Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ролдугин, Построение максимально негамильтоновых графов, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 2, 89–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:53:48

Построение максимально негамильтоновых графов

© 2003 г. П. В. Ролдугин

В данной работе изучаются максимально негамильтоновы графы (МНГ графы), то есть негамильтоновы графы, в которые нельзя добавить ребро без нарушения негамильтоновости. Даны правила построения МНГ графов, которые позволяют, пользуясь МНГ графами с определенными свойствами, получать МНГ графы большего порядка.

1. Введение

Гамильтоновым графом называется граф, в котором существует простой цикл, проходящий по всем вершинам графа (гамильтонов цикл). Графы, в которых такой цикл отсутствует, называются негамильтоновыми. Отметим, что мы рассматриваем только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Используемые здесь термины (помеченный и непомеченный граф, порядок графа, простая цепь, полный граф, максимальная клика) можно найти в [1].

Определение 1. Граф G будем называть максимально негамильтоновым графом (сокращенно, МНГ графом), если выполнены два условия:

- (1) граф G негамильтонов;
- (2) при добавлении хотя бы одного ребра, инцидентного любой паре несмежных вершин, граф G становится гамильтоновым.

Гамильтоновой цепью называется простая цепь, содержащая все вершины графа. Из определения легко вытекает следующее характеризующее свойство МНГ графа.

Лемма 1. *Негамильтонов граф является МНГ графом тогда и только тогда, когда для любой пары несмежных вершин существует гамильтонова цепь, их соединяющая.*

МНГ графы ранее рассматривались в работах автора [2, 3]. Кроме того, некоторые свойства МНГ графов изучались в [4, 5].

Задача вычисления максимальной трудоемкости для существующих переборных алгоритмов проверки гамильтоновости является весьма сложной: для большинства методов она остается нерешенной. В этом случае допустимо использовать экспериментальные данные, однако, возникает проблема построения графов, на которых предложенные методы имели бы трудоемкость, близкую к максимальной. В [6] предлагался следующий подход: рассматривался какой-нибудь алгоритм поиска гамильтонова цикла и, исходя из

особенностей этого алгоритма, строились сложные графы, на которых именно этот алгоритм работает сравнительно долго (то есть с трудоемкостью, близкой к максимальной). Однако, в этой же работе указаны и недостатки такого подхода: во-первых, алгоритм нетрудно модифицировать, чтобы он на предложенных графах работал заметно быстрее; во-вторых, как правило, другие алгоритмы со сложными графами справляются без труда. Предложим другой подход: станем использовать для получения экспериментальных оценок трудоемкости переборных алгоритмов в худшем случае максимально негамильтоновы графы. Поскольку все известные алгоритмы поиска гамильтонова цикла (за исключением полного перебора) зависят от числа ребер в графе, то можно предположить, что максимально негамильтоновы графы являются наиболее трудоемкими для проверки (или, по крайней мере, трудоемкости на таких графах будут близкими к максимальным значениям практически для всех переборных алгоритмов).

Максимально негамильтонов граф произвольного порядка n построить достаточно легко. Для этого можно воспользоваться графом, разложение на максимальные клики которого выглядят следующим образом: одна клика порядка $n - k$ и одна клика порядка $k + 1$, причем пересекаются эти клики по одной вершине. Такой граф имеет достаточно бедную структуру максимальных клик, поэтому установление его негамильтоновости очевидно. Построить максимально негамильтонов граф с более сложной структурой максимальных клик (в частности, граф, который не является односвязным) уже не так просто. В настоящей работе приведены операции, которые позволяют с помощью максимально негамильтоновых графов с определенными свойствами, получать новый максимально негамильтонов граф (так называемые правила вывода). Эти правила вывода являются прямыми в том смысле, что новый граф имеет больший порядок, чем каждый из начальных графов. Всего предложено пять прямых правил вывода.

2. Основные определения и обозначения

При изложении результатов работы удобно придерживаться следующих обозначений. Цепь в графе будем записывать как последовательность вершин $\bar{a} = a_1 a_2 \dots a_r$, предполагая, что любые две вершины $a_i a_{i+1}$, $i = 1, \dots, r - 1$ смежны. При этом запись $b_1 b_2 \bar{a} b_3$ означает цепь $b_1 b_2 a_1 a_2 \dots a_r b_3$, а запись $\bar{a}^{-1}$ означает цепь $a_r a_{r-1} \dots a_1$. Напомним, что простой цепью называется цепь, в которой различны все вершины, кроме, возможно, крайних. Будем говорить, что простая цепь $\bar{t}$ содержит отрезок $\bar{t}'$, если $\bar{t}'$ — подцепь цепи $\bar{t}$. Любую клику в графе будем отождествлять с ее множеством вершин, то есть выражение “в графе G существует клика $\{a_1, \dots, a_r\}$ ” означает, что любые две не совпадающие вершины из $\{a_1, \dots, a_r\}$ смежны. Поскольку ниже используются только максимальные клики графа, то слово максимальная иногда будем опускать.

В данной работе используется несколько новых понятий, определяемых ниже, таких, как основание графа, сильное пересечение максимальных клик, собственная вершина клики, проходная, опорная и соединительная клики, проходная пара вершин.

Пересечение всех максимальных клик в графе G назовем основанием T_G графа G . Отметим несколько свойств основания, используемых в доказательствах данной работы. Прежде всего основание графа есть полный граф. Если граф не является полным, то никакая его максимальная клика полностью не лежит в основании. Доминирующей вершиной графа (см. [1]) называется вершина, смежная со всеми остальными вершинами графа. Легко видеть, что множество всех доминирующих вершин совпадает с множеством вершин основания графа. Любую простую цепь из x в y в графе G можно записать

Рис. 1.

