Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Шевченко, Характеристические многочлены много-
индексных транспортных задач, *Дискрет. матем.*, 2003,
том 15, выпуск 2, 83–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:00:18

Характеристические многочлены многоиндексных транспортных задач

© 2003 г. В. Н. Шевченко

Для матрицы $A^T A$, где A — матрица ограничений многоиндексной транспортной задачи, найдены характеристический многочлен и базис из собственных векторов. Обсуждаются возможные применения полученных результатов.

1. Для исследования миноров n -го порядка $n \times m$ матрицы A , $n \leq m$, используется формула Бине–Коши (см., например, [1]), утверждающая, в частности, что

$$s_n(A) = \det A A^T$$

есть сумма квадратов всех миноров n -го порядка матрицы A . Если $s_n(A)$ удастся вычислить (или хотя бы оценить), то этот прием позволяет оценить среднее значение квадрата минора матрицы A . Например, в [2] это сделано для матрицы, столбцами которой являются всевозможные векторы, содержащие k единиц и $n - k$ нулей, и некоторых других матриц.

Разумеется, если ранг r матрицы A меньше n , то $s_n(A) = 0$ и для получения нетривиальной информации о базисных минорах r -го порядка матрицы A следует удалить линейно зависимые строки. Именно так Симмонард и Хедли нашли число базисов в транспортной задаче (см., например, [3]). Однако при этом может нарушиться структура задачи, за счет которой, собственно говоря, и удается найти $s_n(A)$. В такой ситуации может оказаться полезным характеристический многочлен матрицы $A A^T$

$$\det(\lambda E - A A^T) = \sum_{j=0}^n (-1)^j s_j(A) \lambda^{n-j}. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что

$$s_j(A) = \sum_{I, J} (\det A(I, J))^2,$$

где суммирование ведется по всем j -элементным подмножествам $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ и $J \subseteq \{1, \dots, m\}$, а $A(I, J)$ — подматрица матрицы A со строками из множества I и столбцами из множества J .

Заметим, что иногда (например, в предлагаемой работе) удобнее использовать столь же информативный характеристический многочлен матрицы $A^T A$, связанный с (1) формулой

$$\det(\lambda E - A^T A) = \lambda^{m-n} \det(\lambda E - A A^T). \quad (2)$$

Еще одно применение можно указать, если известен базис $Q = \{q_1, \dots, q_m\}$ из собственных векторов матрицы $A^T A$. Так как условия $A^T A x = 0$ и $A x = 0$, очевидно, равносильны, то, выбрав из Q все векторы, соответствующие нулевому собственному значению, получим базис пространства решений системы $A x = 0$.

Следует отметить, что в теории графов успешно развивается целое направление, связанное с изучением характеристического многочлена матрицы смежности графа (см. монографию [4]).

В предлагаемой работе для матрицы $A = A(s; n_1, \dots, n_k)$ ограничений k -индексной s -валентной транспортной задачи найдены базис из собственных векторов, спектр (то есть набор собственных чисел и их кратностей) и характеристический многочлен $\Delta(\lambda; s; n_1, \dots, n_k)$ матрицы $A^T A$.

2. Ограничения-равенства k -индексной s -валентной транспортной задачи (см., например, [3]) с неотрицательными переменными $x_{j_1 \dots j_k}$, $j_\nu = 1, \dots, n_\nu$, $\nu = 1, \dots, k$, можно записать в виде

$$\sum_{j_{i_1}=1}^{n_{i_1}} \dots \sum_{j_{i_s}=1}^{n_{i_s}} x_{j_1 \dots j_k} = b(J(I)), \quad (3)$$

где $J(I) = (j_1, \dots, j_{i_1-1}, 0, j_{i_1+1}, \dots, j_{i_2-1}, 0, j_{i_2+1}, \dots, j_{i_s-1}, 0, j_{i_s+1}, \dots, j_k)$ для всех $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ таких, что $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k$ и всех $j_\mu \in \{1, \dots, n_\mu\}$ при $\mu \notin I$. Таким образом, переменная $x_{j_1 \dots j_k}$ входит в уравнение, соответствующее $J(I)$, тогда и только тогда, когда $j'_\nu = j_\nu$ для каждого $\nu \notin I$.

Положим $a(J(I), J') = 1$, если $j'_\nu = j_\nu$ для каждого $\nu \notin I$, и $a(J', J(I)) = 0$ в противном случае. Тогда уравнение (3) можно переписать в виде

$$\sum_{J'} a(J(I), J') x'_{J'} = b(J(I)), \quad (4)$$

где суммирование ведется по всем $J' = \{j'_1, \dots, j'_k\}$ таким, что $j'_\nu \in \{1, \dots, n_\nu\}$, $\nu = 1, \dots, k$.

Будем говорить, что набор $J' = \{j'_1, \dots, j'_k\}$ лексикографически предшествует набору $J'' = \{j''_1, \dots, j''_k\}$ (в этом случае пишем $J' < J''$), если найдется такое $\nu \in \{1, \dots, k\}$, при котором $j'_1 = j''_1, \dots, j'_{\nu-1} = j''_{\nu-1}$ и $j'_\nu < j''_\nu$. Это отношение линейно упорядочивает индексы J' переменных и $J(I)$ уравнений. Ясно, в частности, что если $I' < I''$, то $J'(I') < J''(I'')$.

