Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Ходжаев, О задаче В. Г. Спринджукa, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 2, 63–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:03:43

О задаче В. Г. Спринджук

© 2003 г. Н. М. Ходжаев

В статье рассматриваются оценки функции

$$S(t) = \prod_{p|t} p,$$

бесквадратной части натурального аргумента t . В. Г. Спринджук была поставлена следующая задача: существует ли постоянная $c > 0$ такая, что для бесконечно многих пар натуральных чисел n и k , удовлетворяющих условию $k < \ln^c n$, справедливо неравенство

$$S((n+1) \dots (n+k)) < k^k?$$

В статье доказана следующая теорема. Существуют положительные постоянные $c_7, \dots, c_{10}$ такие, что при $n \geq c_7$

$$S((n+1) \dots (n+k)) \geq p_1 \dots p_s(k), \quad s(k) = k + [c_8 k / \ln(2k)],$$

если $1 \leq k \leq c_9 \sqrt{n / \ln n}$;

$$S((n+1) \dots (n+k)) < p_1 \dots p_k,$$

если $k \geq c_{10} \sqrt{n / \ln n}$.

В статье получен ряд других оценок функции $S(t)$, а также рассмотрены некоторые предположения и их следствия, связанные с $S(t)$.

1. Формулировка результатов и предположений

П. Эрдеш, Т. Н. Шорей и В. Г. Спринджук поставили несколько взаимосвязанных задач о простых делителях биномиальных коэффициентов и произведений последовательных натуральных чисел.

П. Эрдеш [1] предположил, что для натуральных чисел n и k

$$p((n+1) \dots (n+k)) > p_{k+1} \tag{1}$$

при $n > p_{k+1} \geq c_1$, где $p(t)$ — наибольший простой делитель целого числа t при $t \geq 2$, $p(1) = 1$, p_k — k -е последовательное простое число.

Это было доказано в более сильной форме К. Рамачандрой [2] и в дальнейшем усилено и обобщено в [3].

Задача Т. Н. Шорея [4] (см. также [5] и [6]) формулируется следующим образом. Для каких натуральных чисел n и k справедливо неравенство

$$\omega((n+1) \dots (n+k)) \geq k \tag{2}$$

или более сильное неравенство

$$\omega((n+1) \dots (n+k)) \geq k + \pi(k) - 1, \quad (3)$$

где $\omega(t)$ — число различных простых делителей целого числа t , $\pi(k)$ — количество простых чисел, не превосходящих k ? К. Рамачандра, Т. Н. Шорей и Р. Тайдеман [5] доказали, что неравенство (2) выполняется при $1 \leq k \leq e^{c_2 \sqrt{\ln n}}$, а Ж. Терк (см. [6]) уточнил, что для таких n и k

$$\omega((n+1) \dots (n+k)) \geq k + \pi(k) \left(1 - c_3 \frac{\ln \ln \Delta}{\ln \Delta} \right), \quad (4)$$

где $\Delta = \ln n / \ln^2 k$. П. Эрдеши и Ж. Терк [6] предположили, что неравенство (3) справедливо при $1 \leq k \leq c_4 n^{1/e}$ и оно заменяется на противоположное неравенству (2) при $k \geq c_5 n^{1/e}$. Они доказали, что это так для бесконечно многих пар натуральных чисел n и k вида $n \asymp N$ с произвольными $k = k(N)$, $N \geq c_6$.

И, наконец, задача В. Г. Спринджук (см. [7], стр. 240), поставленная им в связи с приведенным выше результатом из [5], формулируется следующим образом. Существует ли постоянная $c > 0$ такая, что для бесконечно многих пар натуральных чисел n и k , удовлетворяющих условию $k < \ln^c n$, справедливо неравенство

$$S((n+1) \dots (n+k)) < k^k, \quad (5)$$

где

$$S(t) = \prod_{p|t} p$$

есть бесквадратная часть целого числа t ?

Из приведенного выше результата из [5] и неравенства $S(t) \geq p_1 \dots p_{\omega(t)}$, справедливого для любого натурального числа $t \geq 2$, следует отрицательный ответ на так сформулированный вопрос. В [8] доказано, что неравенство (5) выполняется только если $k \gg \sqrt{n}$. В настоящей работе решена следующая модификация задачи В. Г. Спринджук в духе задач П. Эрдеши (1) и Т. Н. Шорея (2)–(3).

Теорема 1. *Существуют положительные постоянные $c_7, \dots, c_{10}$ такие, что при $n \geq c_7$*

$$S((n+1) \dots (n+k)) \geq p_1 \dots p_{s(k)}, \quad s(k) = k + [c_8 k / \ln(2k)], \quad (6)$$

если $1 \leq k \leq c_9 \sqrt{n / \ln n}$;

$$S((n+1) \dots (n+k)) < p_1 \dots p_k,$$

если $k \geq c_{10} \sqrt{n / \ln n}$.

Заметим, что из неравенства (4) следует неравенство (6), из которого, в свою очередь, следует неравенство (1).

Следующее обобщение известной *abc*-гипотезы (см. [9]) позволило бы получить более точные оценки: если

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=0}^n c_k x^k y^{n-k}$$

— целочисленная форма, ω — число различных линейных множителей формы $\varphi(x, y)$, с точностью до числового сомножителя,

$$H(\varphi) = \max_{0 \leq k \leq n} |c_k|$$

— высота, x и y — целые числа, $(x, y) = 1$, $xy\varphi(x, y) \neq 0$, $H(x, y) = \max(|x|, |y|)$, то

$$S(\varphi(x, y)) \gg \frac{H(x, y)^{\omega-2-\varepsilon}}{H(\varphi)^{c(n)}}, \quad (7)$$

где постоянная в знаке $\gg$ зависит только от n и произвольного $\varepsilon > 0$.

Заметим, что abc -гипотеза соответствует случаю $\varphi(x, y) = xy(x + y)$, причем с помощью замены переменных из нее легко вывести оценку (7) для кубических форм, полностью разложимых над полем рациональных чисел.

Тривиальная оценка $S(t) \leq |t|$ показывает, что оценка (7) является уточнением теоремы Туэ–Зигеля–Рота в одной из ее формулировок. На самом деле оценка (7) равносильна следующему усилению теоремы Малера.

Теорема 2. *Предположение (7) равносильно оценке*

$$\prod_{v \in S} \min_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j - a/q|_v \gg H^{-c_1(n)} \prod_{p \in S} p^{-1-\varepsilon} H(a, q)^{-2-\varepsilon}, \quad (8)$$

где S — произвольное конечное множество нормирований поля рациональных чисел; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — различные алгебраические числа вместе со всеми своими сопряженными числами, a и q — целые числа, $q \neq 0$, $\alpha_j \neq a/q$.

$$H = \prod_{j=1}^n H(\alpha_j),$$

$H(\alpha_j)$ — высоты, $j = 1, \dots, n$, постоянная в знаке $\gg$ зависит только от n и ε .

