Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Алехина, Синтез и сложность надежных схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 1, 98–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:03:10

Синтез и сложность надежных схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов

© 2003 г. М. А. Алехина

Предложен метод синтеза схем максимально высокой надежности, не требующий существенного увеличения сложности, при однотипных константных неисправностях на входах элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России», проект 04.01.003, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00053.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. Нейман [4]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $\varphi(\tilde{x})$ в неисправном состоянии реализует функцию $\bar{\varphi}(\tilde{x})$. Для построения надежных схем Нейман предложил итерационный метод, позволяющий при некотором ограничении на вероятность ε сбоя элемента с каждым шагом итерации уменьшать вероятность ошибки на выходе схемы, но сложность схемы при этом увеличивается примерно в 3 раза. Метод дает экспоненциальное увеличение сложности схемы (примерно в 3^k раз, где k — необходимое число итераций). В этом его главный недостаток, особенно при необходимости осуществления многократных итераций.

Эти же неисправности рассматривались затем в работах других авторов, например [5, 6]. Речь идет о реализации булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном конечном базисе Φ [3]. Каждому элементу базиса приписано положительное число — вес данного элемента. Сложность $L(S)$ схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов. Предполагается, что во всех элементах схемы независимым образом с вероятностью ε происходят сбои. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальная вероятность ошибки на выходе схемы при всевозможных входных наборах. Вводится функция Шеннона

$$L_{p,\varepsilon}(n) = \max_f \min_S L(S),$$

где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ с ненадежностью $P(S)$, не большей p , а максимум — по всем булевым функциям f от n переменных.

С. И. Ортюков [5] показал, что асимптотика функции Шеннона сохраняется для схем из ненадежных элементов при степенном убывании вероятности сбоев ε_n с ростом n .

Ненадежность p_n схемы при этом такова, что

$$QL_g \varepsilon_n < p_n < 1/2,$$

где $Q > 1$, L_g — минимальная сложность реализации функции голосования

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

в рассматриваемом базисе.

Д. Улиг [6] для инверсных неисправностей с вероятностью ошибки ε показал, что асимптотика функции Шеннона сохраняется с точностью до множителя, сколь угодно близкого к 1. Ненадежность схемы при этом асимптотически не превосходит εL_g . Нижняя оценка ненадежности не приводится.

Упомянутые авторы решали задачу на минимум сложности реализации булевых функций, но при этом не рассматривали задачу на максимум надежности в классе инверсных неисправностей.

В данной работе речь идет о построении схем максимально высокой надежности, не требующем существенного увеличения сложности, при однотипных константных неисправностях на входах элементов.

Будем рассматривать реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ (см. [3]). Схема реализует булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы двоичного набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Все входы элементов схемы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния типа 0 и 1. Неисправности типа 0 на входах элементов характеризуются тем, что поступающий на вход нуль остается нулем, а поступающая на вход единица с вероятностью $\gamma < 1/2$ может превратиться в нуль. Аналогично определяются неисправности типа 1 на входах функциональных элементов.

Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальная вероятность ошибки при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$, то есть

$$P(S) = \max_{\tilde{a}} P_{\tilde{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a}).$$

Надежность схемы, следовательно, равна $1 - P(S)$.

Сложность $L(S)$ схемы S определяется как число функциональных элементов в ней.

В [1] показано, что ненадежности двойственных схем равны. Следовательно, утверждения, доказанные в данном базисе при неисправностях типа 0, справедливы в двойственном базисе (в нашем случае он тот же) при неисправностях типа 1. Поэтому далее будем предполагать, что базисные элементы подвержены неисправностям типа 0 на входах.

Для повышения надежности схем в [2] использовалась схема S_1 , построенная по схеме S , как показано на рис. 1. Схема $S_{\&}$, представленная на рис. 2, реализует $\&$. Она имеет сложность 7, а вероятности ошибок на ее выходе равны $P_1 = 0$ на наборах (0 0), (0 1), (1 0), а

$$P_0 \leq \lambda = (\gamma + (3\gamma - \gamma^2)^2)^2 \leq (\gamma + 9\gamma^2)^2$$

на наборе (1 1).