Обозначим через $A(s; n_1, \dots, n_k)$ матрицу, составленную из элементов $a(J', J(I))$ при лексикографическом упорядочивании наборов индексов. Зафиксировав I , рассмотрим ее подматрицу $A(I; n_1, \dots, n_k)$ со строками из всевозможных $J(I)$. Для ее описания удобно воспользоваться кронекеровым произведением матриц (определение и свойства см., например, в [1]). Напомним, что кронекеровым произведением $A \times B$ прямоугольных матриц A и B размеров $n \times t$ и $p \times q$ соответственно называется матрица C размера (np, tq) следующего блочного строения:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $I(m, n)$ матрицу размера $m \times n$, каждый элемент которой равен 1, а через E_n — единичную матрицу n -го порядка.

Лемма 1. Для любых $s = |I|$ и k таких, что $0 \leq s \leq k$, справедливо равенство

$$A(I; n_1, \dots, n_k) = A_I(1, n_1) \times \dots \times A_I(k, n_k), \quad (5)$$

где $A_I(v, n_v) = I(1, n_v)$ при $v \in I$ и $A_I(v, n_v) = E_{n_v}$ при $v \notin I$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по k . При $k = 1$ утверждение очевидно, так как для $s = 0$ система (3) превращается в систему $x_{j_1} = b_{j_1}$, $j_1 = 1, \dots, n_1$, а для $s = 1$ получаем одно уравнение

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} x_{j_1} = b_0.$$

Предположив, что утверждение доказано для $k - 1$, докажем его для k . Если $k \in I$, то $a(J(I), J') = 1$ при $j'_k \in \{1, \dots, n_k\}$, следовательно,

$$A(I; n_1, \dots, n_k) = A(I; n_1, \dots, n_{k-1}) \times I(1, n_k).$$

Если же $k \notin I$, то $a(J(I), J') = 0$ при $j'_k \neq j_k$ и, следовательно,

$$A(I; n_1, \dots, n_k) = A(I; n_1, \dots, n_{k-1}) \times E_{n_k}.$$

Лемма 2. Если $A = A(I; n_1, \dots, n_k)$, то

$$A^T A = B_I(1, n_1) \times \dots \times B_I(k, n_k), \quad (6)$$

где $B_I(v, n_v) = I(n_v, n_v)$ при $v \in I$ и $B_I(v, n_v) = E_{n_v}$ при $v \notin I$.

Доказательство следует из формулы (5) и следующих свойств кронекерова произведения: $(A \times B)(C \times D) = AC \times BD$ и $(A \times B)^T = A^T \times B^T$.

Пусть

$$Q_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

— матрица n -го порядка и q_j — ее j -й столбец. Нетрудно проверить, что

$$I(n, n)q_j = \lambda_j q_j,$$

где $\lambda_j = n$ при $j = 1$ и $\lambda_j = 0$ при $j = 2, \dots, n$. Так как $\det Q_n = (-1)^{n+1}n$, столбцы матрицы Q_n составляют базис из собственных векторов матрицы $I(n, n)$. Разумеется, собственные векторы можно выбирать и по-другому, однако предложенный способ дает целочисленную и симметричную матрицу Q_n .

Лемма 3. Столбцы матрицы $Q = Q_{n_1} \times \dots \times Q_{n_k}$ составляют базис из собственных векторов матрицы $A^T A$, где $A = A(I; n_1, \dots, n_k)$.

Доказательство. Для доказательства леммы рассмотрим при любом $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ столбец $q_J = q_{j_1} \times \dots \times q_{j_k}$ матрицы Q и покажем, что $A^T A q_J = \mu_J^I q_J$. Из формулы (6) следует, что

$$A^T A q_J = (B_I(1, n_1) q_{j_1}) \times \dots \times (B_I(k, n_k) q_{j_k}).$$

Если найдется $v \in I$ такое, что $j_v > 1$, то

$$B_I(v, n_v) q_{j_v} = I(n_v, n_v) q_{j_v} = 0,$$

и следовательно, $\mu_J^I = 0$. В противном случае $B_I(v, n_v) q_{j_v} = n_v q_v$ при $v \in I$ и $B_I(v, n_v) q_{j_v} = q_{j_v}$ при $v \notin I$, следовательно, $A^T A q_J = \mu_J^I q_J$, где

$$\mu_J^I = \prod_{i \in I} n_{j_i}.$$

Теорема 1. Если $A = A(s; n_1, \dots, n_k)$ — матрица k -индексной s -валентной транспортной задачи, то столбцы матрицы $Q = Q_{n_1} \times \dots \times Q_{n_k}$ составляют базис из собственных векторов матрицы $A^T A$.