Легко проверить, что из предположения (7) следует гипотеза Морделла для гиперэллиптических и некоторых более общих кривых с оценкой высот рациональных точек на них, а также гипотеза А. Шинцеля и Р. Тайдемана [10], что если f — целочисленный многочлен, у которого хотя бы три не кратных корня, то для целых $x \geq x_0(f)$ найдется простое число, не кратно входящее в $f(x)$, то есть диофантово уравнение $f(x) = y^2 z^3$ имеет только конечное число решений в целых x, y, z , $yz \neq 0$.

В свою очередь, из гипотезы А. Шинцеля и Р. Тайдемана следует, что для достаточно больших n не существует полноквадратных троек вида $n, n+1, n+3$ (полноквадратное число — это число, все простые делители которого входят в него с кратностью, не меньшей 2), это — предположение Р. А. Моллина и П. Г. Уолша (см. [11]), откуда А. Грэнвилл [11] элементарно вывел теорему Адлемана и Хиз-Брауна, [11], откуда они элементарно вывели, что первый случай теоремы Ферма верен для бесконечно многих простых степеней.

Из предположения (7) следует также существование асимптотической плотности бесквадратных значений многочленов и усиление теоремы 1.

Теорема 3. Пусть f — целочисленный многочлен без кратных корней, $x \geq 1$, $S_f(x)$ — количество натуральных чисел $n \leq x$, для которых $f(n)$ — бесквадратное число, $N(m)$ — число решений сравнения $f(t) \equiv 0 \pmod{m}$,

$$c(f) = \prod_p \left(1 - \frac{N(p^2)}{p^2} \right) \neq 0.$$

Если предположение (7) верно, то при $x \rightarrow \infty$

$$S_f(x) \sim c(f)x.$$

Теорема 4. Если предположение (7) верно, то для натуральных чисел n, k, m и произвольного $\varepsilon > 0$

$$S((n+1) \dots (n+k)) \geq \frac{n^{(1-\varepsilon)k-1}}{k^{c_2(\varepsilon)k}} \quad (9)$$

и, кроме того,

$$\sum_{n>N} \left(\left\lfloor \frac{x+y}{n^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{n^m} \right\rfloor \right) \ll x^\varepsilon \quad (10)$$

при $1 \leq y \leq x$, $N \geq y^{c_3(\varepsilon)/(m-1)} x^\varepsilon$.

На самом деле асимптотически точная оценка для $S((n+1) \dots (n+k))$ по существу равносильна асимптотике для количества бесквадратных чисел на коротких промежутках. А именно, обозначим через $S_2(x)$ количество бесквадратных чисел, не превосходящих x . Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $n \geq k \geq 3$ — натуральные числа. Тогда

$$\begin{aligned} & |\ln S((n+1) \dots (n+k)) - k \ln(n/k)| \\ &= L \sum_{d \leq \ln k} \left| S_2\left(\frac{n+k}{d^2}\right) - S_2\left(\frac{n}{d^2}\right) - \frac{6k}{\pi^2 d^2} \right| + O\left(\frac{k \ln n \ln \ln n}{\ln k}\right), \end{aligned}$$

где $\ln k \leq L \leq \ln n$.

В частности, для любого фиксированного α , $0 < \alpha < 1$, при $N \rightarrow \infty$ асимптотика

$$S((n+1) \dots (n+k)) = \left(\frac{n}{k}\right)^{(1+o(1))k} \quad (11)$$

для всех $n \asymp N$, $k \asymp N^\alpha$ равносильна асимптотике

$$S_2(n+k) - S_2(n) \sim \frac{6}{\pi^2} k$$

для таких n и k .

Из теоремы 5 и соответствующего результата из [12] для распределения бесквадратных чисел на почти всех коротких промежутках следует, что асимптотика (11) верна для почти всех $n \asymp N$ при $\ln k / \ln N \rightarrow \infty$, $k \leq N^{1-\varepsilon}$, $N \rightarrow \infty$.

Обобщая результат А. Шаркоци [13]

$$S\left(\binom{2n}{n}\right) = \binom{2n}{n} e^{-(c_{11}+o(1))\sqrt{n}},$$

можно предположить, что при $n \geq 2$, $n^\varepsilon \leq k \leq n$ справедливы еще более точные оценки

$$S\left(\binom{n+k}{k}\right) = \binom{n+k}{k} \exp\left\{-\sum_{m \geq 2} a_m (k^{1/m} + n^{1/m} - (n+k)^{1/m}) + O(k^{1/4}n^\varepsilon)\right\}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} S((n+1) \dots (n+k)) &= [n+1, \dots, n+k] \exp\{-k^{1/2} - k^{1/3} + O(k^{1/4}n^\varepsilon) + O(k^2/n)\} \\ &= \left(\frac{n}{k}\right)^k \exp\{(1+\gamma)k + O(k^{1/2}n^\varepsilon) + O(k^2/n)\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$S(n+1) \dots S(n+k) = n^k \exp\{-c_{12}k + O(k^{1/2}n^\varepsilon) + O(k^2/n)\}, \quad (14)$$

где $[n+1, \dots, n+k]$ — наименьшее общее кратное чисел $n+1, \dots, n+k$,

$$a_2 = -\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right),$$

$\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, $\gamma = 0,57 \dots$ — постоянная Эйлера,

$$c_{12} = \sum_p \frac{\ln p}{p(p-1)} - \gamma,$$

причем основной вклад в оценки (12) и (13) вносят простые числа кратности 2 из промежутка $\varepsilon\sqrt{k} \leq p \leq \varepsilon^{-1}\sqrt{k}$, а в оценку (14) — простые числа кратности $k/p + O(1)$ из промежутка $k^\varepsilon \leq p \leq k^{1-\varepsilon}$.

Что касается функций $\omega(t)$ и $p(t)$, тесно связанных с функцией $S(t)$, то из предположения (7) и тривиальных оценок

$$\begin{aligned} S(\varphi(x, y)) &\leq p(\varphi(x, y))^{\omega(\varphi(x, y))}, \\ \omega(\varphi(x, y)) &\leq (1+o(1)) \frac{\ln |\varphi(x, y)|}{\ln \ln |\varphi(x, y)|} \quad (\text{при } |\varphi(x, y)| \rightarrow \infty), \\ |\varphi(x, y)| &\leq (n+1)H(\varphi)H(x, y) \end{aligned} \quad (15)$$

следует оценка

$$p(\varphi(x, y)) \gg (\ln H(x, y))^{1-2/\omega-\varepsilon}.$$

Если использовать вместо оценки (15) гипотетическую оценку

$$\omega(\varphi(x, y)) \leq (1+o(1)) \frac{\ln H(x, y)}{\ln \ln H(x, y)} \quad (\text{при } H(x, y) \rightarrow \infty), \quad (16)$$

обобщая предположение П. Эрдеша и Ж.-Л. Николя (см. [14])

$$\omega(x) + \omega(x+1) \leq (1+o(1)) \frac{\ln x}{\ln \ln x} \quad (\text{при } x \rightarrow \infty),$$

то получается оценка

$$p(\varphi(x, y)) \gg (\ln H(x, y))^{\omega-2-\varepsilon}.$$

На самом деле наилучшаемой при $\omega \geq 3$ является, по-видимому, оценка

$$p(\varphi(x, y)) \gg (\ln H(x, y))^{\omega-1-\varepsilon}, \quad (17)$$

а при $\omega = 2$ — оценка

$$p(\varphi(x, y)) \ln p(\psi(x, y)) \gg (\ln H(x, y))^{1-\varepsilon}, \quad (18)$$

где ψ — произвольная целочисленная форма без общих линейных множителей с формой φ , с точностью до числовых сомножителей.

