Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Бабин, Эффективная проверяемость полноты систем автоматных функций с полной булевой частью, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 1, 110–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 11:24:43

Эффективная проверяемость полноты систем автоматных функций с полной булевой частью

© 2003 г. Д. Н. Бабин

Рассматриваются автоматные базисы с полной булевой частью. Построен алгоритм для проверки полноты таких базисов и получены верхние оценки его сложности.

1. Введение

Известно, что решение задачи о полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности. Так в [1] установлена континуальность всякой критериальной системы для этой задачи, а позднее в [2] установлена ее алгоритмическая неразрешимость для конечных систем автоматных функций. Вместе с тем, для специальных систем автоматов, выдающих номер своего состояния (автоматов Медведева) и содержащих все булевы функции, указанная задача алгоритмически разрешима [3]. Ранее, в [4] было показано, что при наличии булевых функций алгоритмически разрешима проблема полноты и для произвольных систем автоматов и даже не все булевы функции для этого нужны [5, 6, 7]. Возникший при этом аппарат, сохраняемых предикатов на экспериментах с автоматами, позволил упростить доказательство из статьи [4]. Новый вариант доказательства приводится в настоящей работе.

2. Основные понятия и результаты

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, E_2^∞ — множество всех сверхслов $a(1)a(2)\dots$, где $a(j) \in E_2$, $j = 1, 2, \dots$. Пусть

$$f: (E_2^\infty)^n \rightarrow (E_2^\infty)^m$$

— автоматная функция (а.-функция), то есть функция, задаваемая рекуррентно соотношениями

$$\begin{aligned} q(1) &= q_1, \\ q(t+1) &= \varphi(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \\ b_j(t) &= \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t)), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{1}$$

где $q \in Q = \{q_1, \dots, q_r\}$.

Параметр q называется состоянием а-функции f , q_1 — ее начальным состоянием, векторы $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)\dots$ и $b(1)b(2)\dots$ — входным и выходным сверхсловами, соответственно. Класс всех а-функций обозначим P_a . Если $|Q| = 1$, то автоматную функцию (1) можно отождествить с булевой вектор-функцией $\psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_n(t))$ и считать булевы функции частным случаем автоматных. Известно, что все булевы функции порождаются одной функцией $\bar{x} \vee \bar{y}$.

В классе автоматных функций введем операции суперпозиции и обратной связи. Для суперпозиции будем использовать операции

$$\begin{aligned}(\eta f)(x_1, \dots, x_n) &= f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), \\(\varepsilon f)(x_1, \dots, x_n) &= f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n), \\(\Omega f)(x_1, \dots, x_{n-1}) &= f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\(\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &= f(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}), \\(f * g)(x_1, x_2, \dots, x_{l+n-1}) &= f(g(x_1, \dots, x_l), x_{l+1}, \dots, x_{l+n-1}).\end{aligned}$$

Операция обратной связи, примененная к i -й входной и j -й выходной переменным а-функции $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$, задает а-функцию

$$g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m),$$

вычисляемую алгоритмически следующим образом. Считаем, что обратная связь применима к f в состоянии q , если ψ_j в уравнении (1) фиктивно зависит от a_i при $q(t) = q$, а вычисление $b_s(t)$ осуществляется по схеме

$$\begin{aligned}q(1) &= q_1, \\q(t+1) &= \varphi(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t)), \\&\quad a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), \\b_s(t) &= \psi_s(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t), \psi_j(q(t), a_1(t), \dots, a_{i-1}(t)), \\&\quad a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), a_{i+1}(t), \dots, a_n(t)), \quad s = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, m.\end{aligned}$$

Считаем, что обратная связь применима к f , если она применима в начальном состоянии q_1 и из ее применимости в состоянии $q(t)$ следует применимость в состоянии $q(t+1)$. Пусть $M \subseteq P_a$, обозначим через $[M]$ множество всех а-функций, получающихся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество M называется полным, если $[M] = P_a$. Проблема полноты для P_a состоит в описании всех полных множеств M .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для конечной системы $M \subset P_a$ равенство

$$[M \cup \{\bar{x} \vee \bar{y}\}] = P_a$$

алгоритмически проверяемо, и число шагов проверки не превосходит $(2^{2^{|Q|^2+1}})!$.

3. Основные леммы и доказательство теоремы

Обозначим

$$\bar{X}, \quad 1, \quad 0, \quad f_{sh}, \quad f_{\&}, \quad f_{\vee}$$

автоматные интерпретации истинностных функций, соответственно,

$$\bar{x}, \quad 1, \quad 0, \quad \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \quad x_1 \& x_2, \quad x_1 \vee x_2.$$

Для натуральных D, N автоматную функцию с уравнениями (1), где

$$m = n = D + N, \quad Q = \{1, \dots, D + N\},$$

и для любого $a \in E_2^{D+N}$

$$\begin{aligned} \psi(i, a) &= 0^{i-1} 10^{D+N-i}, \\ \varphi(i, a) &= \begin{cases} i + 1 & \text{при } i < D + N, \\ D + 1 & \text{при } i = D + N, \end{cases} \end{aligned}$$

назовем (D, N) -счетчиком и обозначим через $B_{D,N}$; $B_{D,N}$ выдает всегда одну и ту же последовательность с периодом N и предпериодом D . Если при тех же условиях

$$\psi(i, (a_1, \dots, a_{D+N})) = a_i,$$

то такую автоматную функцию назовем (D, N) -селектором и обозначим через $C_{D,N}$. Множество всех счетчиков обозначим через K .

Без ограничения общности, будем исследовать на полноту системы вида $\{f_{sh}, f\}$, где f задается уравнениями (1).