В [2] выявлены условия на $P(S)$, при которых схема S_1 работает надежнее схемы S , и показано, что ненадежности $P(S)$ и $P(S_1)$ схем S и S_1 (рис. 1) удовлетворяют неравенству

$$P(S_1) \leq (\gamma + \lambda + 2P(S))^2, \quad (1)$$

Рис. 1.

Рис. 2.

где $\lambda = (\gamma + (3\gamma - \gamma^2)^2)^2$.

Здесь же доказано, что в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ любую функцию, отличную от константы, можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически равна γ^2 при $\gamma \rightarrow 0$. Эти схемы с точки зрения надежности функционирования являются асимптотически наилучшими. Константы реализуются со сколь угодно высокой надежностью.

Перейдем к изложению метода построения максимально надежных схем без существенного увеличения их сложности при однотипных константных неисправностях на входах элементов.

Теорема 1. При $\gamma \leq 1/450$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq \gamma/2$ и сложностью $L(S) < 68 \cdot 2^n/n$.

Доказательству теоремы предположим несколько лемм.

Лемма 1. Если схема S разбивается на не имеющие общих функциональных элементов подсхемы $S_1, \dots, S_k$ (каждая из которых имеет один выход), в совокупности содержа-

Рис. 3.

щие все элементы схемы S , то

$$P(S) \leq \sum_{i=1}^k P(S_i).$$

Доказательство. Пусть событие A соответствует ошибке на выходе схемы S , а событие A_i соответствует ошибке на выходе схемы S_i , $i = 1, \dots, k$. Событие A наступает, очевидно, только в том случае, когда наступает по крайней мере одно из событий $A_1, \dots, A_k$, то есть влечет за собой $A_1 \cup \dots \cup A_k$ и поэтому

$$P(A) \leq P(A_1) + \dots + P(A_k)$$

(объединение событий $A_1 \cup \dots \cup A_k$ состоит в наступлении по крайней мере одного из событий $A_1, \dots, A_k$). Следовательно,

$$P(S) \leq \sum_{i=1}^k P(S_i).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Любую булеву функцию одной переменной можно реализовать схемой S такой, что

$$L(S) \leq 19, \quad P(S) \leq 10\gamma^2,$$

где $\gamma \leq 1/450$.

Доказательство. На рис. 3 приведены схемы, для которых нетрудно проверить утверждение леммы.

Действительно, функциональный элемент, реализующий $\bar{x}$, имеет ненадежность γ , поэтому, используя (1) для приведенной на рис. 3 схемы, находим, что

$$P \leq (3\gamma + \lambda)^2 \leq 10\gamma^2.$$

Сложность схемы равна 19.

Для константы 0 вероятности ошибок $P_1 = 0$ при $x = 0$ и $P_1 \leq \gamma\lambda$ при $x = 1$, поэтому ненадежность схемы не превосходит

$$\gamma\lambda \leq \gamma^3 + 18\gamma^4 + 81\gamma^5 < 3/2\gamma^2,$$

так как $\gamma \leq 1/450$. Сложность схемы равна 8.

Для константы 1 вероятности ошибок $P_0 = 0$ при $x = 0$ и

$$P_0 \leq \gamma(1 - \gamma)\lambda \leq \gamma\lambda < 3/2\gamma^2$$

при $x = 1$. Сложность схемы равна 9.

Лемма доказана.

Замечание 1. Для реализации $x, \bar{x}, 0, 1$ (рис. 3) использовано 36 элементов.

Лемма 3. Функцию голосования

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$$

при $\gamma \leq 1/450$ можно реализовать схемой S_g такой, что

$$L(S_g) = 28, \quad P(S_g) \leq 3\gamma^2 + 35\gamma^3.$$

Доказательство. Пусть схема $S_\vee$ получена из схемы S_2 (рис. 2) заменой каждого конъюнктора на дизъюнктор. Ее сложность равна 7, а вероятности ошибок на выходе следующие:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 && \text{при входном наборе } (0\ 0); \\ P_0 &\leq \beta = (\gamma + 4\gamma^2)^2 && \text{при наборах } (0\ 1), (1\ 0), (1\ 1). \end{aligned}$$