Заметим, что к оценкам (16)–(18) приводят вероятностные соображения, если экстраполировать асимптотические плотности и приближенную независимость событий $\omega(\mu_j x + \nu_j y) \geq \omega_j$ или, соответственно, $p(\mu_j x + \lambda_j y) \leq z_j$.

2. Доказательство теоремы 1

Сначала, в лемме 1 сведем оценку $S((n+1) \dots (n+k))$ снизу к оценкам сверху количества целых чисел на промежутке от n до $n+k$, содержащих простое число с высокой кратностью, которые получим в лемме 2.

Лемма 1. Пусть n, k, t — натуральные числа,

$$S = \ln S((n+1) \dots (n+k)), \quad S_m = \sum_{n < p^m s \leq n+k} \ln p,$$

где суммирование ведется по натуральным числам s и простым числам p . Тогда

$$\sum_{m \geq 1} S_m = k \ln n + O\left(\frac{k^2}{n}\right), \quad (19)$$

$$S_m \leq S + k \sum_{p \leq k} \frac{\ln p}{p^m}, \quad (20)$$

$$S_1 = S + k \sum_{p \leq k} \frac{\ln p}{p} + O(k). \quad (21)$$

Доказательство. Если положить $t = p^m s$, то

$$S_m = \sum_{n < t \leq n+k} \sum_{p^m | t} \ln p.$$

Используя свойство функции Мангольдта, получаем, что

$$\sum_{m \geq 1} S_m = \sum_{n < t \leq n+k} \ln t = \sum_{n < t \leq n+k} \left(\ln n + O\left(\frac{k}{n}\right) \right) = k \ln n + O\left(\frac{k^2}{n}\right),$$

то есть получаем оценку (19).

Далее, все простые числа $p \leq k$ делят $(n+1) \dots (n+k)$. Следовательно,

$$S = \sum_{p|(n+1) \dots (n+k), p > k} \ln p + \sum_{p \leq k} \ln p.$$

При $p > k$ не более чем одно число из промежутка от n до $n+k$ делится на p и, кроме того, при $m \geq 1$ делимость на p^m сильнее делимости на p . Поэтому

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n < t \leq n+k} \sum_{p|t, p > k} \ln p + \sum_{p \leq k} \ln p \geq \sum_{n < t \leq n+k} \sum_{p^m | t, p > k} \ln p + \sum_{p \leq k} \ln p \\ &= S_m - \sum_{n < sp^m \leq n+k, p \leq k} \ln p + \sum_{p \leq k} \ln p. \end{aligned}$$

Тривиально оценивая последнюю сумму по s , находим, что

$$S \geq S_m - \sum_{p \leq k} \left(\left[\frac{n+k}{p^m} \right] - \left[\frac{n}{p^m} \right] \right) + \sum_{p \leq k} \ln p \geq S_m - k \sum_{p \leq k} \frac{\ln p}{p^m}.$$

Аналогично доказывается противоположное неравенство для случая $m = 1$.

Лемма 2. Пусть n и k — натуральные числа, $e^{c_2 \sqrt{\ln n}} \leq k \leq (n \ln n)^{1/3}$, $n \geq c_{13}$,

$$M = \left[\frac{\ln(n \ln n)}{\ln \Lambda} \right], \quad \theta = \left\{ \frac{\ln(n \ln n)}{\ln \Lambda} \right\}, \quad x = \frac{\ln^2 \Lambda}{\ln(n \ln n)},$$

где Λ — произвольный параметр такой, что $e^{c_2 \sqrt{\ln n}} \leq \Lambda \leq (n \ln n)^{1/3}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq M} S_m &\leq k \sum_{m \geq M} \sum_p \frac{\ln p}{p^m} + (1 - e^{-x})^{-1} \Lambda \exp\{-(1 - \theta)x(1 - (1 - \theta) \ln \Lambda / \ln(n \ln n))\} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{1}{M} + O\left(e^{-x/4} \frac{\ln \Lambda}{\ln n}\right) + O\left(e^{-x/4} \frac{\ln \ln n}{\ln \Lambda}\right) + O\left(\frac{\ln \ln n}{M \ln n}\right) \right) \\ &\quad + O(e^{-(1-\theta)x/4} \Lambda / \ln^2 n) + O(\Lambda^{6/7} \ln n), \end{aligned} \quad (22)$$

$$S_{M-1} \leq \frac{M \Lambda}{M-1} \exp\{\theta x + O(\theta^2 x \ln \Lambda / \ln n)\} \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln n}{M \ln n}\right) \right) + O(k). \quad (23)$$

Если же $(n \ln n)^{1/3} \leq k \leq n$, то

$$\sum_{m \geq 2} S_m \ll k. \quad (24)$$

Доказательство. Оценим сначала суммы S_m , разбив их на две, в соответствии с тем $p \leq V_m$ или $p > V_m$ (обрезающий параметр $V_m \geq 2$ выберем позднее):

$$S_m = \sum_{p \leq V_m} \ln p + \sum_{n/p^m < s \leq (n+k)/p^m} 1 + \sum_{s \leq (n+k)/V_m^m} \sum_{(n/s)^{1/m} < p \leq ((n+k)/s)^{1/m}} \ln p.$$

Очевидно, что

$$\left(\frac{n+k}{s} \right)^{1/m} \leq \left(\frac{n}{s} \right)^{1/m} \left(1 + \frac{1}{mn} \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 S_m &\leq \sum_{p \leq V_m} \left(1 + \frac{k}{p^m}\right) \ln p + \sum_{s \leq (n+k)/V_m^m} \frac{\ln((n+k)/s)}{m} \left(1 + \frac{1}{m} k n^{1/m-1} s^{-1/m}\right) \\
 &= k \sum_{p \leq V_m} \frac{\ln p}{p^m} + V_m + O\left(\frac{V_m}{\ln^3 V_m}\right) + \frac{(n+k)(\ln V_m^m + 1)}{V_m^m m} \\
 &\quad + O\left(\frac{\ln n}{m}\right) + O(k V_m^{1-m} \ln n).
 \end{aligned}$$