в виде

$$x\bar{t}_1z_1\bar{t}_2z_2\ldots\bar{t}_rz_r\bar{t}_{r+1}y,$$

где $z_1, \dots, z_r, r \geq 0$, — некоторые вершины, принадлежащие основанию графа G ; простые цепи $\bar{t}_i$ могут быть пустыми; при этом отрезки $\bar{t}_i, 1 < i < r + 1$, можно как угодно переставлять между собой, получая простые цепи из x в y той же длины.

Если не существует вершины, лежащей в каждой из максимальных клик графа G , то будем говорить, что основание графа G пусто.

Множество всех вершин, принадлежащих пересечению множеств вершин двух различных максимальных клик K_1 и K_2 и не лежащих в основании графа, назовем сильным пересечением клик K_1 и K_2 . Если сильное пересечение не пусто, то будем говорить, что клики K_1 и K_2 сильно пересекаются.

Максимальную клику, которая сильно пересекается только с одной максимальной кликой графа, назовем опорной кликой. Если клика K сильно пересекается с опорными кликами $L_1, \dots, L_r$ и $r \geq 1$, то клику K назовем соединительной кликой; в этом случае говорят, что клика K соединяет клики $L_1, \dots, L_r$.

Вершину максимальной клики графа будем называть собственной вершиной клики, если она не принадлежит никакой другой максимальной клике.

Максимальную клику K назовем проходной кликой графа G , если из существования гамильтонова цикла в графе G следует существование гамильтонова цикла, проходящего хотя бы по одному ребру клики K , и из существования гамильтоновой цепи между двумя несмежными вершинами графа G следует существование гамильтоновой цепи между этими вершинами, причем проходящей хотя бы по одному ребру из клики K .

Две смежные вершины k_1, k_2 графа G назовем проходной парой вершин, если между любыми двумя несмежными вершинами a и b , соединенными гамильтоновой цепью в графе G , существует гамильтонова цепь, проходящая по ребру (k_1, k_2) .

Для наглядности приведем несколько примеров. Графы G_1 и G_2 , изображенные на рис. 1, являются МНГ графами порядка 7 и 9 соответственно.

В графе G_1 максимальными кликами являются

$$\{a, b, c\}, \quad \{e, d, c\}, \quad \{f, g, c\}, \quad \{a, e, f, c\};$$

первые три клики имеют собственные вершины b, d, g соответственно; четвертая клика $\{a, e, f, c\}$ не имеет собственных вершин; основание графа G_1 состоит из одной вершины c ; все максимальные клики графа G_1 являются проходными; соединительная клика $\{a, e, f, c\}$ соединяет опорные клики $\{a, b, c\}, \{e, d, c\}, \{f, g, c\}$; пары вершин $\{a, b\}, \{d, e\}, \{f, g\}$ образуют проходные пары вершин.

В графе G_2 максимальными кликами являются

$$\{a, c, g\}, \quad \{e, d, h\}, \quad \{b, f, i\}, \quad \{a, e, b\}, \quad \{g, h, i\};$$

первые три клики имеют собственные вершины c, d, f соответственно; клики $\{a, e, b\}, \{g, h, i\}$ собственных вершин не имеют; основание графа G_2 пусто; все максимальные клики графа G_2 являются проходными. Из всех пар смежных вершин проходными не являются пары $\{a, g\}, \{e, h\}, \{b, i\}$.

3. Основные леммы

Рассмотрим ряд зависимостей, возникающих среди введенных выше объектов. Докажем следующую лемму.

Лемма 2. (1) *В сильном пересечении опорной и соединительной клик МНГ графа лежит только одна вершина.*

(2) *Если клика содержит собственную вершину, то она является проходной кликой.*

(3) *Опорная клика имеет собственную вершину.*

(4) *Если соединительная клика соединяет не менее двух различных опорных клик, то она является проходной кликой.*

(5) *Любые две собственные вершины максимальной клики образуют проходную пару вершин.*

Доказательство. В статье [3] доказано, что если в графе G пересечение двух максимальных клик содержит две вершины, не принадлежащие никаким другим максимальным кликам, то граф G не является МНГ графом. Из этого, очевидно, следует утверждение пункта 1.

Если клика K имеет собственную вершину b , то любая гамильтонова цепь или гамильтонов цикл в графе должны содержать отрезок b_1bb_2 , где b_1, b_2 — различные вершины клики K , отличные от b . Таким образом, в гамильтоновой цепи присутствует ребро (b_1, b) , то есть клика K является проходной. Утверждение пункта 2 доказано.

Если опорная клика не имеет собственной вершины, то каждая из ее вершин лежит либо в основании графа, либо в сильном пересечении с некоторой одной кликой K . Следовательно, вся опорная клика является подграфом клики K , что противоречит максимальности опорной клики. Утверждение пункта 3 доказано.

