Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Быченкова, Оптимальный по порядку метод синтеза одного поискового оператора в классе автоматных схем специального вида, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 1, 131–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 07:00:13

Оптимальный по порядку метод синтеза одного поискового оператора в классе автоматных схем специального вида

© 2003 г. Е. С. Быченкова

В работе рассматривается задача синтеза операторов метрической близости на n -мерном булевом кубе в классе автоматных схем специального вида. Исследованы две сложные характеристики: пространственная (число элементов схемы) и временная (время вычислений, осуществляемых схемой). Предложен метод синтеза схем, реализующих данные операторы, имеющих константное время работы и оптимальное по порядку число элементов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00748.

1. Введение

В работе рассматривается задача синтеза функций из класса

$$\mathcal{K} = \{f_{\bar{y}}: B_2^n \rightarrow \{0, 1\}, \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in B_2^n\},$$

где

$$f_{\bar{y}}(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } R(\bar{y}, \bar{x}) \leq 1 \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
$$R(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

— расстояние по Хэммингу между точками

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B_2^n,$$
$$\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in B_2^n.$$

Эти функции будем называть функциями (или операторами) метрической близости.

В настоящее время существует много различных моделей интегральных схем. Наиболее популярные из них — автоматные схемы [1], прямоугольные логические сети [2],

Рис. 1. Условные обозначения базисных элементов

схемы из функциональных элементов [3] и координатная модель [4]. В данной работе предлагается модель схем, заданных структурными автоматами специального вида. Однако приведенная здесь модель отличается от перечисленных выше. В автоматной модели считается, что задержки задерживают сигнал на один такт, а элементы, реализующие логические функции, вычисляются мгновенно. Реально логические элементы работают не мгновенно. Правильное значение на выходе появляется лишь через некоторое время после того, как значения на входах установятся. Это время называется задержкой логического элемента и обычно равно некоторой доле такта. В предложенной модели рассматривается худший случай, то есть предполагается, что задержка одна и та же для всех элементов и равна одному такту. Существенное ограничение на схемы дает тот факт, что реально задержки элементов не одинаковы, а зависят от того, на сколько различных входов элементов подаются их выходы. Чем больше разветвляется выход элемента, тем больше его задержка. Поэтому будем считать, что провод в схеме можно ветвить не более двух раз, если же понадобится подать выходной сигнал какого-нибудь элемента на более, чем два различных входа элементов, то будем использовать буферы, которые раздваивают сигнал и имеют задержку один такт. В работе исследовались две сложностные характеристики: пространственная (число элементов схемы) и временная (время вычислений, осуществляемых схемой). Получен метод синтеза функций из класса $\mathcal{K}$ схемами, имеющими константную задержку и оптимальное по порядку число элементов.

Автор выражает благодарность Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе, а также В. С. Половникову за полезные советы.

2. Понятия, обозначения, основные результаты

Будем рассматривать конечно-автоматные схемы, построенные из элементов, изображенных на рис. 1. Это множество элементов будем называть базисом и обозначать через F . Базис состоит из двух элементов конъюнкции с нулевым и единичным начальным состоянием соответственно (a), (b), двух элементов дизъюнкции с нулевым и единичным начальным состоянием (c), (d), двух элементов отрицания с нулевым и единичным начальным состоянием (e), (f), двух буферов (реализующих тождественную функцию) с нулевым и единичным начальным состоянием (g), (h), элемента задержки на один такт с нулевым начальным состоянием (i) и элемента задержки на один такт с единичным начальным состоянием (j). Элементы базиса рассматриваются как конечные автоматы с

двумя внутренними состояниями. Автоматная схема (в дальнейшем — схема) над F определяется стандартным образом (см. [1]) с тем отличием, что все логические элементы имеют задержку в один такт и выходы всех элементов, кроме буферов, могут подаваться не более, чем на два входа других элементов, а выходы буферов — не более, чем на четыре входа.

Будем говорить, что схема Σ вычисляет о.-д. функцию f с задержкой $T(\Sigma)$, если

$$f_{\Sigma} = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{T(\Sigma)}} f,$$

где $i_1, i_2, \dots, i_{T(\Sigma)} \in \{0, 1\}$,

$$S_0(x_1, x_2, \dots, x_s, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_s, \dots),$$

$$S_1(x_1, x_2, \dots, x_s, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots, x_s, \dots),$$

— операторы сдвига, f_{Σ} — о.-д. функция, реализуемая схемой Σ .

В дальнейшем величину $T(\Sigma)$ будем называть временем работы (временем вычисления) схемы Σ .

Сложностью схемы Σ назовем число ее элементов и обозначим это число $L(\Sigma)$.