При выполнении условия

$$M - 1 \leq m \leq \frac{3 \ln(n \ln n)}{2 \ln \Lambda} - 1$$

выберем

$$V_m = \left(\frac{m}{m+1} n \ln n\right)^{1/(m+1)}.$$

Если положить $m = M + \mu$, то

$$\begin{aligned}
 \ln V_m &= \frac{\ln(n \ln n) - \ln(1 + 1/m)}{\ln(n \ln n)/\ln \Lambda + \mu + 1 - \theta} \leq \frac{\ln \Lambda}{1 + (\mu + 1 - \theta) \ln \Lambda / \ln(n \ln n)} \\
 &= \ln \Lambda - (\mu + 1 - \theta)x \left(1 - \frac{(\mu + 1 - \theta) \ln \Lambda}{\ln(n \ln n)(1 + (\mu + 1 - \theta) \ln \Lambda / \ln(n \ln n))}\right), \\
 \frac{n}{V_m^m} &= \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{V_m}{\ln n}, \quad \ln V_m = \frac{\ln(n \ln n) - \ln(1 + 1/m)}{m + 1} \gg \ln \Lambda. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 S_m &\leq k \sum_p \frac{\ln p}{p^m} + V_m + \left(1 + \frac{1}{m}\right) V_m \left(\frac{\ln(n \ln n) - \ln(1 + 1/m)}{m + 1} + \frac{1}{m}\right) \\
 &\quad + \frac{k(\ln V_m^m + 1)}{m V_m^m} + O\left(\frac{V_m}{\ln^3 V_m}\right) + O\left(\frac{\ln n}{m}\right) + O(k V_m^{1-m} \ln n) \\
 &= k \sum_p \frac{\ln p}{p^m} + \left(1 + \frac{1}{m}\right) V_m + O\left(\frac{V_m \ln \ln n}{m \ln n}\right) + O(k (n \ln n)^{2/(m+1)-1} \ln n), \quad (26)
 \end{aligned}$$

откуда следует оценка (23).

Теперь оценим сумму $\sum_{m \geq M} S_m$, разбив ее по нескольким промежуткам изменения m .

Если $m > \ln(n+k)/\ln 2$, то очевидно, что $S_m = 0$.

Если

$$\mu > \frac{\ln(n \ln n)}{2 \ln \Lambda} - 1 + \theta,$$

то из определения сумм S_m следует, что

$$p \leq (n+k)^{1/m} \leq (n \ln n)^{1/(3 \ln(n \ln n)/(2 \ln \Lambda) - 1)} = \Lambda^{(3/2 - \ln \Lambda / \ln(n \ln n))^{-1}} \leq \Lambda^{6/7}.$$

Поэтому

$$S_m = \sum_{p \leq \Lambda^{6/7}} \ln p \sum_{n/p^m < s \leq (n+k)/p^m} 1 \leq \sum_{p \leq \Lambda^{6/7}} \left(1 + \frac{k}{p^m}\right) \ln p \leq k \sum_p \frac{\ln p}{p^m} + O(\Lambda^{6/7}),$$

$$\sum_m S_m \leq k \sum_m \sum_p \frac{\ln p}{p^m} + O(\Lambda^{6/7} \ln n), \quad (27)$$

где суммирование по m ведется в интервале

$$\frac{3 \ln(n \ln n)}{2 \ln \Lambda} - 1 < m \leq \frac{\ln(n+k)}{\ln 2}.$$

В частности, при $\Lambda = (n \ln n)^{1/3}$ из оценок (26) и (27) следует оценка (24).

Если

$$4 \ln \ln n \frac{\ln(n \ln n)}{\ln^2 \Lambda} < \mu \leq \frac{\ln(n \ln n)}{2 \ln \Lambda} - 1 + \theta,$$

то в силу оценки (2)

$$\ln V_m \leq \ln \Lambda - (\mu + 1 - \theta) \frac{x}{2}.$$

Подставляя в оценку (26) и учитывая, что $x \geq c_{14} > 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_m S_m &\leq k \sum_m \sum_p \frac{\ln p}{p^m} + O\left(e^{-(1-\theta)x/2} \Lambda \sum_{\mu} e^{-\mu x/2}\right) + O(k n^{\varepsilon-1/2}) \\ &= k \sum_m \sum_p \frac{\ln p}{p^m} + O\left(e^{-(1-\theta)x/2} \Lambda / \ln^2 n\right) + O(k n^{\varepsilon-1/2}), \end{aligned} \quad (28)$$

где суммирование ведется по m , удовлетворяющим указанным выше неравенствам.

Наконец, если

$$0 \leq \mu \leq 4 \ln \ln n \frac{\ln(n \ln n)}{\ln^2 \Lambda},$$

то используем оценку

$$\begin{aligned} \ln V_m &\leq \ln \Lambda - (\mu + 1 - \theta)x + (\mu + 1 - \theta)^2 x \frac{\ln \Lambda}{\ln(n \ln n)} \\ &= \ln \Lambda - (1 - \theta)x \left(1 - (1 - \theta) \frac{\ln \Lambda}{\ln(n \ln n)}\right) - \mu x \left(1 - (\mu + 2 - 2\theta) \frac{\ln \Lambda}{\ln(n \ln n)}\right) \\ &\leq \ln \Lambda - (1 - \theta)x \left(1 - (1 - \theta) \frac{\ln \Lambda}{\ln(n \ln n)}\right) - \mu x \left(1 - 2 \frac{\ln \Lambda}{\ln(n \ln n)} + O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln \Lambda}\right)\right). \end{aligned}$$

Подставляя в оценку (26), получаем, что

$$\begin{aligned}
 \sum_m S_m &\leq k \sum_m \sum_p \frac{\ln p}{p^m} + \exp\{-(1-\theta)x(1 - (1-\theta) \ln \Lambda / \ln(n \ln n))\} \\
 &\quad \times \Lambda \sum_m \exp\left\{-\mu x \left(1 - 2 \frac{\ln \Lambda}{\ln(n \ln n)} + O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln \Lambda}\right)\right)\right\} \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{1}{M} + O\left(\frac{\ln \ln n}{M \ln n}\right)\right) + O(kn^{\varepsilon-1/2}) \\
 &\leq k \sum_m \sum_p \frac{\ln p}{p^m} + \left(1 - \exp\left\{-x \left(1 - \frac{2 \ln \Lambda}{\ln(n \ln n)} + O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln \Lambda}\right)\right)\right\}\right)^{-1} \\
 &\quad \times \exp\left\{-(1-\theta)x \left(1 - (1-\theta) \frac{\ln \Lambda}{\ln(n \ln n)}\right)\right\} \\
 &\quad \times \Lambda \left(1 + \frac{1}{M} + O\left(\frac{\ln \ln n}{M \ln n}\right)\right) + O(kn^{\varepsilon-1/2}), \tag{29}
 \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
 &\left(1 - \exp\left\{-x \left(1 - \frac{2 \ln \Lambda}{\ln(n \ln n)} + O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln \Lambda}\right)\right)\right\}\right)^{-1} \\
 &\quad = (1 - e^{-x})^{-1} \left(1 + O\left(e^{-x/4} \frac{\ln \Lambda}{\ln n}\right) + O\left(e^{-x/4} \frac{\ln \ln n}{\ln \Lambda}\right)\right). \tag{30}
 \end{aligned}$$

Собирая оценки (27)–(30), получаем оценку (22).

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы разобьем на несколько частей по различным промежуткам изменения k .

1. Если $1 \leq k \leq e^{c_2 \sqrt{\ln n}}$, то оценка (6) теоремы 1 сразу следует из оценки (2).