Пусть K — соединительная клика графа G . Пусть в графе G существует гамильтонова цепь из x в y . Если вершины x и y лежат в клике K , то речь идет о гамильтоновом цикле,

который проходит по ребру (x, y) , принадлежащему клике K . Предположим, что вершина x не лежит в клике K . Тогда найдется такая опорная клика L , сильно пересекающаяся с K , что вершина a , лежащая в сильном пересечении клик L и K , не совпадает ни с x , ни с y . Действительно, вершина a не может совпадать с x , поскольку x не лежит в K . С другой стороны, если вершина a совпадает с y , то вместо a рассмотрим вершину, лежащую в сильном пересечении K и другой опорной клики (по условию опорных клик, соединяемых K , существует не менее двух, и эти опорные клики не имеют сильного пересечения). Поскольку a не совпадает ни с x , ни с y , гамильтонова цепь содержит один из отрезков k_1ak_2 , где k_1, k_2 лежат в клике K ; kab , где k лежит в клике K , b — в клике L ; $z\bar{t}a\bar{t}'z'$, где z, z' принадлежат основанию, цепи $\bar{t}, \bar{t}'$ состоят только из собственных вершин клики L (возможно одна или обе эти цепи пусты). В первом и втором случаях указанные отрезки содержат ребро из клики K , а именно, (k_1, a) и (k, a) , соответственно. В третьем случае указанный отрезок можно преобразовать к виду $z\bar{t}\bar{t}'az'$, который содержит ребро (a, z') из клики K . Следовательно, клика K является проходной. Утверждение пункта 4 доказано.

Перейдем к доказательству утверждения пункта 5. Пусть k_1 и k_2 — собственные вершины максимальной клики K . Предположим, что несмежные вершины a и b соединены гамильтоновой цепью. Без ограничения общности считаем, что вершина b отлична от вершин k_1, k_2 . Тогда гамильтонова цепь (возможно, после упорядочивания вершин k_1 и k_2) имеет вид

$$a\bar{t}k_1\bar{t}_1k_2\bar{t}_2b, \quad (1)$$

если вершина a отлична от k_1 , и вид

$$k_1\bar{t}_1k_2\bar{t}_2b, \quad (2)$$

когда вершины a и k_1 совпадают. В обоих случаях, поскольку k_2 — собственная вершина клики K , последняя вершина цепи $\bar{t}_1$ и первая вершина цепи $\bar{t}_2$ обязаны принадлежать клике K , то есть являются смежными вершинами. Тогда цепь (1) можно преобразовать к виду $a\bar{t}k_1k_2\bar{t}_1\bar{t}_2b$, а цепь (2) — к виду $k_1k_2\bar{t}_1\bar{t}_2b$. Утверждение пункта 5 доказано, что завершает доказательство леммы.

Выделим класс МНГ графов, имеющих точку сочленения, то есть такую вершину v , что удаление v и инцидентных ей ребер из графа G приводит к несвязному графу.

Лемма 3. Если G — МНГ граф, имеющий точку сочленения v , то в G существуют только две различные максимальные клики K_1 и K_2 , причем имеющие единственную общую вершину v .

Доказательство. Так как любые две несмежные вершины в МНГ графе соединены гамильтоновой цепью, МНГ граф связан. Поскольку v — точка сочленения графа G , удаляя вершину v и инцидентные ей ребра, получаем компоненты связности $G_1, \dots, G_r, r > 1$. Множество вершин графа G , отличных от v , можно разделить на два непустых непересекающихся множества V_1 и V_2 , соединяющих компоненты связности только целиком. Любая цепь в графе G , соединяющая вершину из V_1 и вершину из V_2 , обязательно проходит через v . Поэтому нет гамильтоновых цепей, соединяющих две вершины из $V_1 \cup \{v\}$, и следовательно, $V_1 \cup \{v\}$ — клика в G . Аналогично, $V_2 \cup \{v\}$ — клика в G . Очевидно, что эти две клики максимальны в G и других максимальных клик нет.

Лемма доказана.

4. Правила вывода

Перейдем к изложению правил вывода МНГ графов, то есть операций, которые позволяют из МНГ графов с определенными свойствами получать МНГ графы большего порядка.

Правило 1 (добавление собственной вершины). Пусть в графе G есть максимальная клика K . Добавим в граф G вершину a , соединив ее ребрами со всеми вершинами клики K и только с ними.

Предложение 1. Пусть $K_1, \dots, K_r$ — все максимальные клики графа G . Применим к графу G Правило 1, взяв в качестве клики K клику K_1 . Тогда разложение на максимальные клики полученного графа H будет следующим: $K_1 \cup \{a\}, K_2, \dots, K_r$. Кроме того, если граф G является МНГ графом и клика K_1 является проходной, то H — МНГ граф.

Доказательство. Вид разложения на максимальные клики графа H очевидно вытекает из описания Правила 1. Эту часть доказательства, как очевидную, мы будем опускать во всех приведенных в данной статье правилах вывода.

Пусть G — МНГ граф и клика K — проходная клика. Докажем, что граф H негамильтонов. Действительно, если граф H гамильтонов, то существует гамильтонов цикл $\bar{i}$, который содержит отрезок kak' , где k, k' — вершины клики K . Заменив в цикле $\bar{i}$ отрезок kak' на отрезок kk' , получаем гамильтонов цикл в графе G , что противоречит его негамильтоновости.

Далее, пусть x, y — две несмежные вершины графа G . Покажем, что в графе H их соединяет гамильтонова цепь. Существует гамильтонова цепь $x\bar{i}y$ в графе G , которая обязана содержать ребро (k, k') , где k, k' — вершины клики K . Заменив в $\bar{i}$ отрезок kk' на цепь kak' , получим требуемую цепь в графе H . Остается доказать, что существует гамильтонова цепь в графе H между вершинами x и a , где x — вершина G , не лежащая в клике K . Пусть y — любая вершина клики K графа G , не смежная с x . Тогда в G существует гамильтонова цепь $\bar{i}$, соединяющая x и y . Цепь $\bar{i}a$ есть искомая гамильтонова цепь в графе H между вершинами x и a .

Следовательно, в графе H между любыми двумя несмежными вершинами существует гамильтонова цепь и граф H негамильтонов. Это означает, что H — МНГ граф. Утверждение доказано.