Для $D, 0 \leq D \leq s$, последовательность,

$$(a(1), b(1)), (a(2), b(2)), \dots, (a(s), b(s)), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} a(1), \dots, a(s) &\in E_2^n, \quad q(1), \dots, q(s+1) \in Q, \quad b(1), \dots, b(s) \in E_2^m, \\ b(i) &= \psi(q(i), a(i)), \quad q(i+1) = \varphi(q(i), a(i)), \quad i = 1, \dots, s, \\ q(1) &= q_1, \quad \varphi(q(s), a(s)) = q(D+1), \end{aligned}$$

назовем (D, s) -экспериментом с а.-функцией f .

Пусть i, j — натуральные числа, $1 \leq i, j \leq s, j \neq i$. Скажем, что а.-функция f является (j, i) -зависимой, если для каждой последовательности (2) выполнено соотношение

$$\psi(q(j), a(i)) = b(i) \quad (3)$$

Автоматная функция f допускает счетчик $B_{D,N}$, если для некоторого $s = D + kN$ и любых $i \neq j, 1 \leq i, j \leq s$, а.-функция f не является (j, i) -зависимой.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Включение $\{[f, f_{sh}]\} \supseteq K$ справедливо тогда и только тогда, когда для любого натурального N найдутся $D, s = D + kN$ такие, что f допускает счетчик $B_{D,N}$.

Лемма 2. Отношение включения $\{[f, f_{sh}]\} \supseteq K$ алгоритмически проверяемо.

Через $Q_i \subseteq Q$ обозначим множество состояний а.-функции f , достижимых из начального состояния за i тактов. Скажем, что а.-функция f с уравнениями (1) имеет память в j -й момент, если для некоторого слова $\alpha \in E_2^n$ длины $j-1$ и некоторых букв $a, b, c \in E_2^n$

$$\psi(\varphi(q_1, \alpha a), c) \neq \psi(\varphi(q_1, \alpha b), c),$$

в противном случае скажем, что а.-функция f не имеет памяти в j -й момент. Обозначим множество всех а.-функций, не имеющих памяти в j -й момент, через $U(j)$, $j = 0, 1, \dots$

Автоматная функция $G: E_2^\infty \rightarrow E_2^\infty$ с уравнениями

$$q(1) = 0, \quad q(t+1) = a(t), \quad b(t) = q(t),$$

называется автоматной функцией задержки или задержкой. Известно, что

$$[[G, f_{sh}]] = P_a.$$

Через λ обозначим пустую букву. Пусть $p, q, r, s \in Q$, определим бинарные отношения $2, 0, 1$ на множестве $Q \times Q$. Пары $((p, q), (r, s))$ связаны отношением $2, 0, 1$, если, соответственно, существуют a, b такие, что

$$((\varphi(p, a) = r) \& (\varphi(q, b) = s) \& (\psi(p, a) \neq \psi(q, a))),$$

существует a такое, что

$$((\varphi(p, a) = r) \& (\varphi(q, a) = s) \& (\psi(p, a) = \psi(q, a))),$$

существуют a, b такие, что

$$((\varphi(p, a) = r) \& (\varphi(q, b) = s) \& (\psi(p, a) = \psi(q, a)) \& (\psi(p, b) = \psi(q, b))).$$

Пусть

$$\mathbf{ALL} = 2 \cup 0 \cup 1$$

и функция $\eta: Q^2 \times Q^2 \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\}$ определена равенствами

$$\eta((p, q), (r, s)) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } ((p, q), (r, s)) \notin \mathbf{ALL}, \\ 2, & \text{если } ((p, q), (r, s)) \in 2, \\ 0, & \text{если } ((p, q), (r, s)) \in 0 \setminus 2, \\ 1, & \text{если } ((p, q), (r, s)) \in 1 \setminus \{0 \cup 2\}. \end{cases}$$

Пусть $\overline{\max}$ обозначает максимум относительно порядка $\lambda \leq 1 \leq 0 \leq 2$, а $\max$ — относительно порядка $0 \leq 1 \leq 2 \leq \lambda$.

Обозначим I_f полный ориентированный граф с помеченными ребрами и множеством вершин $Q \times Q$, и пусть η — функция меток ребер. Граф I_f назовем локальным информационным графом а.-функции f . Для

$$X_1, X_2 \in 2^{Q \times Q}, \quad X_1 \neq \emptyset, \quad X_2 \neq \emptyset,$$

обозначим через $E(X_1, X_2) \subseteq 2^{Q \times Q \times Q \times Q}$ всякую систему ребер графа I_f такую, что всякое $x_1 \in X_1$ ($x_2 \in X_2$) соединено ребром из $E(X_1, X_2)$ с $x_2 \in X_2$ ($x_1 \in X_1$), множество всех таких систем обозначим через $\Upsilon(X_1, X_2)$.

Зададим функцию $\Theta: 2^{Q \times Q} \times 2^{Q \times Q} \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\}$ для $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$ соотношением

$$\Theta(X_1, X_2) = \overline{\max}_{\Upsilon(X_1, X_2)} \left(\max_{E \in \Upsilon(X_1, X_2)} (\eta(E)) \right),$$

для $X_1 = \emptyset$ или $X_2 = \emptyset$ положим $\Theta(X_1, X_2) = \lambda$.

Полный ориентированный граф $\hat{I}_f$ с помеченными ребрами, множеством вершин $2^{Q \times Q}$ и функцией меток Θ назовем глобальным информационным графом а.-функции f . Если $q \in Q_i$, то цикл $\{(q, q)\} E_1 X_1 E_2 X_2 \dots X_{l-1} E_l \{(q, q)\}$ в графе $\hat{I}_f$ (соответственно в I_f) назовем i -м циклом, здесь через $E_1, \dots, E_l$ обозначены ребра. Если отметки ребер i -го цикла таковы, что

$$\begin{aligned} \Theta(E_1) = 1, \quad \Theta(E_2) = 2, \quad \Theta(E_3) \neq 1, \dots, \Theta(E_l) \neq 1, \\ (\eta(E_1) = 1, \quad \eta(E_2) = 2, \quad \eta(E_3) \neq 1, \dots, \eta(E_l) \neq 1), \end{aligned}$$

то назовем его i -м информационным циклом в графе $\hat{I}_f$ (соответственно в I_f).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Для системы $\{f, f_{sh}\}$ такой, что $[\{f, f_{sh}\}] \supseteq K$, соотношение

$$[\{f, f_{sh}\}] \ni G$$

справедливо тогда и только тогда, когда

- (1) $f \notin U(i)$ при всех натуральных i ,
- (2) найдется натуральное $N \leq 2^{|Q|^2}$ такое, что для всех $i > N$ в графе $\hat{I}_f$ имеется i -й информационный цикл.