Для реализации оператора $f_{\bar{y}}$ будем рассматривать схемы с одним входом и одним выходом. Будем говорить, что схема Σ реализует оператор $f_{\bar{y}}$ с задержкой $T(\Sigma)$, если для любого $l \in \mathbb{N}$ и любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_l$, где $\bar{x}_i = (x_1^i, \dots, x_n^i) \in B_2^n$, $i = 1, \dots, l$, схема Σ преобразует входную последовательность

$$x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, \dots, x_n^2, \dots, x_1^l, \dots, x_n^l$$

в выходную последовательность

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{T(\Sigma)+n-1}, \underbrace{z(\bar{x}_1)}_{n-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \underbrace{z(\bar{x}_2)}_{n-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \underbrace{z(\bar{x}_l)}_{n-1},$$

где

$$z(\bar{x}_i) = 1 \iff R(\bar{x}_i, \bar{y}) \leq 1, \quad i = 1, \dots, l.$$

Справедливы следующие теоремы 1 и 2, в которых даются верхняя и нижняя оценки сложности, и следствие 1, указывающее порядок сложности.

Теорема 1. Существует метод синтеза, который для любого $\bar{y} \in B_2^n$ позволяет построить над базисом F схему $\Sigma_{\bar{y}}$, реализующую оператор $f_{\bar{y}}$, причем

$$T(\Sigma_{\bar{y}}) = 10$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$L(\Sigma_{\bar{y}}) \lesssim \frac{20n}{3 \log_2 n}.$$

Положим

$$L(\bar{y}) = \min_{\Sigma \in \mathcal{S}_{\bar{y}}} L(\Sigma), \quad L(n) = \max_{\bar{y} \in B_2^n} L(\bar{y}),$$

где $\mathcal{S}_{\bar{y}}$ — множество схем, реализующих оператор $f_{\bar{y}}$.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$

$$L(n) \gtrsim \frac{n}{2 \log_2 n}.$$

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$

$$L(n) \asymp \frac{n}{\log_2 n}.$$

сложения по модулю 2. Сложность этого элемента равна 5, а время вычислений (суммарная задержка) равна 3.

Теперь рассмотрим схему, которую будем называть удваивателем и обозначать $\Sigma_{\times 2}$. Ее реализация показана на рис. 3. Удваиватель преобразует входную последовательность с периодом $2T$, $T \geq 2$, вида

$$\underbrace{0, \dots, 0}_T, \underbrace{1, \dots, 1}_T, \underbrace{0, \dots, 0}_T, \underbrace{1, \dots, 1}_T, \dots$$

в последовательность той же структуры с периодом $4T$ (то есть удваивает период)

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{2T}, \underbrace{1, \dots, 1}_{2T}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2T}, \underbrace{1, \dots, 1}_{2T}, \dots$$

Сложность удваивателя

$$L(\Sigma_{\times 2}) = 22,$$

а время вычислений

$$T(\Sigma_{\times 2}) = 9.$$

Удваиватель понадобится для построения схемы Σ_{count} без входов и с $p = \lfloor \log_2 n \rfloor$ выходами, результатом работы которой являются периодически повторяющиеся двоичные записи чисел от 0 до $2^p - 1$. Чтобы реализовать Σ_{count} сначала получим последовательности $(p), (p-1), \dots, (3), (2), (1)$, изображенные на рис. 4 ($p \geq 5$). Задержав каждую i -ю, $i \geq 5$, последовательность на $9(p-i)$ такта (то есть присоединив к ее выходу $9(p-i)$ единичных задержек с нулевым начальным состоянием), а первые 4 последовательности на $9(p-5)$ такта, получим схему Σ_{count} . Сложность схемы Σ_{count} равна

$$\begin{aligned} L(\Sigma_{\text{count}}) &= 2 + 4 + 8 + 16 + (p-4)L(\Sigma_{\times 2}) + 9(1 + 2 + \dots + (p-5)) + 4(p-5) \\ &= \frac{9}{2}p^2 - \frac{31}{2}p - 189 \end{aligned}$$

и при $n \rightarrow \infty$

$$L(\Sigma_{\text{count}}) = O(p^2) = O(\log^2 n).$$

Заметим, что схема Σ_{count} не сразу начнет работать как надо, сначала она даст $9(p-5)$ лишних нулевых строк. В случае $p \leq 5$ для построения Σ_{count} достаточно взять последовательности $1, \dots, p$, и схема Σ_{count} будет работать без задержки.