Скажем несколько слов о возможности обобщения предложения 1. Вообще говоря, применяя Правило 1 к максимальной клике, не являющейся проходной, мы не получим МНГ граф (точнее мы получим негамильтонов, но не обязательно МНГ граф). Легко привести пример негамильтонова графа с максимальной кликой, не являющейся проходной. Однако, на данный момент автору не известны МНГ графы, обладающие такой кликой. Более того, для любого из изложенных здесь пяти правил вывода верно следующее: если в МНГ графе все клики являлись проходными, то после применения правила в полученном МНГ графе все клики также являются проходными.

Правило 2 (объединение графов). Пусть даны два графа G и F . Объединим графы G и F . Добавим в полученный граф вершину a и ребра таким образом, чтобы множество вершин графа $\{a\} \cup T_H \cup T_F$ оказалось основанием графа (то есть соединим каждую из вершин этого множества ребром с каждой вершиной графа).

Предложение 2. Пусть $K_1, \dots, K_s$ — все максимальные клики графа G и $L_1, \dots, L_t$ — все максимальные клики графа F . Применим к графам G и F Правило 2. Тогда разложение

на максимальные клики полученного графа H будет следующим:

$$K_1 \cup \{a\} \cup T_F, \dots, K_s \cup \{a\} \cup T_F, \dots, L_1 \cup \{a\} \cup T_G, \dots, L_t \cup \{a\} \cup T_G.$$

Кроме того, если графы G и F — МНГ графы с непустыми основаниями, то граф H — МНГ с непустым основанием.

Доказательство. Пусть g_1 и g_2 — несмежные вершины графа G и f_1, f_2 — несмежные вершины графа F . Тогда, поскольку G и F — МНГ графы, в графе G существует гамильтонова цепь $g_0 \bar{g} g_1$ и в графе F существует гамильтонова цепь $f_0 \bar{f} f_1$. Докажем, что любые две несмежные вершины в графе H соединены гамильтоновой цепью. Для этого без ограничения общности достаточно доказать, что в H пары вершин g_0, f_0 и g_0, g_1 соединены гамильтоновой цепью. В первом случае искомая цепь имеет вид $g_0 \bar{g} g_1 a f_1 \bar{f} f_0$.

Во втором случае отметим, что в цепи $\bar{g}$ присутствует вершина из основания графа G (поскольку T_G непусто; вершины g_0, g_1 несмежны, поэтому ни одна из них не лежит в основании графа G). Тогда запишем $\bar{g}$ следующим образом: $\bar{g} = \bar{g}' z \bar{g}''$, где вершина z лежит в основании графа H . Тогда искомая гамильтонова цепь между вершинами g_0 и g_1 имеет вид $g_0 \bar{g}' z f_0 \bar{f} f_1 a \bar{g}'' g_1$.

Остается доказать, что граф H негамильтонов. Предположим противное, то есть предположим, что существует гамильтонов цикл. Пусть x — вершина графа G , не лежащая в основании графа G . Гамильтонов цикл из вершины x в вершину x можно разбить на простые цепи: от вершины x через вершины графа G до некоторой точки основания T_H ; от точки основания T_H до другой точки основания T_H , причем между точками основания проходим только через вершины либо графа G либо графа F ; и так далее. Последняя простая цепь идет от точки основания T_H через вершины графа G до вершины x . Переставляя эти простые цепи, можно привести указанную гамильтонову цепь к виду

$$x \bar{g}_1 t_1 \bar{g}_2 t_2 \dots \bar{g}_k t_k \bar{f}_1 t'_1 \dots \bar{f}_r t'_r \bar{f}_{r+1} a \bar{g}_{k+1} x, \quad (3)$$

где простые цепи $\bar{g}_i$ состоят только из вершин графа G и не содержат точек из T_G ; простые цепи $\bar{f}_i$ состоят только из вершин графа F и не содержат точек из T_F ; вершины t_i, t'_i принадлежат основанию графа H , причем несколько первых элементов в последовательности $t_1, \dots, t_k, t'_1, \dots, t'_r$ лежат в T_G , а оставшийся хвост в T_H . Заметим, что в цепи (3) число r может быть равно 0.

Предположим, что $k \leq |T_G|$. Тогда граф G гамильтонов, поскольку существует гамильтонова цепь

$$x \bar{g}_1 t_1 \bar{g}_2 t_2 \dots \bar{g}_k t_k \bar{g}_{k+1} \bar{t} x,$$

где $t_1, \dots, t_k$ и $\bar{t}$ — все вершины из T_G . Получаем противоречие с тем, что G — МНГ граф.

Предположим, что $k > |T_G|$. Тогда $r \leq |T_F|$ и в этом случае цепь

$$\bar{f}_1 t'_1 \bar{f}_2 t'_2 \dots \bar{f}_r t'_r \bar{f}_{r+1} \bar{t}',$$

где $t'_1, \dots, t'_k$ и $\bar{t}'$ — все вершины из T_F , является гамильтоновой цепью в графе F . Получаем противоречие с тем, что F — МНГ граф.

Из описанного Правила 2 легко видеть, что основание H непусто. Предложение доказано.

Замечание 1. Правило 2 обладает свойством коммутативности, то есть результат не зависит от того, применяется правило к графам G и F или к графам F и G . Также Правило 2 обладает свойством ассоциативности, то есть

$$(G \Pi_2 F) \Pi_2 E = G \Pi_2 (F \Pi_2 E),$$

где GP_2F — операция применения Правила 2 к графам G и F . Следовательно, можно применять Правило 2 к конечному набору графов $G_1, \dots, G_s$ и результат не зависит от порядка применения.

