не смежны с h , y не смежна с w^* . Аналогично, y, h не смежны с x^* , поэтому $[w^*] \cap [x^*]$ содержит 5 вершин из Δ . Таким образом, $f, g \in [w^*] \cup [x^*]$. Пусть, для определенности, f смежна с w^* . Тогда f не смежна с p . Симметрично, g не смежна с p , что невозможно.

Значит, w^*, x^*, z^* не смежны с y . Тогда $[x] \cap [y]$ содержит w, z, d, t , не более 4 вершин из Δ и не менее 4 из $([u] \cap [x]) - \{d, t\}$. Получаем противоречие с тем, что тогда $[y]$ содержит w, x, z , не менее 16 вершин из $[u]$ и не менее трех из Δ .

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполнены условия теоремы. Если $k \geq 4b_1 - 1$, то по лемме 8 Γ не содержит хороших пар. Если $k \geq 3b_1 + 1$, то из лемм 18–20 следует, что $\Gamma_2(u)$ содержит не более одной вершины, образующей хорошую пару с u . Допустим, что пары (u, w) , (u, x) , (u, z) являются хорошими для трех различных вершин $w, x, z \in \Gamma_2(u)$ и $k \geq 3b_1 - 1$. Тогда $\mu_* \geq b_1$. Из лемм 21–23 следует, что подграф $\{w, x, z\}$ является кликой и $b_1 = 7, k = 20, v = 36$. Ввиду леммы 24 можно считать, что

$$\Delta = \Delta_0 \cup \{f, g, h\} \cup \{o_1, o_2, o_3\},$$

где $\Delta_0 \subset [d] \cap [t] \cap [r]$, а вершины f, g и h смежны с парами d, t, d, r и t, r соответственно. По лемме 25 $\Delta_0 \subset \Lambda_{p,q}$. Так как $|[p] \cap \Delta| = 4$, можно считать, что f смежна с p . Рассмотрев подграфы

$$[t] \cap [w] = \{x, z, d, r, f, h\} \cup \Delta_0, \quad \Lambda_{t,w} = \{w^*, p, q\},$$

убедимся, что $\Delta_0 \subset [f]$. Получаем противоречие с тем, что тогда $[f] - p^\perp$ содержит x, w, z, d, t и три вершины из Δ_0 .

Теорема доказана.

5. Доказательство следствий

Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $k = 3b_1 - 1 + \delta$, $\delta \geq 0$. Если $b_1 \leq 3$, то по лемме 9 Γ — либо многоугольник или граф икосаэдра, либо Γ — полный многодольный граф $K_{r \times (b_1+1)}$, треугольный граф $T(n)$, $n = 5, 6$ или граф Клебша. Если $b_1 = 4$, то $k \geq 11$, и по нашему предположению Γ — полный многодольный граф $K_{r \times 5}$. В любом из этих случаев заключение следствия 1 выполняется, поэтому можно считать, что $b_1 \geq 5$.

Лемма 26. *Если Γ не содержит хороших пар, то*

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2),$$

причем в случае равенства Γ — полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, треугольный граф $T(n)$, $n = 5, 6$, граф Клебша или граф Шлефли.

Доказательство. Пусть для некоторой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ не содержит вершин, образующих хорошие пары с u . Тогда

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2).$$

Если $kb_1 = (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2)$ и Γ не содержит хороших пар, то Γ — сильно регулярный граф с параметрами

$$k = 3b_1 - 1 + \delta, \quad \lambda = 2b_1 - 2 + \delta, \quad \mu = b_1 + 1 + \delta.$$

Так как Γ не является графом в половинном случае, то

$$(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = (b_1 - 3)^2 + 4(2b_1 - 2) = (b_1 + 1)^2$$

и неглавные собственные значения Γ равны $b_1 - 1, -2$.

Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем (теорема 3.12.4 в [1]). Любой зейделев граф — это либо полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли. Пусть Γ имеет параметры решетчатого или треугольного графа. Из условия $k \geq 3b_1 - 1$ следует, что Γ — треугольный граф $T(n)$, $n = 4, 5$ или 6. В случае графа Петерсена также нарушается указанное неравенство. Далее, $T(4) = K_{2 \times 2}$ — октаэдр, граф Шрикханде имеет параметры 4×4 решетки, а графы Чанга имеют параметры треугольного графа $T(8)$.

Лемма доказана.