Также нам потребуются

- (1) элемент Mc_α , $\alpha = 0, 1$, изображенный на рисунке 5(a), на выходах которого реализуется константа α ;
- (2) элемент Mr_β , $\beta = 0, 1$, изображенный на рис. 5(b), функционирование которого заключается в следующем: пока на вход подаются нули, на всех выходах реализуется константа β , если на вход подать четыре подряд единицы, то через 6 тактов на всех выходах значение сменится на противоположное $\bar{\beta}$;

Рис. 3. Схема $\Sigma \times 2$

Рис. 4. Последовательности для Σ_{count}

- (3) схема Σ_{compare} , изображенная на рис. 6(b), у нее $2p$ входов и один выход, ее работа заключается в сравнении двух наборов длины p , один из которых подается на нечетные входы, а другой на четные, на выходе схемы Σ_{compare} появляется 1, если наборы совпадают, и 0 в противном случае; время вычислений схемы

$$T(\Sigma_{\text{compare}}) = 3 + \lceil \log_2 p \rceil,$$

а сложность

$$L(\Sigma_{\text{compare}}) = 5p + p + \lceil p/2 \rceil + \dots + 1 = O(p);$$

- (4) схема $\Sigma_{\times 4}$, изображенная на рис. 7, которая учетверяет единицу, то есть если на вход подается последовательность вида $0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots$, то на выходе схемы $\Sigma_{\times 4}$ будет последовательность $0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0, \dots$. Сложность схемы

$$L(\Sigma_{\times 4}) = 7,$$

задержка

$$T(\Sigma_{\times 4}) = 3;$$

- (5) схема D_p , изображенная на рис. 8, она разветвляет вход на p выходов, сложность схемы

$$L(D_p) = O(p),$$

Рис. 5. Реализация элементов $M_{C\alpha}$ (a) и $M_{r\beta}$ (b)

задержка

$$T(D_p) = \lceil \log_4 p \rceil;$$

- (6) схема $\Sigma_{\oplus}$, изображенная на рис. 10, эта схема реализует часть алгоритма сложения столбиком по модулю 2^p двух чисел, заданных в двоичной системе счисления, а именно, вычисляется точка, схема Σ_{point} на рис. 9, сложность которой

$$L(\Sigma_{\text{point}}) = 7,$$

а задержка

$$T(\Sigma_{\text{point}}) = 4,$$

и прибавляется к α_i , $i = 2, \dots, p$, на i -м выходе появляется 1 тогда и только тогда, когда i -я компонента в двоичной записи результата сложения чисел $\sum_{i=0}^{p-1} 2^i \alpha_{i+1}$, $\sum_{i=0}^{p-1} 2^i \beta_{i+1}$ отличается от β_i ; сложность

$$L(\Sigma_{\oplus}) = O(p),$$

Рис. 6. Элемент, реализующий эквивалентность (а) и схема $\Sigma_{compare}$ (b)

задержка

$$T(\Sigma_{\oplus}) = 4p - 3.$$

Требуемая схема Σ_n изображена на рис. 11. Опишем ее работу.
Пусть

$$n = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i \alpha_{i+1},$$

$$n' = n - 1 - T(\Sigma_{count}) - T(\Sigma_{compare}) = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i \beta_{i+1},$$

в элементах $Mc_{\alpha_1}, \dots, Mc_{\alpha_p}$ будут храниться соответственно $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, а в элементы $Mr_{\beta_1}, \dots, Mr_{\beta_p}$ в начальный момент записаны соответственно $\beta_1, \dots, \beta_p$. На выходах схемы Σ_{count} получается двоичная запись некоторого числа, эта запись посредством схемы

Рис. 7. Схема $\Sigma_{\times 4}$

Σ_{compare} сравнивается с двоичной записью числа, запись которого хранится в элементах $Mr_{\beta_1}, \dots, Mr_{\beta_p}$, в результате на выходе Σ_{compare} получается 1 тогда и только тогда, когда эти числа совпадают. Далее, в схеме $\Sigma_{\oplus}$ выполняется сложение по модулю 2^p числа, запись которого хранится в $Mr_{\beta_1}, \dots, Mr_{\beta_p}$, с n (то есть с числом, запись которого хранится в $Mc_{\alpha_1}, \dots, Mc_{\alpha_p}$). Результат этого сложения должен записаться в элементы $Mr_{\beta_1}, \dots, Mr_{\beta_p}$. У схемы $\Sigma_{\oplus}$ имеется p выходов и на i -м выходе, $i = 1, \dots, p$, появляется 1, если значение, хранящееся в Mr_{β_i} , в результате сложения должно измениться, и 0 в противном случае. Так как значение числа, хранящегося в $Mr_{\beta_1}, \dots, Mr_{\beta_p}$, нужно менять после того, как оно появилось на выходе Σ_{count} , выходы $\Sigma_{\oplus}$ нужно пропустить через конъюнкции с выходом схемы Σ_{compare} , но каждый элемент Mr_{β_i} , $i = 1, \dots, p$, имеет задержку 4, поэтому чтобы изменить хранящееся в нем значение нужно подать на вход Mr_{β_i} четыре 1 подряд, для этого и нужна схема $\Sigma_{\times 4}$. Схема D_p разветвляет выход схемы $\Sigma_{\times 4}$ на p выходов. Выходом схемы Σ_n является выход схемы Σ_{compare} . Сложности всех входящих в Σ_n схем равны