Пусть $Q_p^t \subseteq Q$ — множество состояний а.-функции f , достижимых из состояния p за t тактов, а R_l — множество состояний, из которых достижимо состояние l . Введем обозначение $Q_{pl}^t = Q_p^t \cap R_l$, тогда

$$Q_{pl}^{t+1} = \{\varphi(p, a) \mid a \in E_2^m, p \in Q_{pl}^t\} \cap R_l.$$

Последовательность $Q_{pl}^t, t = 1, 2, \dots$, является детерминированной, а значит, и периодической. Можно выбрать период и предпериод этой последовательности равным, для простоты, одному и тому же числу ρ при всех $p, l \in Q$. Очевидна грубая оценка $\rho \leq (2^{|Q|})!$. Итак для любых $p, l \in Q$

$$Q_{pl}^t = Q_{pl}^{t+\rho}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Доказательство теоремы 1. Случай конечной системы $M = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ сводится к случаю, когда M состоит из одного элемента $M = \{f\}$. Ввиду периодичности последовательности $Q_{q_1}^t, t = 1, 2, \dots$, проверка условия $f \notin U(i)$ сводится к перебору значений $i < 2\rho$ и всех путей длины, не большей $i + 1$, проходящих по состояниям а.-функции f . Число таких путей не превосходит $(2^n)^{2\rho}$. Общее число операций при переборе не превосходит $2\rho 2^{2n\rho}$, где $\rho < (2^{|Q|})!$. Таким образом, общее число операций не превосходит числа $2(2^{|Q|})! (2^{2n(2^{|Q|})!})$.

Согласно лемме 2 включение $[\{f, f_{sh}\}]_K \supseteq K$ алгоритмически проверяемо. Рассмотрим проверяемость условия (1) леммы 3. Ввиду периодичности последовательности $Q_{q_1}^t, t = 1, 2, \dots$, проверка условия $f \notin U(i)$, как уже доказано, занимает не более $2(2^{|Q|})! (2^{2n(2^{|Q|})!})$ операций. Оценим размеры графа $\hat{I}_f$. Он имеет множество вершин мощности $R = 2^{|Q|^2}$. Для проверки наличия i -го информационного цикла необходимо проверить простые пути из вершин, достижимых из вершины $\{(q_1, q_1)\}$ за $i + 2$ такта.

Число таких путей не превосходит $R!$. Вместо проверки счетного числа значений i , достаточно проверить состояния из множеств R_i достижимых за i тактов вершин графа $\hat{f}$. Если ρ, ρ — период и предпериод последовательности $R_1, R_2, \dots$, то необходимо проверить вершины из множеств $R_1, R_2, \dots, R_{2\rho\rho}$. Очевидно, что $\rho\rho \leq (2^R)!$. Таким образом, общее число операций при проверке условия (2) леммы 3 не превосходит числа $(2^{2^{2^{l^2+1}}})!$. Теорема доказана.

4. Доказательства лемм

Доказательство леммы 1. Докажем необходимость. Пусть $N \neq \rho$ и через а.-функции f_{sh}, f выражена а.-функция g , равная $B_{0,N}$. Это значит, что найдутся $k, D, s = D + kN$ такие, что а.-функция g не является (j, i) -зависимой при $i \neq j \pmod{N}$. Зафиксируем для определенности $i, j, i < j \pmod{N}$.

Пусть а.-функция g получена операцией обратной связи из а.-функции $\tilde{g}$. Покажем, что $\tilde{g}$ также не является (j, i) -зависимой. В самом деле, пусть эксперимент (2), получившийся из эксперимента

$$((a(1), e(1)), (b(1), e(1))), \dots ((a(s), e(s)), (b(s), e(s))) \quad (4)$$

нарушил (j, i) -зависимость. Это означает, что $b = \psi(q(j), a(i)) \neq b(i)$. Пусть входная буква $a(i)$ в диаграмме g в состоянии $q(j)$ получилась из входной буквы $(a(i), e)$ в диаграмме $\tilde{g}$ в состоянии $q(j)$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{g}}(q(j), (a(i), e)) &= (b, e), \\ \psi_{\tilde{g}}(q(j), (a(i), e(i))) &= (b', e'). \end{aligned}$$

По правилу применимости обратной связи $e = e'$, и если есть сохранение (j, i) -зависимости для $\tilde{g}$, то $e' = e(i)$, откуда следует, что $b' = b = b(i)$, а это означает сохранение (j, i) -зависимости для g , что противоречит нашему предположению.

Пусть теперь g получена суперпозицией а.-функций g_1 и g_2 и эксперимент (2) получен из экспериментов

$$(a(1), c(1)), \dots, (a(s), c(s)), (c(1), b(1)), \dots, (c(s), b(s))$$

а.-функций g_1 и g_2 , соответственно. Если предположить, что g_1 и g_2 сохраняют (j, i) -зависимость, то получим, что g также сохраняет (j, i) -зависимость. Значит, хотя бы одна из а.-функций g_1 или g_2 не сохраняет (j, i) -зависимость на (D, s) -экспериментах. Очевидно, что а.-функция f_{sh} сохраняет (j, i) -зависимости на (D, s) экспериментах.

Повторяя эти рассуждения, мы получим, что сама а.-функция f не сохраняет (j, i) -зависимость на (D, s) экспериментах при $i \neq j \pmod{N}$.