2. Пусть $e^{c_2 \sqrt{\ln n}} \leq k \leq e^{\sqrt{\ln n} \ln \ln n}$. Оценим суммы S_m при $1 \leq m \leq M-1$, используя оценку (20) леммы 1, а при $m \geq M$ используем лемму 2, полагая $\Lambda = k \ln k$. Тогда

$$\sum_{m \geq 1} S_m \leq (M-1)S + k \sum_{p \leq k} \frac{\ln p}{p-1} + \frac{e^{-(1-\theta)x}}{1-e^{-x}} k \ln k + O(k(\ln \ln n)^4),$$

причем

$$\sum_{p \leq k} \frac{\ln p}{p-1} = \ln k - \gamma + O(1/\ln(3k)).$$

Сравнивая полученную оценку с оценкой (19) леммы 1, получим, что

$$\begin{aligned}
 S &\geq \frac{k \ln n - k \ln k - e^{-(1-\theta)x}(1 - e^{-x})^{-1} k \ln k + O(k(\ln \ln n)^4)}{\ln(n \ln n)/\ln(k \ln k) - 1 - \theta} \\
 &= k \ln(k \ln k) \left(1 - (1+\theta) \frac{\ln(k \ln k)}{\ln(n \ln n)}\right)^{-1} \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{\ln(k \ln n)}{\ln(n \ln n)} - \frac{e^{-(1-\theta)x} \ln k}{1 - e^{-x} \ln(n \ln n)} + O\left(\frac{(\ln \ln n)^4}{\ln n}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$= k \ln(k \ln k) \left(1 + \frac{\ln k}{\ln(n \ln n)} \left(\theta - \frac{e^{-(1-\theta)x}}{1 - e^{-x}} \right) + O \left(\frac{(\ln \ln n)^4}{\ln n} \right) \right).$$

Минимум последнего выражения, как функции от θ , достигается при $\theta = 0$, $\theta = 1$ или $\theta = \theta_0$, где $e^{\theta_0 x} = (e^x - 1)/x$.

Если $\theta = 0$ или $\theta = 1$, то

$$\begin{aligned} S &\geq k \ln(k \ln k) \left(1 - \frac{1}{e^x - 1} \frac{\ln k}{\ln(n \ln n)} + O \left(\frac{(\ln \ln n)^4}{\ln n} \right) \right) \\ &= k \left(\ln k + \ln \ln k - \frac{x}{e^x - 1} + O \left(\frac{\ln k (\ln \ln n)^4}{\ln n} \right) \right). \end{aligned}$$

Если же $\theta = \theta_0$, то

$$\begin{aligned} S &\geq k \ln(k \ln k) \left(1 + \frac{\ln k}{\ln(n \ln n)} \left(\theta_0 - \frac{1}{x} \right) + O \left(\frac{(\ln \ln n)^4}{\ln n} \right) \right) \\ &= k \left(\ln k + \ln \ln k + x \theta_0 - 1 + O \left(\frac{(\ln \ln n)^4}{\ln n} \right) \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$x \geq c_{15} > 0, \quad \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{1}{1 + x/2} \leq 1 - c_{16} < 1, \quad \theta_0 \geq c_{17} > 0$$

и принимая во внимание оценку

$$p_{s(k)} = k \left(\ln k + \ln \ln k - 1 + c_8 + O \left(\frac{\ln \ln k}{\ln k} \right) \right),$$

которую легко вывести из тождества $s = \pi(p_s)$ и асимптотического ряда для функции $\pi(t)$, получаем утверждение теоремы 1 для значений k , рассматриваемых в этом пункте.

3. Пусть $e^{\sqrt{\ln n} \ln \ln n} \leq k \leq (n \ln n)^{1/3}$. Положим $\Lambda = k$ и разобьем доказательство на несколько случаев.

(а) Если $1/2 \leq \theta < 1$, то, как и в случае 2, из лемм 1 и 2 получаем, что

$$k \ln n + O(k^2/n) = \sum_{m \geq 1} S_m \leq (M - 1)S + k \sum_{p \leq k} \frac{\ln p}{p - 1} + O(k),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} S &\geq \frac{k \ln n - k \ln k + O(k)}{\ln(n \ln n)/\ln k - 1 - \theta} = k \ln k \left(1 - \frac{3 \ln k}{2 \ln(n \ln n)} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\ln(k \ln n) + O(1)}{\ln(n \ln n)} \right) \\ &\geq k \left(\ln k + \frac{\ln^2 k}{2 \ln(n \ln n)} + O \left(\frac{\ln \ln n}{\ln n} \right) \right). \end{aligned}$$

что немного сильнее оценки (6) теоремы 1.

(b) Если

$$\frac{\ln \ln n - \ln \ln k + 1 - \gamma - c/2}{\ln k} + \frac{\ln \ln k - 1 + c}{\ln^2 k} \ln(n \ln n) \leq \theta < \frac{1}{2},$$

где c — произвольная положительная постоянная, $n > n_0(c)$, то снова из лемм 1 и 2 выводим, что

$$k \ln n + O\left(\frac{k^2}{n}\right) = \sum_{m \geq 1} S_m \leq (M-1)S + k \sum_{p \leq k} \frac{\ln p}{p-1} + O(e^{-x/4}k) + O(k^{6/7} \ln n),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} S &\geq \frac{k \ln n - k \ln k + \gamma k + O(k/\ln k)}{\ln(n \ln n)/\ln k - 1 - \theta} \\ &= k \ln k \frac{1 - (\ln(k \ln n) - \gamma)/\ln(n \ln n) + O(1/(\ln k \ln n))}{1 - (1 + \theta)\ln k/\ln(n \ln n)}. \end{aligned}$$

Прямая проверка показывает, что

$$S \geq k(\ln k + \ln \ln k - 1 + c)$$

(c) Если

$$\theta \leq \frac{\ln \ln n - \ln \ln k + 1 - \gamma - c/2}{\ln k} + \frac{\ln \ln k - 1 + c}{\ln^2 k} \ln(n \ln n),$$

то используя еще оценку (23) леммы 2, получаем, что

$$\begin{aligned} k \ln n + O\left(\frac{k^2}{n}\right) &= \sum_{m \geq 1} S_m \leq k \sum_{p \leq k} \frac{\ln p}{p-1} + (M-2)S \\ &\quad + \frac{M}{M-1} k^{1+\theta \ln k/\ln(n \ln n) + O(\theta^2 \ln^2 k/\ln^2 n)} \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln n}{M \ln n}\right)\right) + O(k), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} S &\geq \left(k \ln n - k \ln k - \frac{Mk^{1+\frac{\theta \ln k}{\ln(n \ln n)} + O\left(\frac{\theta^2 \ln^2 k}{\ln^2 n}\right)}}{M-1} \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln n}{M \ln n}\right)\right) + O(k) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\ln(n \ln n)}{\ln k} - 2 - \theta \right)^{-1} \\ &\geq k \ln k \left(1 - 2 \frac{\ln k}{\ln(n \ln n)}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\ln(k \ln n)}{\ln(n \ln n)} - \frac{Mk^{\frac{\ln \ln k - 1 + c}{\ln k}}}{(M-1) \ln(n \ln n)} \right. \\ &\quad \times k^{\frac{\ln \ln n - \ln \ln k + 1 - \gamma - c/2}{\ln(n \ln n)} + O\left(\left(\frac{\ln \ln k}{\ln k}\right)^2\right)} \left. \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln n}{M \ln n}\right) + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \right) \end{aligned}$$

$$= k \ln k \left(1 - \frac{2 \ln k}{\ln(n \ln n)}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\ln(k \ln n)}{\ln(n \ln n)} - \frac{M e^{c-1} \ln k}{(M-1) \ln(n \ln n)}\right) \\ \times \left(e^{1-\gamma-c/2} \frac{\ln n}{\ln k}\right)^{\ln k / \ln(n \ln n)} \left(1 + O\left(\frac{(\ln \ln k)^2}{\ln k}\right) + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right).$$