$$\begin{aligned}
 L(\Sigma_{\text{count}}) &= O(p^2) = O(\log^2 n), \\
 L(\Sigma_{\text{compare}}) &= O(p) = O(\log n), \\
 L(Mr_{\beta_i}) &= 6, & i = 1, \dots, p,
 \end{aligned}$$

 Рис. 8. Схема D_p

$$\begin{aligned}
 L(Mc_{\alpha_i}) &= 2, & i &= 1, \dots, p, \\
 L(\Sigma_{\oplus}) &= O(p) = O(\log n), \\
 L(\Sigma_{\times 4}) &= 7, \\
 L(D_p) &= O(p) = O(\log n).
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$L(\Sigma_n) = O(\log^2 n).$$

Схема Σ_n работает корректно при $n \geq 24$, это условие вытекает из следующих соображений: в Mr должны установиться правильные значения за время, не больше n тактов, то есть

$$n \geq T(\Sigma_{\text{compare}}) + L(\Sigma_{\times 4}) + T(D_p) + 5,$$

на выходах схемы $\Sigma_{\oplus}$ значения должны появиться до того, как появятся очередные 1 на выходах D_p , то есть

$$n \geq T(\Sigma_{\oplus}) + 7.$$

При $n < 24$, чтобы получить последовательность

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \dots,$$

Рис. 9. Схема Σ_{point} Рис. 10. Схема $\Sigma_{\oplus}$

Рис. 11. Схема Σ_n

Рис. 12. Схема, реализующая последовательность из леммы 1 при $n < 24$

воспользуемся схемой, изображенной на рис. 12.

Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Из доказательства леммы 1 видно, что таким же способом можно построить схему Σ , реализующую последовательность

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1-l}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \dots$$

такую, что $L(\Sigma) = O(\log^2 n)$. Для этого достаточно в элементах $Mr_{\beta_1}, \dots, Mr_{\beta_p}$ хранить в начальный момент число $n' - l$.

Лемма 2. Любую схему без входов можно инициализировать так, чтобы ее задержка была нулевой.

Доказательство. Пусть дана схема без входов Σ с ненулевой задержкой $T(\Sigma)$. Тогда, изменив начальное состояние схемы Σ на состояние, в котором данная схема находится после $T(\Sigma)$ -го такта, получим требуемую схему. Таким образом, лемма 2 доказана.

Лемма 3. Над базисом F можно построить схему Σ'_n без входов и с одним выходом, результатом работы которой является периодическая последовательность

$$1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \dots,$$

такую, что

$$L(\Sigma'_n) = O(\log^2 n).$$

Доказательство. Требуемая схема Σ'_n изображена на рис. 13, где схема Σ_n — схема из леммы 1. Сложность схемы

$$L(\Sigma'_n) = L(\Sigma_n) + 2 = O(\log^2 n).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Существует метод синтеза, который для каждого $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\bar{y} \in B_2^n$, позволяет построить над F схему $S_{\bar{y}}$ без входов и одним выходом, результатом работы которой является периодическая последовательность $y_1, \dots, y_n, y_1, \dots, y_n, \dots$, причем

$$L(S_{\bar{y}}) \lesssim \frac{20n}{3 \log_2 n}.$$

Доказательство. Сведем доказательство существования метода синтеза, позволяющего для каждого $\bar{y} \in B_2^n$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ построить схему $S_{\bar{y}}$, к доказательству существования метода синтеза, позволяющего для каждой булевой функции $f(x_1, \dots, x_m)$, $m = \lceil \log_2 n \rceil$, построить схему S_f с m входами и одним выходом, которая на выходе выдает значения функции от входов. Допустим, что для каждой булевой функции $f(x_1, \dots, x_m)$ есть схема S_f с m входами и одним выходом, на входы которой поступает m компонент булевого вектора $\bar{x} \in B_2^m$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$, а на выходе получается $f(\bar{x})$. Пусть

$$n - 1 = \sum_{i=1}^m 2^{i-1} \beta_i.$$

 Рис. 13. Схема Σ'_n

Если есть схема S без входов с m выходами, на выходах которой циклически получаются следующие векторы:

$$\begin{aligned}\bar{x}_0 &= (0, 0, \dots, 0, 0, 0), \\ \bar{x}_1 &= (0, 0, \dots, 0, 0, 1), \\ \bar{x}_2 &= (0, 0, \dots, 0, 1, 0), \\ \bar{x}_3 &= (0, 0, \dots, 0, 1, 1), \\ &\dots \\ \bar{x}_{n-1} &= (\beta_m, \beta_{m-1}, \dots, \beta_3, \beta_2, \beta_1),\end{aligned}$$