Если для (D, s) -экспериментов выполнена (j, i) -зависимость, то будет выполнена (j_1, i) -зависимость, где $j_1 = j \pmod{\rho}$, $j_1 \neq i \pmod{N}$. В самом деле, это следует из того, что для каждого $p \in Q_D$ и для каждого $r \in Q_{p,p}^{i-D}$ справедливо равенство $Q_{r,p}^{j-i} = Q_{r,p}^{j_1-i}$. Так как $N \neq \rho$, для $i = j \pmod{N}$ а.-функция f также не будет (j, i) -зависимой. Получилось, что счетчик $B_{D,N}$ допустим системой $\{f_{sh}, f\}$. Очевидно, что из допустимости $B_{0,2\rho}$ следует допустимость $B_{0,\rho}$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Для фиксированных $N, D, k, s = D + kN$ и некоторого j рассмотрим множество всех (D, s) экспериментов P с а.-функцией f , допускающее счетчик

$B_{D,N}$. Пусть $|P| = t$ и g_j есть параллельное соединение t копий а.-функции f . Пусть g_j описывается уравнениями (1) и $\alpha_l \in P$ — l -й эксперимент из P ,

$$\alpha_l = (a^{(l)}(1), b^{(l)}(1))(a^{(l)}(2), b^{(l)}(2)), \dots, (a^{(l)}(s), b^{(l)}(s)), \quad l = 1, 2, \dots, t,$$

$$a(i) = (a^{(1)}(i) \dots a^{(t)}(i)), b(i) = (b^{(1)}(i) \dots b^{(t)}(i)), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Можно считать, что среди $a(1), a(2), \dots, a(s)$ нет равных (в противном случае можно добавить фиктивные входы и выбрать $a(1), a(2), \dots, a(s)$ попарно не равными. Рассмотрим (D, s) -эксперимент (2) с а.-функцией g_j . Для $a \in E_2^n$ определим булеву вектор-функцию $h_j: E_2^{m+n} \rightarrow E_2^m$, полагая

$$h_j(x, y) = \begin{cases} a(i) & \text{для } x = a(i), y = b(i), i = 1, \dots, s, \\ a(j) & \text{для } y = \psi(q(j), x), x \in E_2^n, y \in E_2^m. \end{cases}$$

Это можно сделать ввиду отсутствия (j, i) -зависимостей. В состоянии $q(j)$ выходная функция а.-функции $f_j(x) = h_j(x, g_j(x))$ принимает значение $a(j)$ для всех входных букв, то есть является константой.

Рассмотрим а.-функцию

$$F_{N,D,k}(x) = f_s(\dots f_2(f_1(x)) \dots)$$

с начальным состоянием $(q(1), q(1), \dots, q(1))$, она имеет n входов и n выходов. В состоянии $(q(j), q(j), \dots, q(j))$ реализуется константа $a(j)$. После n применений операции обратной связи от соответствующих выходов к соответствующим входам получится а.-функция, с точностью до булевой перекодировки, равная $B_{D,N}$. Достаточность доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $D < D + \rho < i < i + \rho < j < s - \rho < s$. Если для (D, s) экспериментов выполнена (j, i) -зависимость, то для (D_1, s_1) экспериментов, будет выполнена (j_1, i_1) -зависимость, где

$$D_1 < D_1 + \rho < i_1 < D_1 + 2\rho < j_1 < s_1 < j_1 + \rho,$$

и $D_1, D; i_1, i; j_1, j; s_1, s$ попарно совпадают по модулю ρ . Это следует из того, что для каждого $p \in Q_{q_1,p}^D$

$$Q_{q_1,p}^D = Q_{q_1,p}^{D_1} \quad Q_{p,p}^i = Q_{p,p}^{i_1},$$

для каждого $r \in Q_{p,p}^{i-D}$

$$Q_{r,p}^{j-i} = Q_{r,p}^{j_1-i_1}$$

и для каждого $l \in Q_{r,p}^{j-i}$

$$Q_{l,p}^{s-j} = Q_{l,p}^{s_1-j_1}.$$

В случае другого расположения чисел D, i, j мы таким же способом сократим интервалы между числами $1, D, i, j$. Следовательно, наличие или отсутствие (j, i) -зависимости на (D, s) -экспериментах равносильно, соответственно, наличию или отсутствию (j_1, i_1) -зависимости на (D_1, s_1) -экспериментах при $D_1 \leq s_1 \leq 5\rho$. Последний факт проверяется перебором всех (D_1, s_1) -экспериментов.

Таким образом, условие выразимости системой $\{f_{sh}, f\}$ всех константных а.-функций алгоритмически проверяемо. Лемма 2 доказана.

Пусть I_1, I_2 — полные графы с множествами вершин P_1, P_2 и функциями меток ребер

$$\chi_1: P_1 \times P_1 \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\},$$

$$\chi_2: P_2 \times P_2 \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\},$$

соответственно. Полный граф с множеством вершин $P_1 \times P_2$ и функцией меток

$$\chi: (P_1 \times P_2) \times (P_1 \times P_2) \rightarrow \{\lambda, 0, 1, 2\},$$

где

$$\chi(((p_1^1, p_1^2), (p_2^1, p_2^2))) = \max(\chi_1((p_1^1, p_2^1)), \chi_2((p_1^2, p_2^2))),$$

назовем прямым произведением графов I_1, I_2 и обозначим $I_1 \times I_2$. Граф $I \times \dots \times I$ (с l сомножителями) будем называть l -й степенью графа I и обозначать через I^l .

Предложение 1. В графе $\hat{I}_f$ существует i -й информационный цикл тогда и только тогда, когда для некоторого натурального $l \leq 2^n |Q|^{2|Q|^2}$ существует i -й информационный цикл в графе $(I_f)^l$.