В нашем случае

$$M = \frac{\ln(n \ln n)}{\ln k} - \theta \geq (1 - \varepsilon) \frac{\ln(n \ln n)}{\ln k}.$$

Поэтому

$$S \geq k \ln k \left(1 - \frac{2(1-\varepsilon)}{M}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1+\varepsilon}{M} - (1+\varepsilon) \frac{(e^{1-\gamma} M)^{1/M}}{M-1} e^{c(1-1/(2M))-1}\right).$$

Легко проверить, что функция

$$F(M) = \frac{M}{M-1} (e^{1-\gamma} M)^{1/M}$$

убывает при $M > 1$ и $F(3) < e$. Поэтому существует постоянная $c > 0$ такая, что при $M \geq 3$ выполняется неравенство

$$S \geq k \ln k \left(1 + \frac{c_{18}}{M}\right) \geq k \left(\ln k + c_{18} \frac{\ln^2 k}{\ln(n \ln n)}\right),$$

более сильное, чем неравенство (6) теоремы 1.

4. Пусть $(n \ln n)^{1/3} \leq k \leq n$. Тогда из оценок (19), (21) и (24) выводим, что

$$S = k \ln \frac{n}{k} + O(k),$$

откуда легко следует теорема 1 в рассматриваемой области изменения k .

5. Если $k \geq n$, то

$$S((n+1) \dots (n+k)) = \prod_{p|(n+1) \dots (n+k)} p \leq \prod_{p \leq 2k} p \leq e^{c_{19}k}.$$

В то же время, $p_1 \dots p_k \geq k!$.

3. Доказательство теоремы 2

Очевидно, что можно ограничиться случаем, когда многочлен $\varphi(x, 1)$ не имеет кратных корней. Пусть c — старший коэффициент многочлена $\varphi(x, 1)$. Тогда для любого нормирования v

$$|\varphi(x, y)|_v = |c|_v |y|_v^n \prod_{j=1}^n \left| \alpha_j - \frac{x}{y} \right|_v.$$

Если

$$\min_j |\alpha_j - x/y|_v < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|_v$$

и минимум достигается при $j = j_v$, то

$$\left| \alpha_j - \frac{x}{y} \right|_v = \left| \alpha_j - \alpha_{j_v} + \alpha_{j_v} - \frac{x}{y} \right|_v \asymp |\alpha_j - \alpha_{j_v}|_v$$

при $j \neq j_v$. Поэтому,

$$\left| \alpha_{j_v} - \frac{x}{y} \right|_v \asymp \frac{|\varphi(x, y)|_v}{|c|_v |y|_v^n \prod_{j \neq j_v} |\alpha_i - \alpha_{j_v}|_v} \geq |\varphi(x, y)|_v \prod_{j \neq j_v} |\alpha_j - \alpha_{j_v}|_v^{-1} \quad (31)$$

Если же

$$\min_j |\alpha_j - x/y|_v \geq \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|_v,$$

то

$$|\varphi(x, y)|_v \gg |c|_v |y|_v^n \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|_v^n. \quad (32)$$

Предположим теперь, что предположение (7) верно. Тогда

$$\begin{aligned} \prod_{p \in S_1} p |\varphi(x, y)|_p &\geq \prod_{p | \varphi(x, y)} p^{1 - \text{ord}_p \varphi(x, y)} = \frac{S(\varphi(x, y))}{|\varphi(x, y)|} \\ &\gg \frac{H(x, y)^{n-2-\varepsilon}}{H(\varphi)^{c(n)} |\varphi(x, y)|} \gg H(\varphi)^{-c(n)-1} H(x, y)^{-2-\varepsilon} \end{aligned}$$

для любого конечного множества S_1 неархимедовых нормирований.

Следовательно, если S_1 — неархимедовы нормирования из S , для которых,

$$\min_j |\alpha_j - x/y|_p < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|_p,$$

а S_2 — остальные неархимедовы нормирования из S , то

$$\begin{aligned} \prod_{v \in S} \min_j \left| \alpha_j - \frac{x}{y} \right|_v &\gg \min \left(1, \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|, \frac{|\varphi(x, y)|}{|c| |y|_v^n} \prod_{j \neq j_\infty} |\alpha_j - \alpha_{j_\infty}|^{-1} \right) \times \\ &\times H(\varphi)^{-c(n)-1} H(x, y)^{-2-\varepsilon} \prod_{p \in S_1} \frac{1}{p} \prod_{j \neq j_p} |\alpha_j - \alpha_{j_p}|^{-1} \prod_{p \in S_2} \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|_p \quad (33) \end{aligned}$$

Далее, для любого конечного множества S' нормирований

$$\begin{aligned} \prod_{v \in S'} \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|_v &\geq \prod_{i \neq j} \prod_{v \in S'} \min(1, |\alpha_i - \alpha_j|_v) \geq \prod_{i \neq j} H \left(\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|} \right)^{-1}, \\ \prod_{v \in S'} \prod_{j \neq j_v} |\alpha_j - \alpha_{j_v}|^{-1} &\geq \prod_{i \neq j} H(\alpha_i - \alpha_j)^{-1}, \quad \prod_{v \in S'} |c|_v^{\pm 1} \geq \prod_j H(\alpha_j)^{-1}. \end{aligned}$$

Для любых алгебраических чисел α и β , как известно,

$$H(\alpha^{-1}) \asymp H(\alpha), \quad H(\alpha - \beta) \ll H(\alpha)H(\beta).$$

Поэтому

$$\prod_{v \in S'} \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j|_v \gg \left(\prod_{i=1}^k H(\alpha_i) \right)^{-2n}, \quad (34)$$

$$\prod_{v \in S'} \prod_{j \neq j_v} |\alpha_j - \alpha_{j_v}|^{-1} \gg \left(\prod_{i=1}^k H(\alpha_i) \right)^{-2n}. \quad (35)$$

Оценки (33)–(35) доказывают оценку (8) теоремы 2.

Докажем теперь, что из оценки (8) следует предположение (7).

Пусть сначала $(x, y) = 1$, $(y, \varphi(x, y)) = 1$. Выберем S как множество всех простых делителей $\varphi(x, y)$, к которому добавим архимедово нормирование. Тогда из оценки (8) с помощью оценок (31), (32), (34), (35), получаем, что

$$1 = \prod_{v \in S} |\varphi(x, y)|_v \gg H(\varphi)^{-c_1(n)} H(x, y)^{-2-\varepsilon} |y|^n S(\varphi(x, y))^{-1-\varepsilon},$$

что равносильно оценке (7).