то, подав ее выходы на входы схемы S_f (см. рис. 14), получим периодическую (с периодом n) последовательность $f(\bar{x}_1), \dots, f(\bar{x}_{n-1})$. То есть, чтобы для $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$ построить схему $S_{\bar{y}}$ без входов и одним выходом, результатом работы которой является периодическая последовательность $y_1, \dots, y_n, y_1, \dots, y_n, \dots$, нужно построить схему S и построить схему S_f , где f такая, что $(f(\bar{x}_1), \dots, f(\bar{x}_{n-1})) = (y_1, \dots, y_n)$.

Построим схему S . Если $n = 2^m$, то в качестве S можно взять построенную при доказательстве леммы 1 схему Σ_{count} (эта схема имеет $p = \lfloor \log_2 n \rfloor = m$ выходов, на которых циклически появляются двоичные записи чисел от 0 до $2^p - 1$). В этом случае сложность $L(S) = O(\log^2 n)$. Если $n < 2^m$, то $m = p$, для построения схемы S нам потребуются построенные при доказательстве леммы 1 схемы Σ_{count} , p элементов $Mr_0, Mc_{\alpha_1}, \dots, Mc_{\alpha_p}, \Sigma_{\oplus}, \Sigma_{\times 4}, D_p$. В элементах $Mc_{\alpha_1}, \dots, Mc_{\alpha_p}$ постоянно хранится двоичная запись числа

$$n = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i \alpha_{i+1},$$

Рис. 14. Схема $S_{\bar{y}}$

считаем, что Σ_{count} уже инициализирована, то есть работает сразу правильно. Нам также понадобятся схема Σ''_n без входов и одним выходом, реализующая последовательность

$$\underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0, 0, 0}_{n-T(\Sigma_{\times 4})-T(D_p)-1-T(Mr_i)=n-1} \log_4 p[-8] \quad \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-1} \quad \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-1} \quad \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-1} \quad 1, \dots$$

она существует и в силу замечания 1 после леммы 1 ее сложность равна

$$L(\Sigma''_n) = O(\log^2 n),$$

а также схема $\Sigma_{\ominus}$ (см. рис. 16), которая вычитает по модулю 2^p одно число из другого (числа записаны в двоичной системе счисления и реализуется алгоритм вычитания столбиком). Схема $\Sigma_{\ominus}$ имеет $2p$ входов и p выходов, ее сложность

$$L(\Sigma_{\ominus}) = O(p^2) = O(\log^2 n).$$

Реализация схемы S показана на рис. 17. В этом случае также $L(S) = O(\log^2 n)$.

Теперь построим схему S_f . Для этого воспользуемся предложенным О. Б. Лупановым методом синтеза схем из функциональных элементов [3], который нам нужно немного модифицировать в связи с отличием нашей модели от схем из функциональных элементов. Пусть $f(x_1, \dots, x_m)$ — произвольная функция от m аргументов. Рассмотрим ее первое представление (определение первого представления булевой функции см. в [3])

$$f = \bigvee_{i=1}^t \bigvee_{\tilde{\tau}} f_{(i, \tilde{\tau})}^{(1)}(x_1, \dots, x_{m-k}) \& f_{(i, \tilde{\tau})}^{(2)}(x_{m-k+1}, \dots, x_m), \quad t \leq 2^k/s + 1,$$

k и s — параметры этого представления. Функции $f_{(i, \tilde{\tau})}^{(1)}$, $f_{(i, \tilde{\tau})}^{(2)}$ обладают следующими свойствами:

- $f_{(i, \tilde{\tau}_1)}^{(1)} \& f_{(i, \tilde{\tau}_2)}^{(2)} = 0$ при $\tilde{\tau}_1 \neq \tilde{\tau}_2$;
- каждая функция $f_{(i, \tilde{\tau})}^{(2)}(x_{m-k+1}, \dots, x_m)$ обращается в единицу не более чем на s наборах значений своих аргументов.