Доказательство. Пусть f — а.-функция, определенная уравнениями (1), I_f — ее локальный информационный граф, $\hat{I}_f$ — ее глобальный информационный граф, $q \in Q_i$, $X_0 = \{(q, q)\}$,

$$X_0 \xrightarrow{x_0} X_1 \xrightarrow{x_1} \dots \xrightarrow{x_{s-2}} X_{s-1} \xrightarrow{x_{s-1}} X_0$$

— i -й информационный цикл в $\hat{I}_f$. Длина s этого цикла не превосходит числа вершин графа $\hat{I}_f$, которое не превосходит $2^{|Q|^2}$. Пусть

$$\Upsilon_j = \Upsilon(X_j, X_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, s-1,$$

— система ребер графа I_f , по которым выбрана метка $x_j = \max_{E \in \Upsilon_j} \chi(E)$ ребра X_j, X_{j+1} графа $\hat{I}_f$. Пусть l — число разных цепей, идущих по ребрам систем $\Upsilon_j, j = 0, 1, \dots, s-1$, из X_0 в X_0 , тогда для некоторого l в $(I_f)^l$ существует i -й информационный цикл, составленный из указанных цепей. Заметим, что

$$l \leq |Q|^{2s} 2^n = 2^n |Q|^{2|Q|^2}.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть в $(I_f)^l$ имеется i -й информационный цикл, $q \in Q_i$,

$$(p_1^0, \dots, p_l^0) \xrightarrow{x_0} \dots \xrightarrow{x_{s-2}} (p_1^{s-1}, \dots, p_l^{s-1}) \xrightarrow{x_{s-1}} (p_1^0, \dots, p_l^0),$$

$p_j^r \in Q \times Q, r = 1, \dots, s-1, j = 1, \dots, l, (p_1^0, \dots, p_l^0) = ((q, q), \dots, (q, q))$. Пусть

$$X_i = \{q_j^i \mid j = 1, 2, \dots, l\},$$

тогда цикл

$$(X_0) \xrightarrow{y_0} (X_1) \xrightarrow{y_1} \dots \xrightarrow{y_{s-1}} (X_0)$$

будет глобальным информационным циклом в $\hat{I}_f$. В самом деле, цепочка $y_0 = x_0 = 1, y_1 = x_1 = 2$ не может измениться, так как она уже максимальна. Если $x_j = 0$ и возникла ситуация, когда для одной системы ребер метка равна 0, а для другой 1, то функция $\max$ выберет метку 0. Метка λ возникнуть здесь не может.

Предложение доказано.

Рис. 1.

Пусть $g(x) = y$ — одноместная а.-функция с уравнениями (1), I_g — ее локальный информационный граф. Путь

$$(p(1), q(1)) \xrightarrow{x_1} (p(2), q(2)) \xrightarrow{x_2} \dots \xrightarrow{x_{l-1}} (p(l), q(l))$$

в графе I_g , для меток которого и функций φ и ψ выполнено соотношение (5), назовем приведенным (см. рис. 1).

Здесь $\psi_p(a) = \psi(p, a)$ и

$$\begin{aligned}
 \psi_{p(i)} &\equiv \psi_{q(i)} \equiv 0, & \text{при } x_i &\neq 2, \\
 \psi_{p(i)} &\equiv 0, \psi_{q(i)} \equiv 1, & \text{при } x_i &= 2, \\
 \varphi(p(i), 0) &= \varphi(p(i), 1) = p(i+1), & \text{при } x_i &\neq 1, \\
 \varphi(q(i), 0) &= \varphi(q(i), 1) = q(i+1), & \text{при } x_i &\neq 1, \\
 \varphi(p(i), 0) &= p(i+1), \varphi(q(i), 1) = q(i+1) & \text{при } x_i &= 1.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Предложение 2. Пусть в графе I_f есть i -й цикл длины l с метками $x_1, \dots, x_l$, тогда через $\{f, f_{sh}\} \cup K$ выразима одноместная а.-функция g , в графе I_g которой имеется i -й приведенный цикл с теми же метками $x_1, \dots, x_l$.

Доказательство. Пусть указанный цикл в графе I_f имеет вид, приведенный на рис. 2. Состояния $p_2, p_3, \dots, p_l$ образуют верхнюю ветвь, а состояния $q_2, q_3, \dots, q_l$ — нижнюю ветвь цикла,

$$p_i, q_i \in Q, \quad a_i, b_i \in E_2^n, \quad c_i, d_i \in E_2^m.$$

Определим функции

$$\begin{aligned}
 \gamma_j &: E_2 \rightarrow E_2^n, \\
 \delta_j &: E_2^n \times E_2^m \rightarrow E_2
 \end{aligned}$$

Рис. 2.

по a_j, b_j, c_j, d_j (см. рис. 1), $j = 1, 2, \dots, l$, следующим образом:

$$\gamma_j(z_1) = \begin{cases} a_j & \text{при } x_j = 0; \\ a_j & \text{при } x_j = 1, z_1 = 0, \\ b_j & \text{при } x_j = 1, z_1 = 1, \\ a_j & \text{при } x_j = 2, a_j = b_j, c_j \neq d_j, \\ a_j & \text{при } x_j = 2, z_1 = 0, \\ b_j & \text{при } x_j = 2, z_1 = 1, \end{cases}$$

$$\delta_j(z_2, y_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_j = 0, x_j = 1, \\ 0 & \text{при } x_j = 2, a_j = b_j, c_j \neq d_j, z_2 = c_j, y_1 = a_j, \\ 1 & \text{при } x_j = 2, a_j = b_j, c_j \neq d_j, z_2 = d_j, y_1 = b_j, \\ 0 & \text{при } x_j = 2, a_j \neq b_j, c_j \neq d_j, z_2 = c_j, y_1 = a_j, \\ 1 & \text{при } x_j = 2, a_j \neq b_j, c_j \neq d_j, z_2 = d_j, y_1 = a_j, \\ 1 & \text{при } x_j = 2, a_j \neq b_j, c_j \neq d_j, y_1 = b_j. \end{cases}$$

Пусть а.-функции $D_1, D_2 \in \{[K, f_{sh}]\}$ суть функции

$$D_1: E_2^* \rightarrow (E_2^n)^*, \quad D_2: (E_2^m \times E_2^n)^* \rightarrow E_2^*.$$

S_1, S_2 — множества состояний а.-функций D_1, D_2 и $S_1 = S_2 = \{1, 2, \dots, l\}$, $z_1 \in E_2$, $y_1 \in E_2^n$, $z_2 \in E_2^m$, $y_2 \in E_2$, $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, и функции D_1, D_2 задаются уравнениями

$$\begin{aligned} s_1(1) &= 1, \\ s_1(t+1) &= s_1(t) + 1 \pmod{l}, \end{aligned} \quad (6)$$

Рис. 3.