Схема S_g представлена на рис. 2, ее сложность равна 7, а вероятности ошибок приведены ранее. Тогда схема S_4 на рис. 4 искомая. Ее сложность 28, а вероятности ошибок на выходе следующие:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 && \text{на наборах } (0\ 0\ 0), (0\ 0\ 1), (0\ 1\ 0), (1\ 0\ 0); \\ P_0 &\leq \beta + \lambda && \text{на наборе } (0\ 1\ 1); \\ P_0 &\leq 2\beta + \lambda && \text{на наборах } (1\ 0\ 1), (1\ 1\ 0); \\ P_0 &\leq \beta + \lambda(\lambda + \beta) + \lambda\beta < 2\beta + \lambda && \text{на наборе } (1\ 1\ 1). \end{aligned}$$

Таким образом, ненадежность схемы не превосходит

$$2\beta + \lambda \leq 3\gamma^2 + 34\gamma^3 + 113\gamma^4 \leq 3\gamma^2 + 35\gamma^3,$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть схема S реализует булеву функцию f , а схема S^* построена по схеме S как показано на рис. 5. Тогда

$$P(S^*) \leq 3P^2(S) + P(S_g).$$

Рис. 4.

Рис. 5.

Доказательство. Пусть $\tilde{a}$ — произвольный входной набор схемы S . Оценим вероятность ошибки P на выходе схемы S^* на этом наборе:

$$\begin{aligned} P &\leq P(S_g)(1-p)^3 + 3P(S_g)p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) + p^3 \\ &= P(S_g)(1-3p^2+2p^3) + 3p^2-2p^3 \\ &\leq P(S_g) + 3p^2, \end{aligned}$$

где p — вероятность ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$.

Следовательно,

$$P(S^*) \leq 3P^2(S) + P(S_g).$$

Рис. 6.

Лемма доказана.

Введем функции выбора (их также называют селекторными функциями)

$$v_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_{2i}, y_0, y_1, \dots, y_{2^{2i}-1}) = \bigvee_{\tilde{a}} K_{\tilde{a}}(\tilde{x}) \& y_{|\tilde{a}|},$$

где

$$\tilde{a} = (a_1, \dots, a_{2i}), \quad K_{\tilde{a}}(\tilde{x}) = x_1^{a_1} \& \dots \& x_{2i}^{a_{2i}}, \quad |\tilde{a}| = \sum_{j=1}^{2i} a_j 2^{2i-j}$$

(то есть $|\tilde{a}|$ — число, двоичной записью которого является набор $\tilde{a}$). Поскольку $K_{\tilde{a}}(\tilde{b})$ обращается в нуль при $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ и в единицу при $\tilde{a} = \tilde{b}$, при подстановке $a_1, \dots, a_{2i}$ вместо переменных $x_1, \dots, x_{2i}$ в функцию выбора эта функция обращается в $y_{|\tilde{a}|}$.

Лемма 5. Функцию выбора $v_2(x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, y_3)$ можно реализовать схемой выбора V_2 такой, что

$$L(V_2) = 11, \quad P(V_2) \leq 8\gamma.$$

Доказательство. Схема на рис. 6 реализует функцию v_2 . Разобьем эту схему на подсхемы A , B , C . Если подсхема C исправна, то при реализации функции v_2 она использует выходное значение одной из схем A или B . Выбор схемы зависит от значения переменной x_1 . Поэтому

$$P(V_2) \leq P(C) + \max\{P(A), P(B)\}.$$

Так как подсхема C состоит из четырех функциональных элементов, по лемме 1 ее ненадежность $P(C) \leq 4\gamma$.

Аналогично доказывается, что $P(A) \leq 4\gamma$ и $P(B) \leq 3\gamma$. Следовательно, $P(V_2) \leq 8\gamma$. Лемма доказана.

Пусть построены схемы выбора $V_2, V_4, \dots, V_{2(i-1)}$ и $V_2^*, V_4^*, \dots, V_{2(i-1)}^*$ для функций выбора $v_2, v_4, \dots, v_{2(i-1)}$ соответственно. Схема V_{2i}^* строится по схеме V_{2i} точно так же, как схема S^* из леммы 4 строится по схеме S (рис. 5). Построим схему V_{2i} , реализующую функцию v_{2i} , как показано на рис. 7, используя схему $V_{2(i-1)}^*$ и схемы V_2 в количестве $2^{2(i-1)}$ штук. Для схемы S_8 , изображенной на рис. 8, подсхемы $S_0, \dots, S_{2^{2i}-1}$ которой являются произвольными схемами, верна следующая лемма.