 Рис. 15. Схема Σ'_{point}

Схема S_f для функции f будет строиться из блоков A, B, C, D, G, F (соединение блоков условно показано на рис. 18).

Блок A реализует систему всех конъюнкций $x_1^{\sigma_1} \dots x_{m-k}^{\sigma_{m-k}}$. Для реализации отрицаний $\bar{x}_l, 1 \leq l \leq m-k$, требуется $m-k$ элементов отрицания; для реализации $x_l, 1 \leq l \leq m-k$, требуется $m-k$ задержек; для того, чтобы разветвить каждый $\bar{x}_l$ и $x_l, 1 \leq l \leq m-k$, на 2^{m-k-1} выходов, нужно не более 2^{m-k-1} буферов; для реализации каждой конъюнкции нужно еще не более $2(m-k)$ элементов конъюнкции и задержки. Поэтому

$$L(A) \leq 2(m-k) + 2^{m-k}(m-k) + 2 \cdot 2^{m-k}(m-k) \leq (m-k)(2 + 3 \cdot 2^{m-k}).$$

Задержка разветвления равна $\lceil (m-k-1)/2 \rceil$, задержка получения каждой конъюнкции равна $\lceil \log_2(m-k) \rceil$, поэтому

$$T(A) = 1 + \lceil (m-k-1)/2 \rceil + \lceil \log_2(m-k) \rceil.$$

Блок B реализует систему всех конъюнкций $x_{m-k+1}^{\sigma_{m-k+1}} \dots x_m^{\sigma_m}$,

$$L(B) \leq k(2 + 3 \cdot 2^k), \quad T(B) = 1 + \lceil (k-1)/2 \rceil + \lceil \log_2 k \rceil.$$

Рис. 17. Схема S

$$\left\lfloor \frac{\lceil \log_2 t \rceil}{2} \right\rfloor + (m - k - s) \leq T(C) \leq \left\lceil \frac{\lceil \log_2 t \rceil}{2} \right\rceil + (m - k).$$

Блок D реализует все функции $f_{(i, \tilde{\tau})}^{(2)}(x_{m-k+1}, \dots, x_m)$, исходя из конъюнкций $x_{m-k+1}^{\sigma_{m-k+1}} \dots x_m^{\sigma_m}$. Если $f_{(i, \tilde{\tau})}^{(2)} \equiv 0$, то эта функция реализуется, например, как $(\bar{x}_{m-k+1} \dots \bar{x}_m)(x_{m-k+1} \dots x_m)$ с использованием одного элемента конъюнкции. В остальных случаях — как дизъюнкция не более s конъюнкций $x_{m-k+1}^{\sigma_{m-k+1}} \dots x_m^{\sigma_m}$ (см. второе свойство) с использованием не более $2s + \lceil \log_2 s \rceil$ элементов дизъюнкции и задержки. Каждую поступающую в блок D конъюнкцию $x_{m-k+1}^{\sigma_{m-k+1}} \dots x_m^{\sigma_m}$ нужно разветвить, для этого всего понадобится не более $2ts2^s + 2^s(s + k)$ буферов и задержек. Поэтому

$$\begin{aligned} L(D) &\leq 2^s t (2s + \lceil \log_2 s \rceil) + 2^s (s + k + 2ts) \leq 2^s (6ts + s + k) \\ &\leq 2^s (6s(2^k/s + 1) + s + k), \\ \lceil \log_2 s \rceil + 1 &\leq T(D) \leq \lceil \log_2 s \rceil + \lceil \log_2 t \rceil / 2 + \lceil s/2 \rceil + 2. \end{aligned}$$

Рис. 18. Схема S_f

Блок G реализует конъюнкции $f_{(i,\tilde{\tau})}^{(1)}$ & $f_{(i,\tilde{\tau})}^{(2)}$. Поэтому

$$L(G) \leq 2^s \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right).$$

Блок F реализует функцию f как дизъюнкцию конъюнкций $f_{(i,\tilde{\tau})}^{(1)}$ & $f_{(i,\tilde{\tau})}^{(2)}$, поэтому

$$L(F) \leq 2 \cdot 2^s \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right).$$

Чтобы результаты работы блоков C и D одновременно пришли в блок G необходимо еще не более

$$2^s \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right) |T(A) + T(C) - T(B) - T(D)|$$