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \gamma_{s_1(t)}(z_1), \\
 s_2(1) &= 1, \\
 s_2(t+1) &= s_2(t) + 1 \pmod{l}, \\
 y_2(t) &= \delta_{s_2(t)}(z_2, y_1).
 \end{aligned} \tag{7}$$

В графе α -функции $h = D_2(f(D_1(z_1)), D_1(z_1))$ имеется почти приведенный цикл с такими же отметками $x_1, \dots, x_l$ с той лишь разницей, что для $x_i = 2$ могут быть два варианта переходов (а) и (б) (см. рис. 3).

Далее мы сведем случай (б) к случаю (а). Пусть α -функция

$$H_j(u, v, z), \quad H_j: (E_2^3)^* \rightarrow E_2^*$$

имеет множество состояний $S = \{1, 2, \dots, l\}$ и уравнения

$$\begin{aligned}
 s(1) &= 1, \\
 s(t+1) &= s(t) + 1 \pmod{l}, \\
 H_j(t) &= \begin{cases} u(t) & \text{для } s(t) \neq j, \\ u(t) + v(t) + z(t) & \text{для } s(t) = j. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Если номер j соответствует случаю (б), то α -функция $F_j(y) = H_j(h(y), \overline{h(\bar{y})}, \bar{y})$ имеет фрагмент диаграммы, представленный на рис. 4, и приведенный цикл с теми же отметками $x_1, x_2, \dots, x_l$. В самом деле, для $s(t) \neq j$ выполнено соотношение $F_j \equiv h(y)$, а также условия (5). Если имеет место случай (б), то выходная функция в состоянии (p_j, q_j) (см. рис. 4) равна $\bar{y} + 0 + \bar{y} = 0$, в состоянии (q_j, p_j) выходная функция равна $1 + \bar{y} + \bar{y} = 1$.

Таким образом, для $F_j(y)$ будут выполнены все условия (5), кроме условия

$$\varphi(p(j), 1) = p(j+1), \quad \varphi(q(j), 0) = q(j+1)$$

Рис. 4.

в случае (b). При помощи срабатывающей в j -й момент обратной связи указанный недостаток исправляется и фрагмент диаграммы приводится к виду, указанному на рис. 1, схемой, изображенной на рис. 5, где а.-функция $w_j(x, y)$

$$w_j: (E_2^2)^* \rightarrow E_2$$

имеет множество состояний S и уравнения

$$\begin{aligned} s(1) &= 1, \\ s(t+1) &= s(t) + 1 \pmod{l}, \\ w_j(t) &= \begin{cases} x(t) & \text{для } s(t) \neq j, \\ y(j) & \text{для } s(t) = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Пусть а.-функция f есть задержка G , тогда найдется натуральное $N \leq |Q|^2$ такое, что для любого $i > N$, в графе I_f имеется i -й информационный цикл.

Доказательство. Пусть f — одноместная а.-функция с уравнениями (1) и f эквивалентна G . Последовательность $\{q_1\}$, $Q_1, Q_2, \dots$ имеет предпериод ρ и период ρ . Пусть $i > \rho$ и $q \in Q_i$ — такое состояние, что для любого слова $\beta \in E_2^*$ найдется слово $\gamma \in E_2^*$ такое, что $\varphi(q, \beta\gamma) = q$ (q — состояние из сильно связанной компоненты). Пусть слова $\alpha, \bar{\alpha} \in E_2^*$ таковы, что

$$\alpha = a_1 a_2 \dots a_\rho, \quad \bar{\alpha} = \overline{a_1 a_2 \dots a_\rho}.$$

Рассмотрим путь (см. рис. 6) в графе I_f . В состоянии p_j из q ведет путь $a_1 a_2 \dots a_{j-1}$, в состояние q_j — путь $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_{j-1}$.

Так как для а.-функции $f = G$ в состоянии p_j реализуется константа a_{j-1} , а в состоянии q_j константа $\bar{a}_{j-1}$, получаем, что $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \dots = x_\rho = 2$. Из того, что $Q_i = Q_{i+\rho}$, следует, что $p_{\rho+1}, q_{\rho+1} \in Q_i$. Для натурального s рассмотрим множество

$$H_s = \{\alpha^{s-l}(\bar{\alpha})^l \mid l = 1, 2, \dots, s\} \subset E_2^*$$

слов длины $s\rho$, составленных из слов α и $\bar{\alpha}$. Пусть $\gamma, \beta \in H_s$ таковы, что

$$\gamma = \alpha^l(\bar{\alpha})^{s-l}, \quad \beta = \alpha^j(\bar{\alpha})^{s-j},$$

Рис. 5.

Рис. 6.

где $l < j$, состояния $r_\beta, r_\gamma, p \in Q$ такие, что

$$r_\beta = \varphi(q, \beta), \quad r_\gamma = \varphi(q, \gamma), \quad p = \varphi(q, \alpha^l).$$

В графе I_f из пары (q, q) в пару (r_β, r_γ) ведет путь (см. рис. 7), определяемый парой

Рис. 7.

слов (β, γ) с метками

$$\begin{aligned} y_1 = \dots = y_{lp} = 0, \quad y_{lp+1} = 1, \\ y_{lp+2} = \dots = y_{jp+1} = 2, \\ y_{jp+2} = \dots = y_{sp} = 0. \end{aligned}$$

Если предположить, что для любого s и любых $\gamma, \beta \in H$, $\gamma \neq \beta$ справедливо неравенство $r_\beta \neq r_\gamma$, то получим противоречие с конечностью множества состояний a -функции f .