Рис. 7.

Рис. 8.

Лемма 6. Пусть подсхемы $S_0, \dots, S_{2^{2i}-1}$ схемы S_8 на рис. 8 произвольны, тогда

$$P(S_8) \leq P(V_{2i}^*) + \max\{P(S_0), \dots, P(S_{2^{2i}-1})\}.$$

Доказательство. Действительно, если подсхема, реализующая функцию V_{2i}^* , исправна, то значение на выходе зависит от выходного значения только одной из схем $S_0, \dots, S_{2^{2i}-1}$, поэтому утверждение леммы верно.

Оценим сложность и ненадежность построенных схем выбора.

Лемма 7. При $\gamma \leq 1/450$

$$L(V_{2i}^*) \leq 17 \cdot 2^{2i+1}, \quad P(V_{2i}^*) \leq 220\gamma^2.$$

Доказательство. Доказательство проведем методом индукции по числу i .

При $i = 1$, используя леммы 3, 4, 5, получаем оценки

$$\begin{aligned} L(V_2^*) &= 3L(V_2) + L(S_g) = 33 + 28 = 61 < 17 \cdot 2^3, \\ P(V_2^*) &\leq 3P^2(V_2) + P(S_g) \leq 192\gamma^2 + 3\gamma^2 + 35\gamma^3 \\ &\leq (195 + 35/470)\gamma^2 \leq 220\gamma^2, \end{aligned}$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

При $i = 2$, используя те же леммы, а также лемму 6, находим, что

$$\begin{aligned} L(V_4^*) &= 3L(V_4) + L(S_g) = 3(2^2 L(V_2) + L(V_2^*)) + L(S_g) = 343 < 17 \cdot 2^5, \\ P(V_4^*) &\leq 3P^2(V_4) + P(S_g) \leq 3(P(V_2^*) + P(V_2))^2 + 3\gamma^2 + 35\gamma^3 \\ &\leq 3(220\gamma^2 + 8\gamma)^2 + 3\gamma^2 + 35\gamma^3 \leq 220\gamma^2, \end{aligned}$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

При $i = 3$

$$\begin{aligned} L(V_6^*) &= 3L(V_6) + L(S_g) = 3(2^4 L(V_2) + L(V_4^*)) + L(S_g) = 1585 < 17 \cdot 2^7, \\ P(V_6^*) &\leq 3P^2(V_6) + P(S_g) \leq 3(P(V_4^*) + P(V_2))^2 + 3\gamma^2 + 35\gamma^3 \\ &\leq 3(220\gamma^2 + 8\gamma)^2 + 3\gamma^2 + 35\gamma^3 \leq 220\gamma^2, \end{aligned}$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

Пусть утверждение леммы верно для схем $V_2^*, V_4^*, \dots, V_{2(i-1)}^*$. Докажем его справедливость для схемы V_{2i}^* при $i \geq 4$. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} L(V_{2i}^*) &= 3L(V_{2i}) + L(S_g) \leq 3(2^{2i-2} L(V_2) + L(V_{2i-2}^*)) + L(S_g) \\ &\leq 3(2^{2i-2} 11 + 17 \cdot 2^{2i-1}) + 28 \leq 17 \cdot 2^{2i+1}, \\ P(V_{2i}^*) &\leq 3P^2(V_{2i}) + P(S_g) \leq 3(P(V_{2i-2}^*) + P(V_2))^2 + 3\gamma^2 + 35\gamma^3 \\ &\leq 3(220\gamma^2 + 8\gamma)^2 + 3\gamma^2 + 35\gamma^3 \leq 220\gamma^2, \end{aligned}$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

Лемма доказана.