Условие предложения 2 о непустых основаниях обоих графов F и H неослабляемо. Для примера возьмем в качестве F и H графы G_1 и G_2 , приведенные на рисунке 1 (основание графа G_2 пусто). Граф, полученный в результате применения к F и H Правила 2, не является МНГ графом, хотя и негамильтонов.

Правило 3 (добавление максимальной клики). Пусть дан граф G . Добавим вершину a и соединим ее ребрами со всеми вершинами графа G . Затем добавим вершину b и соединим эту вершину ребрами со всеми вершинами графа $\{a\} \cup T_G$.

Предложение 3. Пусть $K_1, \dots, K_r$ — все максимальные клики графа G . Применим к графу G Правило 3. Тогда разложение на максимальные клики полученного графа H будет следующим:

$$K_1 \cup \{a\}, \dots, K_r \cup \{a\}, \{a, b\} \cup T_G.$$

Кроме того, если G является МНГ графом с непустым основанием, то граф H также является МНГ графом с непустым основанием $T_G \cup \{a\}$.

Доказательство. Из описания Правила 3 видно, что вершина a графа H лежит в основании T_H , которое, следовательно, непусто. Докажем, что H — МНГ граф. Пусть G — МНГ граф и основание G непусто. Тогда для любых двух несмежных вершин x_0, x_1 графа G существует гамильтонова цепь $x_0 \bar{t}_1 x_1$. Поскольку x_0, x_1 , очевидно, не лежат в основании G и T_G непусто, цепь $\bar{t}$ имеет вид $\bar{t}_1 z \bar{t}_2$, где z — вершина, принадлежащая основанию графа G . Тогда в H существует гамильтонова цепь из x_0 в x_1

$$x_0 \bar{t}_1 z b \bar{t}_2 x_1.$$

Гамильтонова цепь из b в вершину x_1 графа G , не лежащую в основании G , выглядит следующим образом:

$$b a x_0 \bar{t}_1 z b a \bar{t}_2 x_1.$$

Предположим, что граф H гамильтонов. Тогда гамильтонов цикл должен иметь вид

$$x \bar{t}_1 z b z' \bar{t}_2 x, \quad (4)$$

где z, z' — вершины, принадлежащие основанию графа H , x — некоторая вершина графа G .

Поскольку в любой простой цепи, проходящей через основание графа, вершины из основания можно переставлять между собой как угодно, потребуем, чтобы вершина z' являлась вершиной a . Тогда, убирая из (4) отрезок bz' , получаем гамильтонов цикл в графе G , что противоречит его негамильтоновости. Таким образом, граф H — МНГ граф. Предложение доказано.

Если применить Правило 3 к МНГ графу G с пустым основанием, то в полученном графе H , будет существовать точка сочленения — вершина a , а сам он не будет МНГ графом, поскольку в противном случае по лемме 4 он состоит из двух максимальных клик, пересекающихся по вершине a . Поскольку в H вершина b не смежна с вершинами, отличными от a , одной из указанных клик является $\{a, b\}$. Следовательно, вершины графа G вместе с вершиной a образуют вторую клику. Но тогда получается, что все вершины

в G связаны (в процессе применения Правила 3 не добавляется ребер между вершинами графа G), то есть граф G есть полный граф, а это противоречит и негамильтоновости графа G , и тому, что основание G пусто. Таким образом, условие о непустоте основания в предложении 3 нельзя исключить.

Правило 4 (добавление пары опорных клик). Добавим в максимальную клику K графа G две собственные вершины a_1, a_2 . Далее, добавим две вершины b_1 и b_2 в полученный граф и соединим ребрами вершину b_1 с вершинами основания графа и вершиной a_1 ; вершину b_2 — с вершинами основания графа и вершиной a_2 . Затем добавим в основание полученного графа вершину d (то есть добавим вершину d и соединим ее ребрами со всеми вершинами полученного графа, то есть и с вершинами a_1, a_2, b_1, b_2).

Предложение 4. Пусть $K_1, \dots, K_t$ — все максимальные клики графа G . Применим к графу G Правило 4, взяв в качестве клики K клику K_1 . Тогда разложение на максимальные клики полученного графа H будет следующим:

$$K_1 \cup \{a_1, a_2, d\}, \{a_1, b_1, d\} \cup T_G, \{a_2, b_2, d\} \cup T_G, K_2 \cup \{d\}, K_3 \cup \{d\}, \dots, K_t \cup \{d\}.$$

Кроме того, если G — МНГ граф, K — соединительная и проходная клика, то H — МНГ граф, клика $K \cup \{a_1, a_2, d\}$ — проходная клика.

Доказательство. Предположим, что в H существует гамильтонов цикл. Заметим, что в графе H максимальная клика $K \cup \{a_1, a_2, d\}$ является соединительной кликой, которая соединяет опорные клики

$$\{a_1, b_1, d\} \cup T_G, \{a_2, b_2, d\} \cup T_G, L_1 \cup \{d\}, \dots, L_r \cup \{d\},$$

где $L_1, \dots, L_r$ — все опорные клики, соединяемые кликой K в графе G . Поскольку в вершину b_i можно попасть только из вершины a_i и всех вершин основания графа H , существует цикл, который содержит один из двух отрезков $a_1 b_1 z_1, z_1 b_1 a_1$; а также один из двух отрезков $a_2 b_2 z_2, z_2 b_2 a_2$, где z_1, z_2 — вершины основания графа H (не обязательно различные).

