Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Черепнев, Схемы открытого распределения ключей на основе некоммутативной группы, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 2, 47–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:22:01

Схемы открытого распределения ключей на основе некоммутативной группы

© 2003 г. М. А. Черепнев

В статье приведены примеры, в которых реализована высказанная В. М. Сидельниковым идея использовать некоммутативную операцию в схемах открытого распределения ключей.

Большинство известных на сегодняшний момент схем открытого распределения ключей основано на стойкости задачи дискретного логарифмирования.

В [1] В. М. Сидельниковым была высказана альтернативная идея использовать в таких схемах некоммутативную операцию. Однако конкретных примеров операций, которые могли бы обеспечить работу и стойкость системы, найдено не было. В данной статье предложены некоторые такие примеры.

Пусть $(G, *)$ — некоммутативная полугруппа с полиномиально вычислимой ассоциативной операцией $*$ и двумя коммутативными подполугруппами G_1, G_2 , причем элементы из разных подполугрупп между собой не коммутируют. Предложенная в [1] схема вкратце выглядит следующим образом. Абоненты A и B случайным независимым друг от друга образом вырабатывают секретные элементы $a_1 \in G_1, a_2 \in G_2$ и $b_1 \in G_1, b_2 \in G_2$. Затем они передают друг другу по открытому каналу связи произведения $a_1 * a_2$ и $b_1 * b_2$. Общий секретный ключ абоненты A и B вычисляют соответственно по формулам

$$k = a_1 * (b_1 * b_2) * a_2, \quad k = b_1 * (a_1 * a_2) * b_2.$$

Для стойкости этой схемы необходимо, чтобы задача вычисления секретного ключа k по известным произведениям $a_1 * a_2$ и $b_1 * b_2$ не имела для своего решения полиномиального алгоритма. В частности, трудной должна быть задача разложения на множители в полугруппе G .

Пример 1. Пусть

$$a * b = ab \left(\frac{\eta(|a|)}{\mu(|b|)} \right),$$

где a, b состоят из больших простых чисел (чтобы нельзя было быстро разложить их на множители), η, μ — мультипликативные функции натурального аргумента, а скобки обозначают символ Якоби. Ясно, что эта операция может быть выполнена за полиномиальное время и легко проверить, что она удовлетворяет условию ассоциативности, то есть

$$a * (b * c) = \left(\frac{\eta(|a|)}{\mu(|bc|)} \right) a \left(\frac{\eta(|b|)}{\mu(|c|)} \right) bc = \left(\frac{\eta(|ab|)}{\mu(|c|)} \right) abc \left(\frac{\eta(|a|)}{\mu(|b|)} \right) bc = (a * b) * c.$$

Ясно, что секретная часть общего ключа k — это его знак. Однако и он в данном случае может быть вычислен благодаря следующим двум свойствам рассматриваемой операции:

$$a * b \neq b * a \Rightarrow a * b = -b * a, \quad (1)$$

$$a * (-b) = -a * b. \quad (2)$$

Действительно,

$$a_1 * a_2 * (-(b_1 * b_2)) = a_1 * b_1 * a_2 * b_2 = k.$$

Этот недостаток можно преодолевать изменением структуры подполугрупп G_1, G_2 так, чтобы при $a \in G_1$ и $b \in G_2$ по $a * b$ нельзя было за полиномиальное время вычислить знак в равенстве

$$a * b = \pm b * a.$$

Однако мы поступим иначе. Введение обобщенного символа Якоби позволяет увеличить объем секретной части.

Для некоторого простого p пусть $\xi = \exp(2\pi i/p)$. В кольце целых алгебраических чисел $K = \langle 1, \xi, \dots, \xi^{p-2} \rangle_{\mathbb{Z}}$ кругового поля $Q(\xi)$ для простого идеала J пусть $v_J(\cdot)$ — продолжение J -адического нормирования кольца K на $Q(\xi)$, $v_p(\cdot)$ — p -адическое нормирование поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а $N(J) = |(K/J)|$ — норма идеала J . Пусть $\alpha, \gamma \in Q(\xi)$, $v_\lambda(\gamma) = 0$, где $\lambda = 1 - \xi$. Обобщенный символ Якоби степени p определяется (см. [2]) как произведение по всем простым идеалам

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)_p = \prod_{J \nmid p, \alpha} \left(\frac{\alpha}{J} \right)_p^{v_J(\gamma)},$$

где

$$\left(\frac{\alpha}{J} \right)_p = \xi^j \equiv \alpha^{(N(J)-1)/p} \pmod{J}.$$

В частности, при $p = 2$ — это обычный символ Якоби и Лежандра.

Пример 2. Пусть

$$a * b = ab \left(\frac{\eta(|a|)}{\mu(|b|)_p} \right)_p, \quad (3)$$

где $a, b \in Q(\xi)$, а η, μ — мультипликативные функции теперь уже рационального аргумента такие, что $\eta(\xi) = \mu(\xi) = 1$. Ассоциативность этой операции доказывается аналогично тому, как это было сделано в примере 1. Свойство (1) для этой операции не выполняется, а свойство (2) приобретает вид

$$a * (\xi^t b) = \xi^t a * b \quad (4)$$

для любого $t \in \mathbb{N}$.