элементов задержки. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 L(S_f) &= L(A) + L(B) + L(C) + L(D) + L(G) + L(F) \\
 &\quad + 2^s \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right) |T(A) + T(C) - T(B) - T(D)| \\
 &\leq (m-k)(2 + 3 \cdot 2^{m-k}) + k(2 + 3 \cdot 2^k) + \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right) \left(\frac{10}{3} 2^{m-k} + (2^s - 1)(m-k) \right) \\
 &\quad + 2^s \left(6s \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right) + s + k \right) + 2^s \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right) + 2 \cdot 2^s \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right) + 2^s \left(\frac{2^k}{s} + 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\times \max \left\{ \frac{2}{3}m - 2k + \log_2 \frac{m}{k} + 2 + \lceil \log_2(2^k/s + 1) \rceil - \lfloor \log_2 s \rfloor, \right. \\ \left. s - \frac{3}{2}m + 2k + \log_2 \frac{k}{m-k} + \lceil \log_2 s \rceil + \lfloor s/2 \rfloor + 4 \right\}.$$

Положим $k = \lfloor 3 \log_2 m \rfloor$, $s = \lfloor m - 5 \log_2 m \rfloor$. Тогда

$$(m-k)(2+3 \cdot 2^{m-k}) \leq \frac{2^{m+4}}{m^2}, \quad k(2+3 \cdot 2^k) \leq 18(\log_2 m)m^3, \\ \frac{2^k}{s} + 1 = \frac{2^k}{s} \left(1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right).$$

Поэтому

$$L(S_f) \leq \frac{10}{3} \frac{2^m}{s} \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right) = \frac{10}{3} \frac{2^m}{m} \left(1 + O\left(\frac{\log m}{m}\right) \right).$$

Так как $m = \lfloor \log_2 n \rfloor$, справедлива оценка

$$L(S_f) \lesssim \frac{20n}{3 \log_2 n}.$$

Итак,

$$L(S_{\bar{y}}) = L(S) + L(S_f) \lesssim \frac{20n}{3 \log_2 n}.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Нам потребуются следующие схемы Σ_1 и Σ_2 .

Схема Σ_1 , имеющая три входа и один выход, изображена на рис. 19; на вход I подается последовательность

$$I: 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \dots,$$

а на вход II — последовательность

$$II: 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \dots$$

В результате схема будет работать так, как показано в табл. 1. Заметим, что если к входу схемы Σ_1 присоединить выход некоторой схемы Σ такой, что $T(\Sigma) = t$, то к последовательностям I и II нужно добавить вначале лишние t единиц. Время и сложность схемы Σ_1 следующие:

$$T(\Sigma_1) = 2, \quad L(\Sigma_1) = 6.$$

Вторая схема — схема Σ_2 , изображена на рис. 20. На вход I подается последовательность

$$I: 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \dots,$$

Рис. 19. Схема Σ_1

Таблица 1. Результат работы схемы Σ_1

ВХОД	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
ВЫХОД	1	1	x_1	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3 x_4$	...	$x_1 \dots x_{n-4}$	$x_1 \dots x_{n-3}$	$x_1 \dots x_{n-2}$
ВХОД	x_{n+1}		x_{n+2}		x_{n+3}		x_{n+4}		x_{n+5}	...
ВЫХОД	$x_1 \dots x_{n-1}$		$x_1 \dots x_n$		$x_{n+1} x_n x_{n-2} x_{n-4} \dots$		$x_{n+1} x_{n+2}$		$x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3}$	...

Таблица 2. Результат работы схемы Σ_2

ВХОД	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
ВЫХОД	1	1	1	1	x_1	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 x_3$	...	$x_1 \dots x_{n-6}$	$x_1 \dots x_{n-5}$	$x_1 \dots x_{n-4}$
ВХОД	x_{n+1}		x_{n+2}		x_{n+3}		x_{n+4}	x_{n+5}	x_{n+6}	...	
ВЫХОД	$x_1 \dots x_{n-3}$		$x_1 \dots x_{n-2}$		$x_1 \dots x_{n-1}$		1	x_{n+1}	$x_{n+1} x_{n+2}$	...

Рис. 20. Схема Σ_2

на вход II — последовательность

$$\text{II: } 1, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 1, 1, \dots,$$

а на вход III — последовательность

$$\text{III: } 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, \dots$$

В результате схема будет преобразовывать оставшийся вход так, как показано в табл. 2. Как и для схемы Σ_1 , если к входу схемы Σ_2 присоединить выход некоторой схемы Σ

Рис. 21. Схема $\Sigma_{\bar{y}}$

такой, что $T(\Sigma) = t$, то к последовательностям I, II и III нужно добавить вначале лишние t единиц. Время и сложность схемы Σ_2 равны

$$T(\Sigma_2) = 4, \quad L(\Sigma_2) = L(\Sigma_1) + 4 = 10.$$

Строим схему $\Sigma_{\bar{y}}$, решающую задачу информационного поиска $I = \langle B_2^n, V, \rho_m \rangle$,