По условию существует некоторая опорная клика L графа G , которая имеет непустое сильное пересечение с кликой K . Пусть вершина x — собственная вершина L (собственная вершина в опорной клике существует по пункту 3 леммы 2). Запишем гамильтонов цикл, начиная с вершины x . Цикл можно записывать одним из четырех способов:

$$x \bar{t}_1 a_1 b_1 z b_2 a_2 \bar{t}_3 x, \quad (5)$$

$$x \bar{t}_1 a_1 b_1 z_1 \bar{t}_2 a_2 b_2 z_2 \bar{t}_3 x, \quad (6)$$

$$x \bar{t}_1 a_1 b_1 z_1 \bar{t}_2 z_2 b_2 a_2 \bar{t}_3 x, \quad (7)$$

$$x \bar{t}_1 z_1 b_1 a_1 \bar{t}_2 a_2 b_2 z_2 \bar{t}_3 x, \quad (8)$$

где z, z_1, z_2 — вершины, принадлежащие основанию графа H . Без ограничения общности будем считать, что в случае (5) вершина z совпадает с вершиной d , а в случаях (6)–(8) z_2 совпадает с d . Покажем, что каждому из вариантов (5)–(8) гамильтонова цикла в графе H соответствует гамильтонов цикл в графе G .

В случае (5) это $x \bar{t}_1 \bar{t}_3 x$.

В случае (6) это $x \bar{t}_1 \bar{t}_2^{-1} z_1 \bar{t}_3 x$.

В случае (7) заметим, что в цепи $\bar{t}_3 x \bar{t}_1$ есть вершина, которая принадлежит основанию графа G , поскольку L — опорная клика, то есть сильно пересекается только с кликой

K , причем в сильном пересечении лежит одна вершина (по пункту 1 леммы 2). Без ограничения общности считаем, что вершина из основания лежит в пути $\bar{t}_1$, то есть $\bar{t}_1 = \bar{t}'_1 z \bar{t}''_1$, где z лежит в T_G , причем последняя вершина в цепи $\bar{t}''_1$ лежит в клике K . Следовательно, в графе G существует гамильтонов цикл

$$x \bar{t}'_1 z_1 \bar{t}_2 z \bar{t}''_1 \bar{t}_3 x.$$

В случае (8) поступим следующим образом. Во-первых, можно считать, что в цепи $\bar{t}_2$ нет вершин из основания T_H , поскольку в противном случае отрезок от вершины z_1 до указанной точки основания можно было бы записать в обратном порядке, приведя тем самым цепь к виду (6). Во-вторых, можно считать, что в цепи $\bar{t}_2$ нет вершин из клики L , поскольку иначе в цепи $\bar{t}_2$ также присутствовала хотя бы одна точка основания T_H . Обозначим q вершину, лежащую в сильном пересечении клик K и L . Можно считать, что и q не лежит в $\bar{t}_2$. Если цепь $\bar{t}_2$ содержит отрезок $k_1 q k_2$, где k_1 и k_2 лежат в клике K , то, заменяя этот отрезок в цепи (8) на $k_1 k_2$, а отрезок $x \bar{t}_1$ отрезком $x q \bar{t}_1$, получаем цепь также вида (8), но не содержащую q в цепи $\bar{t}_2$. Без ограничения общности считаем, что вершина q лежит в цепи $\bar{t}_1$. Тогда цепь $\bar{t}_1$ можно преобразовать к виду, в котором $\bar{t}_1$ содержит ребро из клики K , то есть представляется в виде $\bar{t}_1 = \bar{t}'_1 k_1 k_2 \bar{t}''_1$, где k_1 и k_2 лежат в клике K (в частности, одна из вершин k_1, k_2 совпадает с q). Искомый гамильтонов цикл в графе G имеет вид

$$x \bar{t}'_1 k_1 \bar{t}_2 k_2 \bar{t}''_1 z_1 \bar{t}_3 x.$$

Поскольку граф G — МНГ граф, получаем противоречие. Таким образом, граф H — негамильтонов.

Пусть x, y — две несмежные вершины графа G . Поскольку G — МНГ граф и клика K проходная, существует содержащая ребро из K гамильтонова цепь

$$x \bar{t}_1 k_1 k_2 \bar{t}_2 y,$$

k_1, k_2 лежат в K , пути $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ могут быть пустыми, и в этом случае вершина k_1 может совпадать с x , а k_2 может совпадать с y (но одновременно, так как иначе вершины x, y оказываются смежными). Тогда в H существует гамильтонова цепь

$$x \bar{t}_1 k_1 a_1 b_1 d b_2 a_2 k_2 \bar{t}_2 y,$$

соединяющая x и y . Пусть r — вершина из G такая, что в графе H она несмежна с вершиной a_1 . Тогда r не лежит в клике K , то есть существует вершина k из клики K , несмежная с r . Поскольку G — МНГ граф, в G вершины r и k соединены гамильтоновой цепью $r \bar{k} k$. Значит, в H вершина a_1 и вершина r также соединены гамильтоновой цепью $r \bar{k} a_2 b_2 d b_1 a_1$.

Пусть теперь r — произвольная вершина графа G такая, что она в графе H является несмежной с вершиной b_1 . Пусть q — вершина графа G , несмежная с r (такая существует, поскольку $r \notin T_G$). В графе G существует гамильтонова цепь $r \bar{q} q$. Тогда в графе H существует гамильтонова цепь $r \bar{q} b_2 a_2 a_1 b_1$, соединяющая вершины r и b_1 .

Осталось найти гамильтоновы цепи в графе H , соединяющие вершину a_1 с b_2 и вершину b_1 с b_2 . Пусть k — вершина клики K и q — несмежная с ней вершина графа G . В G их соединяет гамильтонова цепь $k \bar{q} q$. Тогда в H искомые цепи имеют вид

$$a_1 b_1 d q \bar{t}^{-1} k a_2 b_2, \quad b_1 a_1 d q \bar{t}^{-1} k a_2 b_2.$$

Таким образом, любые две вершины графа H соединены гамильтоновой цепью. Следовательно, граф H — МНГ граф.