Лемма 27. *Если для некоторой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины w, z , образующие хорошие пары с u , то выполняются утверждения:*

- (1) вершины w, z смежны, $[u] \cap [w]$ не пересекает $[z]$, $k = 3b_1 - 1$, $b_1(b_1 - 1)$ делится на 6, $v - k - 1 = 2b_1$ и либо Γ является пятиугольником, либо

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + (2b_1 - 2);$$

- (2) вершины w, z смежны, $[u] \cap [w]$ пересекает $[z]$, $k = 3b_1 - 1$, b_1 нечетно, $b_1 \geq 7$, $b_1 - 1$ делится на 3, $v - k - 1 = 2b_1 + 1$ и

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + (2b_1 - 2);$$

(3) вершины w, z не смежны и либо

$$k = 3b_1, \quad \Gamma_2(u) = \{w, z\} \cup ([w] \cap [z]), \quad kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + (2b_1 - 2),$$

b_1 четно и $b_1 \geq 8$, либо

$$k = 3b_1 - 1, \quad v - k - 1 = 4b_1 - \mu(w, z), \quad kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + (4b_1 - \mu(w, z) - 4),$$

где $\mu(w, z) \leq 2b_1 - 2$.

Доказательство. Допустим сначала, что вершины w, z смежны.

Если $[u] \cap [w]$ не пересекает $[z]$, то по лемме 18 $k = 3b_1 - 1$, $(v - k - 1) = 2b_1$ и $b_1(b_1 - 1)$ делится на 6. Предположим, что

$$kb_1 < 2b_1(k - 2b_1 + 2) + (2b_1 - 2).$$

Тогда $b_1^2 - 5b_1 + 2 < 0$, $b_1 \leq 3$ и Γ — пятиугольник. В противном случае,

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + (2b_1 - 2).$$

Если $[u] \cap [w]$ содержит вершину d из $[z]$, то по лемме 19 $k = 3b_1 - 1$, $v - k - 1 = 2b_1 + 1$, b_1 нечетно, $b_1 - 1$ делится на 3 и $b_1 \geq 7$. Предположим, что

$$kb_1 < (2b_1 + 1)(k - 2b_1 + 2) + (2b_1 - 2).$$

Тогда $b_1^2 - 6b_1 + 1 < 0$ и $b_1 \leq 5$, что невозможно. Отсюда

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + (2b_1 - 2).$$

Пусть вершины w, z не смежны. По лемме 20 $k \leq 3b_1$, причем в случае равенства b_1 четно и

$$\Gamma_2(u) = \{w, z\} \cup ([w] \cap [z]).$$

Но тогда по лемме 7 $\mu(u, x) \geq b_1 + 3$ для любой вершины x из $[w] \cap [z]$, поэтому

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + (2b_1 - 2).$$

Если $k = 3b_1$ и $b_1 = 6$, то $\mu_* = b_1 + 1 = 7$ и число ребер между $[u]$ и $[w] \cap [z]$ равно $108 - 14$. Получаем противоречие с тем, что это число не меньше $11 \cdot 9$. Значит, если $k = 3b_1$, то $b_1 \geq 8$.

Пусть $k = 3b_1 - 1$. Если $x \in [w] \cap [z]$ и $\mu(u, x) = b_1 + 1$, то ввиду леммы 7 $[x]$ содержит все $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$ и по одной вершине r, s из $[w], [z]$ соответственно. По лемме 1 степень x в графе $[w] \cap [z]$ равна $2b_1 - 2$. Получаем противоречие с тем, что $[x] \cap [w]$ содержит еще вершину r . Итак, $\mu(u, x) \geq b_1 + 2$ для любой вершины x из $[w] \cap [z]$. Далее, для вершины $y \in [w] - [z]$ подграф $[u] \cap [y]$ не пересекает $[z]$, поэтому $\mu(u, x) \geq b_1 + 2$. Таким образом,

$$v - k - 1 = 4b_1 - \mu(w, z), \quad kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + (4b_1 - \mu(w, z) - 5).$$

Ввиду леммы 28 $\Lambda_{u,w} \neq \{z\}$, поэтому $\mu(w, z) \leq 2b_1 - 2$.

Лемма доказана.

Ввиду лемм 26, 27 можно считать, что для любой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ содержит единственную вершину u^* , образующую хорошую пару с u , в частности, v четно.