Следовательно, найдется такое s и такие слова $\gamma, \beta \in H$, $\gamma \neq \beta$, длины sp , что справедливо равенство $r_\beta = r_\gamma$. Заметим, что $r_\beta, r_\gamma, p, q \in Q_i$. Пусть δ — такое слово, что $\varphi(r_\beta, \delta) = q$, тогда из пары (p, p) начинается искомый i -й информационный цикл (см. рис. 7). Очевидно, что всякое состояние достижимо словом длины, не большей $|Q|^2$.

Предложение 3 доказано.

Предложение 4. Пусть a -функция h получается суперпозицией a -функций h_1 и h_2 , при этом в графах I_h, I_{h_1}, I_{h_2} , соответственно, есть ребра с метками

$$\begin{aligned} ((p_1, p_2), (q_1, q_2)) &\xrightarrow{x} ((r_1, r_2), (s_1, s_2)), \\ (p_1, q_1) &\xrightarrow{y} (r_1, s_1), \\ (p_2, q_2) &\xrightarrow{z} (r_2, s_2), \end{aligned}$$

тогда метки x, y, z связаны соотношениями

$$(x = 2) \rightarrow ((y = 2) \vee (z = 2)), \quad (x = 0) \rightarrow ((y = 2) \vee (y = z = 0)).$$

Рис. 8.

Рис. 9.

Доказательство. Рассмотрим фрагмент диаграммы а.-функции h (см. рис. 8), где показаны выходы а.-функций h_1, h_2 . Пусть $x = 2$ и $c \neq e$, тогда, если $c'' \neq c'$, то $y = 2$, если $c'' = c'$, то $z = 2$. Пусть $x = 0$, $a = b$, $c = d$, тогда при $c' \neq d'$ справедливо равенство $y = 2$, а при $c' = d'$ — равенство $y = z = 0$. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. Пусть а.-функция h получена из а.-функции g при помощи операции обратной связи и в графе I_h есть ребро

$$(p, q) \xrightarrow{x} (r, s),$$

тогда в графе I_g есть ребро

$$(p, q) \xrightarrow{y} (r, s),$$

и при этом метки ребер связаны соотношениями

$$(x = 2) \rightarrow (y = 2), \quad (x = 0) \rightarrow (y \neq 1).$$

Доказательство. Пусть а.-функция h получена из а.-функции g с уравнениями (1) операцией обратной связи, примененной от последнего выхода к последнему входу. На рис. 9

Рис. 10.

Рис. 11.

изображен фрагмент диаграммы a -функции h , на рис. 10 — соответствующий ему фрагмент диаграммы a -функции g , где $e, l, e', e'' \in E_2$, $a, b \in E_2^{n-1}$, $c, d, c', c'' \in E_2^{m-1}$.

Пусть $x = 2$, $c' \neq c$, и предположим противное, то есть предположим, что $y = 2$, или $(c'', e'') = (c, e)$. Последний выход a -функции g не зависит от ее последнего входа, а первая компонента у букв (a, e') и (a, e) одна и та же, поэтому (см. рис. 10, состояние q) справедливо равенство $e'' = e' = e$. Но тогда $(a, e') = (a, e)$ и это один и тот же входной сигнал, и следовательно, $(c', e') = (c'', e'') = (c, e)$. Получили противоречие с тем, что $c' \neq c$, значит, $y = 2$.

Пусть теперь $x = 0$, $a = b$, $c = d$ (см. рис. 11); предположим противное, то есть предположим, что $y = 1$ и $(a, e) \neq (b, e)$, тогда $e'' = e$, $c'' = c$, $d'' = d$, $l'' = l$. Так как (по определению обратной связи) последний выход не зависит от последнего входа, справедливо соотношение $e'' = l$, $l'' = e$, значит, $e = l$, откуда получаем противоречивое равенство $(a, e) = (b, l)$, значит, $y \neq 1$.

Предложение 5 доказано.

Пусть $g(x) = y$ — одноместная a -функция с уравнениями (1), имеющая память в j -й

Рис. 12.

Рис. 13.

момент. Фрагмент диаграммы g вида, приведенного на рис. 12, назовем j -м приведенным фрагментом.

На рис. 12 в состояниях, помеченных 0, 1, реализуются выходные функции 0, 1, соответственно.

Предложение 6. Пусть a -функция h получается суперпозицией a -функций h_1 и h_2 и $h \notin U(i)$ для некоторого i , тогда $h_1 \notin U(i)$ или $h_2 \notin U(i)$.

Доказательство. Рассмотрим фрагмент a -функции h , приведенный на рис. 13, на котором нарушается свойство $h \in U(i)$.

На рис. 13 $s_1 \neq s_2$. Если $l_1 \neq l_2$, то $h_1 \notin U(i)$; если $l_1 = l_2$, то $h_2 \notin U(i)$. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. Пусть a -функция h получена из a -функции g операцией обратной связи и $h \notin U(i)$ для некоторого i , тогда $g \notin U(i)$.

Доказательство. Пусть фрагмент a -функции h (см. рис. 3) получился при операции обратной связи из фрагмента a -функции g (см. рис. 14).

Здесь $d \neq d'$. Если $e_3 = e_4$, то $g \notin U(i)$. Предположим, что $e_3 \neq e_4$, тогда по определению обратной связи $e_3 = e_3''$ и, значит, по сигналу (c, e_4) в состояниях p и r будут получаться разные выходные буквы (d'', e_3) и (d', e_4) . Значит, $g \notin U(i)$.

Предложение 7 доказано.

Доказательство леммы 3. Докажем достаточность.

Рис. 14.