Лемма 8. Любую функцию f от k переменных при $\gamma \leq 1/450$ можно реализовать схемой S такой, что

$$L(S) \leq 51 \cdot 2^{2\lfloor k/2 \rfloor + 1} + 136, \quad P(S) \leq 4\gamma^2.$$

Доказательство. Положим $i = \lfloor k/2 \rfloor$ и представим функцию f в виде

$$f(x_1, \dots, x_k) = \bigvee_{(a_1, \dots, a_{2i})} x_1^{a_1} \& \dots \& x_{2i}^{a_{2i}} \& y_{|\bar{a}|},$$

где $y_{|\bar{a}|} = f(a_1, \dots, a_{2i})$, если k — четное число, $y_{|\bar{a}|} = f(a_1, \dots, a_{2i}, x_k)$, если k — нечетное число.

Функцию f реализуем схемой S_8 (рис. 8), учитывая, что подсхема S_m при $m = 0, 1, 2, \dots, 2^{2i} - 1$ реализует функцию $y_m \in \{0, 1, x_k, \bar{x}_k\}$.

По леммам 7 и 2

$$L(S_8) \leq 17 \cdot 2^{2i+1} + 36,$$

поскольку 36 элементов достаточно, чтобы реализовать функции одной переменной x_k (см. замечание 1). Опираясь на леммы 6, 7 и 2, получаем, что

$$P(S_8) \leq P(V_{2i}^*) + \max\{P(S_0), \dots, P(S_{2^{2i}-1})\} \leq 220\gamma^2 + 10\gamma^2 = 230\gamma^2.$$

По схеме S_8 построим схему S_8^* (рис. 5), тогда

$$L(S_8^*) = 3L(S_8) + 28 \leq 51 \cdot 2^{2\lfloor k/2 \rfloor + 1} + 136.$$

В силу лемм 3 и 4

$$P(S_8^*) \leq 3\gamma^2 + 35\gamma^2 + 3P^2(S_8) \leq 4\gamma^2,$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $i = \lfloor (n - \log(n - 3 \log n)) / 2 \rfloor$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 2i &< n - \log(n - 3 \log n) + 1, & n - 2i &\leq \log(n - 3 \log n), \\ 2^{2i+1} &< 4 \cdot 2^n / (n - 3 \log n), & 2^{n-2i} &\leq n - 3 \log n, & 2^{2^{n-2i}} &\leq 2^n / n^3. \end{aligned}$$

Разложим функцию f по первым $2i$ переменным:

$$f(\tilde{x}) = \bigvee_{(a_1, \dots, a_{2i})} x_1^{a_1} \& \dots \& x_{2i}^{a_{2i}} \& f(a_1, \dots, a_{2i}, x_{2i+1}, \dots, x_n).$$

Приведенная на рисунке 8 схема S_8 , подсхемы $S_0, \dots, S_{2^{2i}-1}$ которой реализуют функции $f(a_1, \dots, a_{2i}, x_{2i+1}, \dots, x_n)$ и удовлетворяют условиям леммы 8, реализует функцию f .

Используя леммы 6, 7, 8 и учитывая приведенные выше неравенства, оценим сложность и ненадежность этой схемы:

$$\begin{aligned} L(S_8) &\leq L(V_{2i}^*) + 2^{2^{n-2i}} L(f(a_1, \dots, a_{2i}, x_{2i+1}, \dots, x_n)) \\ &\leq 17 \cdot 2^{2i+1} + 2^{2^{n-2i}} (51 \cdot 2^{\lfloor (n-2i)/2 \rfloor + 1} + 136) \\ &< 17 \cdot 4 \cdot 2^n / (n - 3 \log n) + 2^n (102(n - 3 \log n) + 136) / n^3 < 68 \cdot 2^n / n, \\ P(S_8) &\leq P(V_{2i}^*) + \max_{0 \leq m < 2^{2i}} P(S_m) \leq 220\gamma^2 + 4\gamma^2 = 224\gamma^2 \leq \gamma/2, \end{aligned}$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим (см. доказательство теоремы 1), что справедливо следующее утверждение: при $\gamma \leq 1/450$ произвольную булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq 224\gamma^2$ и сложностью $L(S) < 68 \cdot 2^n / n$.

Лемма 9. Функцию голосования

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$$

можно реализовать схемой $\tilde{S}_g$ такой, что

$$L(\tilde{S}_g) = 463, \quad P(\tilde{S}_g) \leq \gamma^2 + 7\gamma^3,$$

где $\gamma \leq 1/450$.