Лемма 28. Допустим, что $\mu(u, w) = \mu_* + 1$ для некоторой вершины w из $\Gamma_2(u)$ и $d \in [u] \cap [u^*] \cap [w]$. Тогда выполняются утверждения:

- (1) $k = 3b_1 - 1$, подграфы $[u] \cap [w]$, $[u^*] - ([u] \cup [w])$ содержат по одной вершине t , r соответственно вне $d^\perp$;
- (2) $\Gamma_2(u) - ([u^*] \cup [w])$ содержит некоторую вершину z , причем $[z]$ не пересекает $[u] \cap [u^*]$;
- (3) выполняется неравенство

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + 2b_1 - 3.$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что вершины w , u^* смежны. По лемме 7 $k = 3b_1 - 1$ и подграф $[u] \cap [w]$ содержит единственную вершину t вне $d^\perp$. Далее, $[u^*]$ содержит d , $b_1 - 1$ вершин из $[u] - \{d\}$, $b_1 - 2$ из $[d] \cap [w]$ и $b_1 - 1$ вершин из $[w] - d^\perp$. Поэтому $[u^*] - ([u] \cup [w])$ содержит единственную вершину r вне $d^\perp$. Утверждение (1) доказано.

Если $\Gamma_2(u) \subset [u^*] \cup [w]$, то по утверждению (4) леммы 1 $\mu(u, w) = \mu(u, w^*)$, поэтому $b_1 + 1 = 2b_1 - 2$, что невозможно. Значит, $\Gamma_2(u) - ([u^*] \cup [w])$ содержит вершину z . По лемме 1 $[z]$ не пересекает $[u] \cap [u^*]$. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что $\mu(u, x) = b_1 + 1$ для $x \in [u^*] - [u]$. Если $x \in [w]$ и x не смежна с r , то $[x]$ содержит $\lambda - 1$ вершин из $[w] \cap (u^*)^\perp$, $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([u^*] \cup [w])$ и единственную вершину из $[u] \cap [w]$. Если же $x \in [w]$ и x смежна с r , то $[x]$ содержит $\lambda - 2$ вершин из $[w] \cap (u^*)^\perp$, $b_1 - 2$ вершин из $[u] - ([u^*] \cup [w])$ и две вершины из $[u] \cap [w]$. Если $x = r$, то снова $[x]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([u^*] \cup [w])$ и единственную вершину из $[u] \cap [w]$.

В любом случае $\mu(u, y) \geq b_1 + 2$ для $y \in [u^*] - ([u] \cup \{x\})$ и

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + 2b_1 - 3.$$

Лемма 29. Если подграф $[u] \cap [u^*]$ не пересекает $[w]$ для любой вершины w из $\Gamma_2(u)$ с $\mu(u, w) = \mu_* + 1$, то

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + 2b_1 - 2.$$

Доказательство. Пусть $w \in \Gamma_2(u)$, $\mu(u, w) = \mu_* + 1$ и подграф $[u] \cap [u^*]$ не пересекает $[w]$. Если вершины w , u^* смежны, то $\lambda + 1 + \mu_* + 1 \leq k$ и $k \leq 3b_1 - 2$, что невозможно. Значит, вершины w , u^* не смежны.

Итак, если подграф $[u] \cap [u^*]$ не пересекает $[w]$ для любой вершины w из $\Gamma_2(u)$ с $\mu(u, w) = \mu_* + 1$, то $\mu(u, y) \geq \mu_* + 2$ для $y \in [u^*] - [u]$ и

$$kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + 2b_1 - 2.$$

Лемма доказана.

Из лемм 27–29 следует, что $kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + 2b_1 - 3$, если Γ содержит хорошую пару. Следствие 1 доказано.

Приступим к доказательству следствия 2. Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами треугольного графа $T(n)$, $n = 5, 6$, графа Клебша или графа Шлефли. Если

Γ сильно регулярен, то $\mu = \mu^* + 1$, $kb_1 = (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2)$ и Γ имеет собственное значение -2 . По теореме Зейделя Γ совпадает с соответствующим графом.

Если же Γ не сильно регулярен, то Γ содержит хорошую пару. Так как в любом из перечисленных графов $k \geq 3b_1 - 1$, по следствию 1 $kb_1 \geq (v - k - 1)(k - 2b_1 + 2) + 2b_1 - 3$. Получаем противоречие с тем, что $b_1 \geq 2$. Следствие 2 доказано.

Список литературы

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A., *Distance-regular graphs*. Springer, Berlin, 1989.
2. Махнев А. А., Минакова И. М., Об одном классе реберно регулярных графов. *Изв. Гомельского госунив., Вопросы алгебры* (2000) 3, 145–154.
3. Махнев А. А. О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ -подграфы. *Дискретный анализ и исследование операций* (1996) 3, 71–83.

Статья поступила 24.01.2002.