Свойства обобщенного символа Якоби хорошо известны (см. [2]). В частности, как видно из определения, выполнено свойство мультипликативности по верхнему и нижнему индексам, кроме того, верхний индекс можно брать по модулю нижнего. Выполнен также и закон взаимности, установленный Куммером. В [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 + \lambda^2 u, \quad u \in Q(\xi), \quad v_\lambda(u) \geq 0, \\ \beta &= 1 + \lambda v, \quad v \in Q(\xi), \quad v_\lambda(v) \geq 0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_p \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_p^{-1} &= \xi^{T(\xi \log \alpha \operatorname{Dlog} \beta)/p}, \\ \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)_p &= \xi^{T(\log \alpha)/p},\end{aligned}$$

где T — след $Q_p(\xi)$ над Q_p , Q_p — p -адическое замыкание поля рациональных чисел,

$$\log \alpha = \log(1 + \lambda^2 u) = \lambda^2 u - \frac{(\lambda^2 u)^2}{2} + \frac{(\lambda^2 u)^3}{3} - \dots \in Q_p(\xi),$$

$$\operatorname{Dlog} \beta = \frac{\beta'}{\beta} \in Q_p(\xi),$$

β' — формальная производная по λ .

В [3] доказано следующее утверждение, являющееся следствием теоремы 1.

Следствие 1. Если $p \geq 3$, то

$$\alpha, \beta \in \{1 + x\lambda^{(p+1)/2} \mid x \in Q(\xi), v_\lambda(x) \geq 0\} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_p = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_p.$$

Теперь ясно, что если η, μ принимают значения из $Q(\xi)$, то относительно операции (3) $K \setminus \{0\}$ является, вообще говоря, некоммутативной полугруппой, где 1 является двусторонней единицей.

Функции η, μ могут быть устроены, например, следующим образом: $f(N(a))$, где $N(a) \in \mathbb{Z}$, а f — мультипликативная функция целого аргумента, заданная на простых рациональных числах равенством

$$f(q) = \prod \alpha_q,$$

где справа стоит единица или произведение по некоторому фиксированному набору элементов из $Q(\xi)$, имеющих вид

$$1 \pm \lambda^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Рассмотрим символ Якоби с взаимно простыми верхним и нижним индексами такого вида. Допустим также, что показатели степени в выражении (5) для верхнего и нижнего индексов взаимно просты. Такой символ может быть вычислен не более чем за $O(\log(\max\{\alpha, \beta\}))$ переворотов и взятий верхнего индекса по модулю нижнего. Действительно, эти преобразования не меняют структуру верхнего и нижнего индексов и они остаются взаимно простыми, а взятие по модулю сводится к делению с остатком одного показателя на другой. Поэтому, ввиду взаимной простоты показателей, все сведется к вычислению символа вида

$$\left(\frac{2}{1+\lambda}\right)_p = \left(\frac{2}{\xi}\right)_p = 1$$

или

$$\left(\frac{2}{1+\lambda}\right)_p = \left(\frac{2}{2+\xi}\right)_p,$$

который после одного переворота можно посчитать по определению, используя известные выражения для нормы и количества идеалов — делителей числа 2 (см., например, [3]).

Один переворот осуществляется за полиномиальное по p время. Действительно, $T: K \rightarrow \mathbb{Z}$, при $0 < i < p$

$$T(1) = \sum_{j=1}^{p-1} 1 = p-1,$$

$$T(\xi^i) = \sum_{j=1}^{p-1} (\xi^j)^i = \sum_{t=1}^{p-1} \xi^t = -1,$$

$$\begin{aligned} T(\lambda^i) &= T((1-\xi)^i) = T\left(\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \xi^k (-1)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} T(\xi^k) (-1)^k = p - \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^k = p. \end{aligned}$$

Поскольку $p = \lambda^{p-1}u$, где $u \in K$ — обратимый элемент, при $i \geq p$ для

$$\lambda^{i-p}u = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{p-2}\lambda^{p-2} \in K$$

при $a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1, \dots, p-2$, получим, что

$$\begin{aligned} T(\lambda^i) &= pT(a_0\lambda + a_1\lambda^2 + \dots + a_{p-1}\lambda^{p-1}) \\ &= p(a_0T(\lambda) + a_1T(\lambda^2) + \dots + a_{p-1}T(\lambda^{p-1})) = p^2q_i, \quad q_i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Поэтому p^2 делит $T(\lambda^i)$ при $i \geq p$, то есть формула для вычисления закона взаимности не зависит от степеней, больших $p-1$.

Таким образом, при небольших значениях p операция (3) эффективно вычисляется, в то время как соответствующее разложение методом полного перебора возможных сомножителей требует экспоненциального по p времени (каждый сомножитель может, вообще говоря, иметь p коэффициентов).

Коммутирующие множества могут быть построены при помощи следствия 1 или с использованием свойства (4). Пусть

$$a * b = \xi^t b * a, \quad a * c = \xi^s c * a.$$

Тогда для $d = b * \dots * b * c * \dots * c$, где число элементов b равно x , а число элементов c равно y , справедливо соотношение

$$a * d = d * a \iff xt + ys \equiv 0 \pmod{p}.$$

Последнее сравнение при любых фиксированных s, t дает как минимум p различных по модулю p пар (x, y) .

При использовании больших p подсчет обобщенного символа Якоби в общем случае — очень трудная задача. В некоторых случаях ее решение дает решение задачи дискретного логарифмирования (см. [3]). Однако для верхних и нижних индексов специального вида она может оказаться простой.

Список литературы

1. Сидельников В. М., Черепнев М. А., Яценко В. В., Системы открытого распределения ключей на основе некоммутативных полугрупп. *Докл. АН СССР* (1993) **332**, №5, 566–567.
2. Artin E., Tate J., *Class field theory*. Harvard Univ. Press, Harvard, 1961.
3. Adleman L. M., Pomerance C., Rumely R. S., On distinguishing prime numbers from composite numbers. *Ann. Math.* (1983) **117**, 173–206.

Статья поступила 10.06.2002.