Зафиксируем $i > N$. Выберем в графе $\hat{I}_f$ i -й информационный цикл длины p . По предложению 1 в графе $(I_f)^l$ для некоторого l существует i -й информационный цикл длины p , j -я проекция которого имеет метки $x_{ij}^1, \dots, x_{ij}^p$, $j = 1, 2, \dots, l$, причем

$$\begin{aligned} 2 \max_j x_{ij}^1 &= 1, & \max_j x_{ij}^2 &= 2, \\ \max_j x_{ij}^s &\neq 1, & s &= 3, 4, \dots, p. \end{aligned}$$

По предложению 2 найдется одноместная а.-функция $g_{ij} \in [\mathbf{K} \cup \{f, f_{sh}\}]$, в информационном графе которой существует приведенный цикл с теми же метками $x_{ij}^1, \dots, x_{ij}^p$, $j = 1, 2, \dots, l$ (см. рис. 1). Пусть

$$\{j \mid x_{ij}^s = 1\} = \varepsilon_i(s), \quad 1 \leq s \leq p.$$

Из определения информационного цикла следует, что при $s > 2$, $\varepsilon_i(s) \neq \emptyset$, или при $s = 2$ существует натуральное $\xi_i(s)$ такое, что $x_{i, \xi_i(s)}^s = 2$. Рассмотрим схему, приведенную на рис. 15, где H_1 и H_2 — булевы вектор-функции

$$H_1(z_1, z_2, s) = (x_1, x_2, \dots, x_l), \quad H_2(y_1, y_2, \dots, y_l, s) = (u, v),$$

в задании которых

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} y_{\xi_i(2)} & \text{при } s = 2, \\ y_{\xi_i(s)} & \text{при } \varepsilon_i(s) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{при } \varepsilon_i(s) = \emptyset, \end{cases} \\ v &= \begin{cases} y_{\xi_i(2)} & \text{при } s = 2, \\ 0 & \text{при } s \neq 2, \end{cases} \\ x_j &= \begin{cases} z_1 & \text{при } j = \xi_i(2), \quad s = 2, \\ z_1 & \text{при } j \in \varepsilon_i(s), \quad s > 2, \quad \varepsilon_i(s) \neq \emptyset, \\ z_2 & \text{при } j \in \varepsilon_i(s), \quad s = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

А.-функции $B_{0,p}, g_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, l$, — муровские, следовательно, применима операция обратной связи. Каждая из а.-функций g_{ij} имеет диаграмму, указанную на рис. 16, с

Рис. 15.

Рис. 16.

той лишь разницей, что для метки $x_{ij}^s = 1$ переход не является безусловным. Схема на рис. 15 реализует а.-функцию $f_{p,i}$ с диаграммой, приведенной на рис. 16. Без ограничения общности можно выбрать длину цикла p , не зависящей от i . В самом деле, к каждой ветви i -го цикла можно добавить верхнюю ветвь, взятую произвольное число раз, тем самым, выбрать p кратным длинам всех i -х информационных циклов, где $\rho \leq i \leq 2\rho$. Для каждого $i < N$ по условию леммы 3 $f \notin U(i)$, значит, в силу предложения 2 найдется а.-функция $g_i \in \{\{f, f_{sh}\}, \mathbf{K}\}$, имеющая i -й приведенный фрагмент. Тогда схема на рис. 1 есть задержка G . Здесь а.-функция $D: (E_2^{N+p})^* \rightarrow E_2^*$, имеет диаграмму, изображенную на рис. 18. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть $\{\{f, f_{sh}\}\} \supseteq \mathbf{K}$ и $\{\{f, f_{sh}\}\} \ni G$. Покажем, что $f \notin U(i)$ для любого натурального i . В самом деле, $G \notin U(i)$, и если G получена некоторой схемой h , последняя операция которой есть суперпозиция двух функций h_1, h_2 , то по

Рис. 17.

Рис. 18.

предложению 7 $h_1 \notin U(i)$ или $h_2 \notin U(i)$. Если последняя операция указанной схемы — операция обратной связи, то а.-функция g , из которой получена G , по предложению 7, обладает тем же свойством: $g \notin U(i)$. Применяя эти рассуждения к одной из подходящих а.-функций g, h_1, h_2 , мы через конечное число шагов (равное числу операций в указанной схеме) придем к тому что $f \notin U(i)$, потому что $f_{sh} \in U(i)$, при всех i .

По предложению 3 найдется такое N , что в схеме h , где $h = g$, для любого $i > N$ в графе I_h имеется i -й информационный цикл. Если h получилась операцией суперпозиции из а.-функций h_1, h_2 , то согласно предложению 4 в графе $I_{h_1} \times I_{h_2}$ имеется i -й информационный цикл. Если h получилась из g операцией обратной связи, то согласно предложению 5, в I_g имеется i -й информационный цикл. Поскольку в графе $I_{f_{sh}}$ нет i -х информационных циклов при всех i , получаем, что i -й информационный цикл найдется в графе $(I_f)^l$ для некоторого l . По предложению 1 отсюда следует, что в графе $\hat{I}_f$ также имеется i -й информационный цикл. Необходимость доказана. Лемма 3 доказана.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. *Докл. АН СССР* (1963) **151**, №3, 493–496.
2. Кратко М. И., Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. *Докл. ДАН СССР* (1964) **155**, №1, 35–37.
3. Летичевский А. А., Условия полноты для конечных автоматов. *Вычисл. матем. и матем. физика* (1961), №4, 702–710.
4. Бабин Д. Н., Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций. *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 41–56.
5. Бабин Д. Н., О разрешимости проблемы полноты для специальных систем автоматных функций. *Дискретная математика* (1996) **8**, №4, 79–91.
6. Бабин Д. Н., Алгоритмическая разрешимость свойств полноты и A -полноты конечных систем автоматных функций с линейной истинностной частью. *Интеллектуальные системы* (1998) **3**, 51–69.
7. Бабин Д. Н., Конечность множества автоматных базисов Поста с разрешимой проблемой полноты. *Дискретная математика* (1998) **10**, №3, 57–64.

Статья поступила 11.10.2002.