Клика $K \cup \{a_1, a_2, d\}$ является соединительной, поскольку она соединяет, в частности, опорные клики $\{a_1, b_1, d\} \cup T_G$ и $\{a_2, b_2, d\} \cup T_G$. Так как она соединяет более одной опорной клики, по пункту 3 леммы 3 клика $K \cup \{a_1, a_2, d\}$ также является проходной. Предложение доказано.

Рассмотрим вопрос об ослаблении условий предложения 4. Вообще говоря, если соединительная клика K_1 не является проходной, то полученный граф не обязан быть МНГ графом. Однако, автору неизвестны МНГ графы с непроходными кликами (при этом указать негамильтонов граф, обладающий непроходной кликой, достаточно просто) и в предположении истинности гипотезы, что в МНГ графе все клики проходные, от указанного условия предложения 4 действительно можно отказаться. Еще заметим, что, если число опорных клик, соединяемых кликой K_1 , больше одной, то по пункту 4 леммы 2 клика K_1 обязана быть проходной кликой.

Правило 5 (создание соединительной клики). Пусть k_1, k_2 — собственные вершины клики K графа G . Добавим в граф две вершины a_1, a_2 и ребра $(a_1, k_1), (a_2, k_2)$. В полученный граф добавим доминирующую вершину z .

Предложение 5. Пусть $K_1, \dots, K_t$ — все максимальные клики графа G и u клики K_1 не менее двух собственных вершин. Применим к графу G Правило 5, взяв в качестве клики K клику K_1 . Тогда разложение на максимальные клики полученного графа H будет следующим:

$$K_1 \cup \{z\}, K_2 \cup \{z\}, \dots, K_t \cup \{z\}, \{a_1, k_1, z\}, \{a_2, k_2, z\}.$$

Кроме того, если G — МНГ граф, в котором выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

- (А) клика K_1 пересекается с любой другой максимальной кликой графа G только по вершинам основания;
- (В) клика K_1 опорная,

то H — МНГ граф, в котором ровно одна доминирующая вершина z , клики $\{a_1, k_1, z\}, \{a_2, k_2, z\}$ являются опорными, соединенными кликой $K_1 \cup \{z\}$.

Доказательство. Предположим, что граф H гамильтонов, то есть в H существует гамильтонов цикл. Тогда, поскольку в вершину a_i можно попасть только из вершины z или из вершины k_i , гамильтонов цикл обязан содержать отрезок $k_1 a_1 z a_2 k_2$. Заменяем в гамильтоновом цикле этот отрезок отрезком $k_1 k_2$ и получим гамильтонов цикл в графе G , что противоречит его негамильтоновости.

Теперь для доказательства утверждения достаточно указать гамильтоновы цепи в H , соединяющие

- (1) любые две несмежные вершины графа G ;
- (2) вершины a_1 и a_2 ;
- (3) произвольную вершину графа G , отличную от k_1 , и вершину a_1 .

Предположим, что x и y — различные несмежные вершины графа G . Тогда в G существует гамильтонова цепь, их соединяющая, и кроме того, множество $\{x, y\}$ не совпадает

с множеством $\{k_1, k_2\}$. Поскольку по пункту 5 леммы 3 вершины k_1 и k_2 образуют проходную пару вершин в графе G , в G существует гамильтонова цепь из x в y , которая содержит отрезок k_1k_2 . Заменим этот отрезок на $k_1a_1za_2k_2$ и получим гамильтонову цепь в H , соединяющую x и y . Таким образом, любые две несмежные вершины графа G соединены в H гамильтоновой цепью.

Укажем еще одну гамильтонову цепь в H , цепь между a_1 и a_2 . В G существует вершина y , несмежная с k_2 . Тогда, поскольку G — МНГ граф и k_1, k_2 — проходная пара вершин, в G существует гамильтонова цепь $k_2k_1\bar{t}y$.

Искомой гамильтоновой цепью в H является цепь

$$a_1k_1\bar{t}zk_2a_2.$$

Пусть x — вершина G , отличная от k_1 . Докажем, что x и a_1 соединяет в H гамильтонова цепь. Возможны три случая:

- (а) x совпадает с k_2 ;
- (б) x несмежна с k_2 ;
- (с) x смежна с k_2 .

Рассмотрим случай (а). В G существует вершина y , несмежная с k_2 , так как k_2 по условию предложения не является в G доминирующей вершиной. Тогда, поскольку G — МНГ граф и k_1, k_2 — проходная пара вершин, в G существует гамильтонова цепь $k_2k_1\bar{t}y$.

Искомой гамильтоновой цепью в H является цепь

$$a_1k_1\bar{t}yza_2k_2.$$

В случае (б) в G существует гамильтонова цепь $k_2k_1\bar{t}x$ и искомой гамильтоновой цепью в H является цепь

$$a_1za_2k_2k_1\bar{t}x.$$

В случае (с) необходимо условия (А) и (В) утверждения рассмотреть отдельно. В случае (А) вершина x может быть либо собственной вершиной клики K_1 , либо лежать в основании графа G . В случае (В) к указанным двум возможностям добавляется третья: x может совпадать с вершиной, лежащей в сильном пересечении опорной клики K_1 и некоторой соединительной кликой R .