Доказательство. По схеме S_g построим схему S_g^* (рис. 1), тогда (см. лемму 3)

$$L(S_g^*) = 4L(S_g) + 3 = 115.$$

Используя соотношение (1), леммы 3 и 4, получим, что

$$P(S_g^*) \leq (\gamma + \lambda + 2P(S_g))^2 \leq (\gamma + \lambda + 6\gamma^2 + 70\gamma^3)^2 \leq \gamma^2 + 15\gamma^3,$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

Прделаем еще один шаг итерации, то есть построим схему S_g^{**} (рис. 1), тогда

$$L(S_g^{**}) = 4L(S_g^*) + 3 = 463.$$

Используя соотношение (1), находим, что

$$P(S_g^{**}) \leq (\gamma + \lambda + 2P(S_g^*))^2 \leq (\gamma + (\gamma + 9\gamma^2)^2 + 2\gamma^2 + 30\gamma^3)^2 \leq \gamma^2 + 7\gamma^3,$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

Схема S_g^{**} является искомой. Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть схема S реализует функцию f , а схема $\tilde{S}^*$ построена по схеме S как показано на рисунке 5 с заменой схемы S_g на схему $\tilde{S}_g$. Тогда

$$P(\tilde{S}^*) \leq 3P^2(S) + P(\tilde{S}_g).$$

Доказательство леммы 10 аналогично доказательству леммы 4.

Теорема 2. При $\gamma \leq 1/450$ любую функцию от n переменных можно реализовать схемой A с ненадежностью

$$P(A) \leq \gamma^2 + 7\gamma^3 + 10\gamma^4$$

и сложностью

$$L(A) < 612 \cdot 2^n / n.$$

Доказательство. Возьмем схему S , для которой верно замечание 2. Построим по ней схему $\tilde{S}^*$ (см. рис. 5, на котором схема S_g заменена схемой $\tilde{S}_g$), тогда

$$L(S^*) < 3 \cdot 68 \cdot 2^n / n = 204 \cdot 2^n / n.$$

Учитывая лемму 10 и замечание 2, получаем, что

$$P(\tilde{S}^*) \leq 3(224\gamma^2)^2 + \gamma^2 + 7\gamma^3 \leq 1,8\gamma^2,$$

так как $\gamma \leq 1/450$.

По схеме $\tilde{S}^*$ построим схему $\tilde{S}^{**}$, заменив на рис. 5 схему S_g схемой $\tilde{S}_g$, а схемы S на схемы $\tilde{S}^*$. Тогда

$$L(\tilde{S}^{**}) < 3 \cdot 204 \cdot 2^n / n = 612 \cdot 2^n / n,$$

а ненадежность (см. лемму 10)

$$P(\tilde{S}^{**}) \leq 3(1,8\gamma^2)^2 + \gamma^2 + 7\gamma^3 \leq \gamma^2 + 7\gamma^3 + 10\gamma^4,$$

так как $\gamma \leq 1/450$. Схема $\tilde{S}^{**}$ — искомая схема.

Теорема доказана.

Таким образом, при однотипных константных неисправностях на входах элементов все булевы функции можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими с точки зрения надежности и без существенного увеличения сложности.

В заключение автор благодарит Н. П. Редькина за постановку задачи.

Список литературы

1. Алехина М. А., О надежности двойственных схем. В сб.: *Материалы XI Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*, Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г., ч. 1. Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, Москва, 2001, с. 6–8.
2. Алехина М. А., О надежности схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов. *Дискретная математика* (2001) 13, №3, 75–80.
3. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. Изд-во МГУ, Москва, 1984.
4. Нейман Дж., Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. В кн.: *Автоматы*. ИЛ, Москва, 1956, с. 68–139.
5. Ортюков С. И., Метод синтеза асимптотически оптимальных самокорректирующихся схем, исправляющих близкую к линейной долю ошибок. *Проблемы передачи информ.* (1981) 17, №4, 84–97.
6. Uhlig D., Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity. *Lect. Notes Comput. Sci.* (1987) 278, 462–469.

Статья поступила 22.05.2001.