Для любого $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ собственное число μ_J , соответствующее столбцу $q_J = q_{j_1} \times \dots \times q_{j_k}$, вычисляется по формуле

$$\mu_J = \sigma_s(\lambda(1, j_1), \dots, \lambda(k, j_k)), \quad (7)$$

где

$$\sigma_s(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_s}$$

— s -я элементарная симметрическая функция от $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $\sigma_0(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 1$, и для $v = 1, \dots, k$

$$\lambda(v, i_v) = \begin{cases} n_v & \text{при } j_v = 1, \\ 0 & \text{при } j_v = 2, \dots, n_v. \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства заметим, во-первых, что

$$A^T A = \sum_I A^T(I; n_1, \dots, n_k) A(I; n_1, \dots, n_k),$$

где суммирование ведется по всем s -элементным подмножествам множества $\{1, \dots, k\}$. Отсюда и из леммы 2 следует, что

$$A^T A = \sum_I B_I(1, n_1) \times \dots \times B_I(k, n_k).$$

Воспользовавшись леммой 3, получаем доказательство первого утверждения, так как

$$A^T A q_J = \sum_I \mu_J^I q_J.$$

Используя полученное в лемме 3 выражение для μ_J^I , нетрудно проверить, что

$$\mu_J^I = \prod_{i \in I} \lambda(i, j_i),$$

откуда следует второе утверждение теоремы.

Следствие 1. *Базис пространства решений системы линейных уравнений*

$$A(s; n_1, \dots, n_k)x = 0 \quad (8)$$

состоит из столбцов матрицы $Q = Q_{n_1} \times \dots \times Q_{n_k}$, соответствующих наборам $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, содержащим не более $s - 1$ единиц. Их число $t = t(s; n_1, \dots, n_k)$ равно

$$\sum_{i=0}^{s-1} \sigma_{k-i}(n_1 - 1, \dots, n_k - 1) = \prod_{j=1}^k n_j - \sum_{i=s}^k \sigma_{k-i}(n_1 - 1, \dots, n_k - 1).$$

В частности, для планарной задачи

$$t(1; n_1, \dots, n_k) = \prod_{j=1}^k (n_j - 1),$$

а для аксиальной

$$t(k - 1; n_1, \dots, n_k) = \prod_{j=1}^k n_j - \sum_{j=1}^k n_j + k - 1.$$

Следствие 2. *Пусть $M \subseteq \{1, \dots, k\}$, $|M| \geq s$. Тогда*

$$\sigma_s^M = \sum_{I \subseteq M} \prod_{j \in I} n_j,$$

где суммирование ведется по всем s -элементным подмножествам I множества M , является ненулевым собственным значением кратности

$$\prod_{j \notin M} (n_j - 1)$$

и других ненулевых собственных значений нет.

Полученные результаты позволяют находить характеристический многочлен $\Delta(\lambda; s; n_1, \dots, n_k)$. Например, для аксиальной задачи

$$\Delta(\lambda; k - 1; n_1, \dots, n_k) = \lambda^{t(k-1; n_1, \dots, n_k)} \left(\lambda - \sum_{i=1}^k \prod_{j \neq i} n_j \right) \prod_{i=1}^k \left(\lambda - \prod_{j \neq i} n_j \right)^{(n_i - 1)}.$$

Дальше для упрощения формул будем считать, что $n_1 = \dots = n_k = n$. Положим $\triangle(\lambda; s, k, n) = \Delta(\lambda; s; n_1, \dots, n_k)$, если $n_1 = \dots = n_k = n$.

Следствие 3. *Справедливо равенство*

$$\triangle(\lambda; s, k, n) = \lambda^{\sum_{i=0}^{s-1} \binom{k}{i} (n-1)^{k-i}} \prod_{j=s}^k \left(\lambda - \binom{j}{s} n^s \right)^{\binom{k}{j} (n-1)^{k-j}}. \quad (9)$$

Из (9) для аксиальных задач следует, что

$$\Delta(\lambda; k-1, k, n) = \lambda^{n^k - kn + k - 1} (\lambda - kn^{k-1})(\lambda - n^{k-1})^{k(n-1)}$$

и, значит, сумма квадратов ранговых миноров (порядок которых равен рангу r матрицы A , в данном случае $r = k(n-1) + 1$) равна $kn^{(k-1)(k(n-1)+1)}$. Отсюда нетрудно получить, что при $k \geq 3$ средняя величина квадратов рассматриваемых миноров с ростом n стремится к бесконечности с экспоненциальной скоростью. Этот результат получен в кандидатской диссертации А. П. Ильичева [5] другим способом.

Путь, предлагаемый здесь, позволит получать результаты для произвольного s и для миноров меньшего, чем r порядка.

Список литературы

1. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А., *Матрицы и вычисления*. Наука, Москва, 1984.
2. Шевченко В. Н., *Качественные вопросы целочисленного программирования*. Наука, Москва, 1995.
3. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, Москва, 1981.
4. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х., *Спектры графов. Теория и применение*. Наукова думка, Киев, 1984.
5. Ильичев А. П., *Исследование многогранников многоиндексных транспортных задач*. Диссерт. на соискание степени канд. физ.-мат. наук. Горький, 1988.

Статья поступила 11.02.2002.