$V = \{\bar{y}\}$. Ее реализация показана на рис. 21. Сложность этой схемы равна

$$L(\Sigma_{\bar{y}}) = L(S_{\bar{y}}) + 2L(\Sigma_n) + 2L(\Sigma'_n) + L(\Sigma_1) + L(\Sigma_2) + 34.$$

Как доказано в лемме 4,

$$L(S_{\bar{y}}) = L(S) + L(S_f) \lesssim \frac{20n}{3 \log_2 n}.$$

Остальные слагаемые имеют меньший порядок по n : $L(\Sigma_n) = O(\log^2 n)$ по лемме 1 и $L(\Sigma'_n) = O(\log^2 n)$ согласно лемме 3. Таким образом,

$$L(\Sigma_{\bar{y}}) \lesssim \frac{20n}{3 \log_2 n}.$$

Время вычислений схемы $\Sigma_{\bar{y}}$

$$T(\Sigma_{\bar{y}}) = 10.$$

Теорема 1 доказана.

4. Нижняя оценка сложности

Для получения нижней оценки функции $L(n)$ воспользуемся стандартным мощностным соображением.

Пусть $S(n, h)$ — число различных схем с одним входом и одним выходом сложности, не большей h , решающих задачу. Очевидны две следующие леммы.

Лемма 5. Если для некоторого $h(n)$

$$S(n, h(n)) < 2^n, \quad (1)$$

то $L(n) > h(n)$.

Лемма 6. Если для некоторой функции $h(n)$

$$\frac{S(n, h(n))}{2^n} \rightarrow 0, \quad (2)$$

то $L(n) > h(n)$, начиная с некоторого n , причем число задач, для которых $L(\bar{y}) \leq h(n)$, стремится к нулю с ростом n .

Таким образом, задача получения нижней оценки для функции $L(n)$ сводится, во-первых, к получению верхней оценки функции $S(n, h)$ и, во-вторых, к подбору функции $h(n)$, удовлетворяющей условию 1 (или 2).

Доказательство теоремы 2. Пусть дано s входов $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$, p выходов $z_{i_1}, \dots, z_{i_p}$ и r элементов $F_1, \dots, F_r$. Соединением S (см., например, [5]) данных входов, выходов и элементов называется геометрическая фигура, состоящая из этих объектов и обладающая следующими свойствами:

- каждый вход элементов подключен либо к входу, либо к выходу элемента;
- каждый выход подключен либо к входу, либо к выходу элемента.

Пусть $S^*(s, p, h)$ — число различных соединений с данными входами $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ и выходами $z_{i_1}, \dots, z_{i_p}$, содержащих h элементов. Известно, что (см. лемму 1 в главе 2 части 4 книги [5])

$$S^*(s, p, h) \leq r^h (n + h)^{hv+p},$$

где $v = \max_{1 \leq i \leq r} n_i$, n_i — число входов элемента F_i , $i = 1, \dots, r$. Тогда

$$S(n, h) \leq S^*(1, 1, h, 10) \leq 10^h (1 + h)^{2h+1} < (ch)^{2h}.$$

Пусть $h = \lfloor (1 - \varepsilon)n / (2 \log_2 n) \rfloor$, $0 < \varepsilon < 1$, тогда

$$S(n, h) \leq \left(c(1 - \varepsilon) \frac{n}{2 \log_2 n} \right)^{(1 - \varepsilon)n / (\log_2 n)}.$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & \log_2 \frac{(c(1 - \varepsilon)n / (2 \log_2 n))^{(1 - \varepsilon)n / \log_2 n}}{2^n} \\ &= (1 - \varepsilon) \frac{n}{\log_2 n} \left(\log_2 \frac{c(1 - \varepsilon)}{2 \log_2 n} + \log_2 n \right) - n \\ &= \frac{n}{\log_2 n} \left((1 - \varepsilon) \log_2 \frac{c(1 - \varepsilon)}{2 \log_2 n} + (1 - \varepsilon) \log_2 n - \log_2 n \right). \end{aligned}$$

Правая часть стремится к $-\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$L(n) > (1 - \varepsilon) \frac{n}{2 \log_2 n}$$

или

$$L(n) \gtrsim \frac{n}{2 \log_2 n}.$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А., *Основы теории однородных структур*. Наука, Москва, 1990.
3. Лупанов О. Б., О синтезе некоторых классов управляющих систем. *Проблемы кибернетики* (1963) **10**, 63–97.
4. Ульман Дж. Д., *Вычислительные аспекты СБИС*. Радио и связь, Москва, 1990.
5. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 26.12.02.