Пусть теперь $(x, y) = 1$, $(y, \varphi(x, y)) = d$, но $\varphi(1, 0) \neq 0$. Тогда $d \mid c$ и можно для $y = dy'$ перейти к новой форме $\varphi'(x, y') = \varphi(x, y'd)$, для которой $(y', \varphi'(x, y')) = 1$, причем $H(\varphi') \ll d^n H(\varphi) \ll H(\varphi)^{n+1}$.

В оставшемся случае $\varphi(1, 0) = 0$ можно сделать унимодулярное преобразование так, чтобы для новой формы $\varphi'(1, 0) \neq 0$, $H(\varphi') \ll H(\varphi)$.

4. Доказательство теоремы 3

Очевидно, что

$$\sum_{d^2 \mid t} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ — бесквадратное число,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (36)$$

Кроме того,

$$\sum_{n \leq x, f(n) \equiv 0 \pmod{d}} 1 = \frac{N(d)}{d} x + O(N(d)), \quad N(d) \ll d^\varepsilon.$$

Поэтому

$$S_f(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d^2 \mid f(n)} \mu(d) = \sum_{d \leq x^{2/3}} \mu(d) \left(\frac{N(d^2)}{d^2} x + O(d^\varepsilon) \right) + o \left(\sum_{n \leq x} \sum_{d^2 \mid f(n), d > x^{2/3}} 1 \right).$$

Учитывая, что в последней сумме

$$S(f(n)) \leq \frac{|f(n)|}{d} \leq |f(n)| x^{-2/3},$$

находим, что

$$S_f(x) = c(f)x + O(x^{2/3+\varepsilon}) + O \left(x^\varepsilon \sum_{n \leq x, S(f(n)) \leq |f(n)| x^{-2/3}} 1 \right).$$

Оценим теперь последнюю сумму. Пусть

$$S(f(n)) \leq |f(n)|x^{-2/3}, \quad S(f(n+k)) \leq |f(n+k)|x^{-2/3}.$$

Если $k \geq c_1(f)$, то $f(n)f(n+k)$ — многочлен от n без кратных корней с высотой, не превосходящей $k^{c_2(f)}$. Поэтому из предположения (7) следует оценка

$$\frac{|f(n)f(n+k)|}{k^{c_2(f)n^{1+\varepsilon}}} \ll S(f(n)f(n+k)) \leq |f(n)f(n+k)|x^{-4/3},$$

то есть $k \geq x^{c_3(f)}$, $c_3(f) > 0$.

Итак, натуральные числа $n \leq x$, для которых $S(f(n)) \leq |f(n)|x^{-2/3}$ образуют $O(x^{1-c_3(f)})$ групп из $O(1)$ чисел в каждой, что и доказывает теорему 3.

5. Доказательство теоремы 4

Пусть k_0 — натуральное число, $k \geq k_0 \geq 2$,

$$N_i = (n + ik_0 + 1)(n + ik_0 + 2) \dots (n + (i+1)k_0), \quad i = 0, 1, \dots, [k/k_0] - 1.$$

Общие простые делители пар N_i, N_j содержатся среди простых чисел $p \leq k$, поэтому

$$S((n+1) \dots (n+k)) \geq S\left(\prod_{j=0}^{[k/k_0]-1} N_j\right) \geq \prod_{j=0}^{[k/k_0]-1} \left(S(N_j) \prod_{p \leq k, p|N_j} p^{-1}\right).$$

Аналогично, отделяя $p \leq k_0$, получим, что

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{[k/k_0]-1} \prod_{p \leq k, p|N_j} p &\leq \prod_{j=0}^{[k/k_0]-1} \left(\prod_{p \leq k_0} p \prod_{i=1}^{k_0} \prod_{k_0 < p \leq k, p|n+jk_0+i} p \right) \\ &\leq \left(\prod_{p \leq k} p \right)^{[k/k_0]-1} \prod_{p \leq k} p^{a(p)} \leq e^{c_{30}k_0[k/k_0]} \prod_{p \leq k} p^{k/p+1} \leq e^{k \ln k + c_{31}k}, \end{aligned}$$

где

$$a(p) = \sum_{n < t \leq n+k, p|t} 1.$$

Из предположения (7) следует, что

$$S(N_j) \geq c_5(k_0, \varepsilon) \frac{n^{k_0-1-\varepsilon}}{k^{c_6(k_0)}} \geq \frac{n^{k_0-1-\varepsilon}}{k^{c_7(k_0, \varepsilon)}} \quad (37)$$

Итак,

$$\begin{aligned} S((n+1) \dots (n+k)) &\geq e^{-k \ln k - c_{31}k} \left(\frac{n^{k_0-1-\varepsilon}}{k^{c_7(k_0, \varepsilon)}} \right)^{[k/k_0]} \\ &\geq \frac{n^{k(1-(1+\varepsilon)/k_0)} - k_0}{k^{c_8(k_0, \varepsilon)k}}, \end{aligned}$$

что равносильно оценке (9) при $k \geq k_0^2$, $k_0 \geq 1/\varepsilon$. Для ограниченных k оценка (9) следует из оценки (37).

Теперь докажем, что из предположения (7) следует оценка (10).

Пусть для фиксированного натурального числа r найдется r натуральных чисел $n_1, \dots, n_r$ из промежутка $n < n_j \leq n + k$ таких, что $S(n_j) \leq S$. Тогда

$$S(n_1, \dots, n_r) \leq S(n_1) \dots S(n_r) \leq S^r.$$

Если $n_j = n + v_j$, то из предположения (7) для формы

$$\varphi(x, y) = y \prod_{j=1}^r (x + v_j)y$$

при $x = n$, $y = 1$ следует, что

$$S(n_1 \dots n_r) \gg_r \frac{n^{r-1-\varepsilon}}{k^{c(r)}}.$$

Таким образом,

$$Sk^{c_9(r)} \gg_r n^{1-1/r-\varepsilon}. \quad (38)$$

Далее,

$$\sum_{d > N} \left(\left[\frac{n+k}{d^m} \right] - \left[\frac{n}{d^m} \right] \right) = \sum_{s, d, n < d^m s \leq n+k, d > N} 1.$$

Если положить $v = d^m s$, то

$$S(v) \leq ds = \frac{v}{d^{m-1}} \leq \frac{2n}{N^{m-1}}.$$

Из доказанной ранее оценки (38) следует, что если $nk^{c_{10}(\varepsilon)}/N^{m-1} \ll n^{1-\varepsilon}$, то есть, если $N^{m-1} \gg k^{c_{10}(\varepsilon)}n^\varepsilon$, то существует только $O(1)$ чисел v , удовлетворяющих условию $S(v) \leq 2n/N^{m-1}$. Поэтому

$$\sum_{d > N} \left(\left[\frac{n+k}{d^m} \right] - \left[\frac{n}{d^m} \right] \right) \leq \sum_{n < v \leq n+k, S(v) \leq 2n/N^{m-1}} d(v) \ll n^\varepsilon,$$

где $d(v)$ — количество натуральных делителей числа v .