Если x — собственная вершина клики K_1 , то для случаев (А) и (В) доказательства не различаются. Очевидно, в G найдется вершина y , несмежная с k_1 . Поскольку k_1 и k_2 — проходная пара вершин, в G существует гамильтонова цепь $k_1k_2\bar{t}y$, причем первая вершина в цепи $\bar{t}$ лежит в клике K_1 . Если эта первая вершина не совпадает с x , то цепь $\bar{t}$ содержит отрезок qxq' , где q, q' лежат в K_1 и, следовательно, смежны. Заменив qxq' отрезком qq' , а отрезок k_1k_2 отрезком k_1k_2x , получим гамильтонову цепь в G вида $k_1k_2x\bar{t}y$.

Из такой цепи построим в H соединяющую x и a_1 искомую гамильтонову цепь $x\bar{t}za_2k_2k_1a_1$.

Пусть теперь x — доминирующая вершина графа G . Рассмотрим эту возможность в условиях (А). Существует вершина y , несмежная с k_1 . Следовательно, она соединена гамильтоновой цепью в G с k_1 . Поскольку клика K_1 пересекается с другими максимальными кликами графа только по основанию графа, эта цепь имеет вид

$$k_1\bar{t}_1z\bar{t}_2y, \tag{9}$$

где $\bar{t}_1$ состоит из собственных вершин клики K_1 , а z лежит в основании графа. Без ограничения общности считаем, что цепь $\bar{t}_1$ содержит вершину k_2 . Действительно, в противном случае цепь $\bar{t}_2$ содержит подцепь qkq' , где q и q' лежат в клике K_1 , то есть являются смежными вершинами. Заменим отрезок qk_2q' на qq' и отрезок $\bar{t}_1$ на $\bar{t}_1k_2$ и тем самым получим гамильтонову цепь требуемого вида. Поскольку x — доминирующая вершина, переставляя в цепи $\bar{t}_1$ вершину k_2 на последнее место, получаем цепь вида $k_1\bar{t}'_1k_2x\bar{t}_2y$.

Тогда гамильтонова цепь в H , соединяющая x и a , имеет вид

$$x\bar{t}_2yz a_2k_2(\bar{t}')^{-1}k_1a_1.$$

Теперь рассмотрим ту же возможность (то есть, когда x — доминирующая вершина) в условиях (В). Ранее соединительная клика, имеющая непустое сильное пересечение с кликой K_1 , была обозначена R . Обозначим через r вершину из сильного пересечения клик K_1 и R , через y — вершину клики R , не лежащую в основании и отличную от r . Тогда по пункту 1 леммы 2 вершина y несмежна с k_1 . Так как G — МНГ граф, существует в G гамильтонова цепь, соединяющая y и k_1 . Эта цепь имеет вид $k_1\bar{t}q\bar{t}'y$, где цепь $\bar{t}$ состоит из собственных вершин клики K_1 , отличных от k_1 , q — либо доминирующая вершина, либо совпадает с r . Аналогично предыдущим рассуждениям потребуем, чтобы последняя вершина в цепи $\bar{t}$ была вершиной k_2 , то есть $\bar{t} = \bar{t}_1k_2$.

Если q — доминирующая вершина, то без ограничения общности считаем, что она совпадает с x , и далее рассуждаем так же, как и в предыдущем случае. Если же q совпадает с r , то в цепи $\bar{t}'$ содержится вершина x , то есть $\bar{t}' = \bar{t}_2x\bar{t}_3$.

Тогда, поскольку y смежна с r , искомой гамильтоновой цепью в H является цепь

$$x\bar{t}_3yr\bar{t}_2za_2k_2\bar{t}_1^{-1}k_1a_1.$$

Осталось рассмотреть в условиях (В) случай, когда x совпадает с r . Пусть y — несмежная с x вершина. В G их соединяет гамильтонова цепь $x\bar{t}y$. Предположим, что первая вершина в цепи $\bar{t}$ не является собственной вершиной клики K_1 . Но тогда цепь $\bar{t}$ обязана содержать отрезок $z_1\bar{t}'z_2$, где z_1, z_2 — доминирующие вершины графа G и $\bar{t}'$ — собственные вершины клики K_1 . Заменим отрезок $z_1\bar{t}'z_2$ на z_1 и отрезок, состоящий из одной вершины x , на отрезок $z_2\bar{t}^{-1}x$, и получим гамильтонов цикл в графе G , что противоречит условию. Следовательно, первая вершина в цепи $\bar{t}$ есть собственная вершина клики K_1 ; более того, цепь $\bar{t} = k_1k_2\bar{t}_1\bar{t}_2$, где $\bar{t}_1$ — все собственные вершины клики K_1 , отличные от k_1 и k_2 . Искомой гамильтоновой цепью в H является цепь $x\bar{t}_1\bar{t}_2yz a_2k_2k_1a_1$. Предложение доказано.

Вообще говоря, Правило 5 не дает МНГ граф, если применять его к произвольной паре смежных вершин. Более того, Правило 5 не всегда дает МНГ граф, будучи применено к двум собственным вершинам одной максимальной клики. Впрочем, не удастся показать, что условиями предложения 5 описываются все возможные случаи, когда применение Правила 5 к МНГ графу дает МНГ граф.

Список литературы

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И., *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990.
2. Ролдугин П. В., Максимально негамильтоновы графы. *Тезисы докл. Третьего Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике*. ТВП, Москва, 2002, 238–239.
3. Ролдугин П. В., Системы линейных неравенств для максимально негамильтоновых графов. *Вестник МГУ леса* (2003) №1, 110–126.
4. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
5. Bondy J. A., Variations on the Hamiltonian theme. *Canad. Math. Bull.* (1972) **14**, №1, 57–62.
6. Vandegriend B., *Finding Hamiltonian cycles: algorithms, graphs and performance*. Thesis, Univ. Alberta, Canada, 1998.

Статья поступила 03.03.2003.