6. Доказательство теоремы 5

Заметим сначала, что

$$S(n+1) \dots S(n+k) = \prod_{t, p, n < t \leq n+k, p|t} p = \prod_p p^{[(n+k)/p] - [n/p]}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} S(n+1) \dots S(n+k) &= S((n+1) \dots (n+k)) \prod_{p \leq k} p^{[(n+k)/p] - [n/p] - 1} \\ &= e^{k \ln k + O(k)} S((n+1) \dots (n+k)). \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$P(t) = \prod_{p \leq t} p, \quad p_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ — бесквадратное число,} \\ \max_{p^2 | t} p & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$N_p = \sum_{n < t \leq n+k, p_2(t)=p} 1, \quad N(\Lambda) = \sum_{n < t \leq n+k, p_2(t) > \Lambda} 1,$$

где $\Lambda \geq 2$ — произвольное число.

Из очевидных неравенств $t/P(p_2(t)) \leq S(t) \leq t/p_2(t)$ следуют неравенства

$$S(n+1) \dots S(n+k) \leq (n+1) \dots (n+k) \Lambda^{-N(\Lambda)},$$

$$S(n+1) \dots S(n+k) \geq (n+1) \dots (n+k) \prod_{p \leq \Lambda} P(p)^{-N_p} (n+k)^{-N(\Lambda)}.$$

Замечая, что $\ln P(p) \asymp p$ и

$$N_p = \sum_t 1 \leq \frac{k}{p^2} + 1,$$

где суммирование проводится по таким t , что $n/p^2 < t \leq (n+k)/p^2$ и l^2 не делит t при $l > p$, получаем, что

$$S - k \ln \frac{n}{k} \leq -N(\Lambda) \ln \Lambda + O(k), \quad (39)$$

$$S - k \ln \frac{n}{k} \geq -N(\Lambda) \ln n + O(k \ln \Lambda). \quad (40)$$

Из тождества для производящего ряда Дирихле

$$\prod_{p \leq \lambda} (1 - p^{-s})^{-1} \prod_{p > \lambda} (1 + p^{-s}) = \prod_p (1 + p^{-s}) \prod_{p \leq \lambda} (1 - p^{-2s})^{-1},$$

где λ — произвольное число такое, что $2 \leq \lambda \leq \Lambda$, следует тождество

$$\begin{aligned} N(\Lambda) &= k - \sum_{n < t \leq n+k, p_2(t) \leq \Lambda} 1 \\ &= k - \sum_{p(d) \leq \lambda} \left(S_2 \left(\frac{n+k}{d^2} \right) - S_2 \left(\frac{n}{d^2} \right) \right) - \sum_{\lambda < p \leq \Lambda} N_p \\ &= k \left(1 - \prod_{p > \lambda} (1 - p^2) \right) \\ &\quad - \sum_{p(d) \leq \lambda} \left(S_2 \left(\frac{n+k}{d^2} \right) - S_2 \left(\frac{n}{d^2} \right) - \frac{6k}{\pi^2 d^2} \right) - \sum_{\lambda < p \leq \Lambda} N_p. \end{aligned}$$

Кратность, с которой простое число p входит в d , очевидно, не превосходит $\ln d / \ln p$, откуда следует неравенство

$$\sum_{d^2 \leq n+k, p(d) \leq \lambda} 1 \leq \prod_{p \leq \lambda} \frac{\ln n}{\ln p}$$

и оценка

$$N(\Lambda) = - \sum_{d \leq \lambda} \left(S_2 \left(\frac{n+k}{d^2} \right) - S_2 \left(\frac{n}{d^2} \right) - \frac{6k}{\pi^2 d^2} \right) + O \left((\ln n)^{\pi(\lambda)} \right) + O(k/\lambda) + O(\Lambda).$$

Заметим, что

$$S_2(n+k) - S_2(n) \leq \frac{6k}{\pi^2} + O \left(\frac{k}{\ln k} \right)$$

для любых $n \geq 2$, $k \geq 10$. Действительно, при $z = \ln k$

$$\begin{aligned} S_2(n+k) - S_2(n) &\leq \sum_{\substack{n < t \leq n+k, \\ p^2 \nmid t \text{ for } p \leq z}} 1 \\ &= \sum_{d|P(z)} \mu(d) \sum_{\substack{n < t \leq n+k, \\ d^2 \nmid t}} 1 \\ &= \sum_{d|P(z)} \mu(d) (k/d^2 + O(1)) \\ &= k \prod_{p \leq z} (1 - p^{-2}) + O(2^{\pi(z)}) \\ &= \frac{6k}{\pi^2} + O(k/\ln k). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$N(\Lambda) = \sum_{d \leq \ln k / \ln \ln n} \left| S_2 \left(\frac{n+k}{d^2} \right) - S_2 \left(\frac{n}{d^2} \right) - \frac{6k}{\pi^2 d^2} \right| + O(\Lambda) + O \left(\frac{k}{\ln k} \ln \ln n \right)$$

при

$$k \geq (\ln n)^c, \quad \lambda = \ln k / \ln \ln n.$$

Осталось выбрать $\Lambda = k/\ln k$ в неравенстве (39) и $\Lambda = \ln k$ в неравенстве (40).

При $k \leq (\ln n)^c$ утверждение теоремы тривиально.

Список литературы

1. Эрдеши П., Некоторые проблемы теории чисел. В сб. *Вычисления в алгебре и теории чисел*. Мир, Москва, 1976, 202–212.
2. Ramachandra K., Largest prime factor of the product of k consecutive integers. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова* (1973) **132**, 77–81.
3. Turck J., Prime divisors of polynomials at consecutive integers. *J. reine und angew. Math.* (1980), **319**, 142–152.
4. Shorey T. N., On linear form in the logarithms of algebraic numbers. *Acta Arithmetica* (1976) **31**, №1, 27–41.
5. Ramachandra K., Shorey T. N., Tijdeman R., On Grimm's problem relating to factorization of a block of consecutive integers, II. *J. reine und angew. Math.* (1976) **288**, 199–201.

6. Erdős P., Turk J., Products of integers in short intervals. *Acta Arithmetica* (1984), **44**, №2, 147–174.
7. Спринджук В. Г., *Классические диофантовы уравнения от двух переменных*. Наука, Москва, 1982.
8. Ходжаев Н. М., Задача В. Г. Спринджук о бесквадратной части произведения последовательных натуральных чисел. *Вестник МГУ* (1997), № 1, 3–7.
9. Lang S., Old and new conjectured Diophantine inequalities. *Bulletin Amer. Math. Soc.* (1990) **23**, №1, 35–75.
10. Shinzel A., Tijdeman R., On the equation $y^m = P(x)$. *Acta Arithmetica* (1976) **31**, No 2, 199.
11. Granville A., Powerful numbers and Fermat's last theorem. *Math. Rept. Acad. Sci. Can.* (1986) **8**, № 3, 215–218.
12. Hall R. R., Squarefree numbers on short intervals. *Mathematika* (1982) **29**, № 1, 7–17.
13. Sárközy A., On divisors of binomial coefficients, I. *J. Number Theory* (1985) **20**, № 1, 70–80.
14. Erdős P., Nicolas J.-L., Sur la fonction: Nombre de facteurs premiers de N . *Enseign. Math., II Sér.* (1981) **27**, 3–27.

Статья поступила 28.10.2002.