Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Черемисин, Об активности схем из клеточных элементов, реализующих систему всех конъюнкций, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 2, 113–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 05:44:46

Об активности схем из клеточных элементов, реализующих систему всех конъюнкций

© 2003 г. О. В. Черемисин

Изучается активность схем из клеточных элементов, мера сложности, характеризующая функционирование схем с энергетической точки зрения. Для системы K_n всех элементарных конъюнкций n переменных при $n \rightarrow \infty$ найден порядок роста минимальной активности схем из клеточных элементов, реализующих K_n . Доказана невозможность одновременного достижения минимального по порядку роста активности и сложности реализации системы K_n в указанном классе схем.

В работе изучается активность схем из клеточных элементов, реализующих систему K_n всех элементарных конъюнкций от n переменных, то есть систему всех булевых функций вида $x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{0, 1\}$.

Понятие схемы из клеточных элементов введено в [1]. В этой работе найден порядок роста функции Шеннона $L(n)$ сложности реализации булевых функций схемами из клеточных элементов, показано, что

$$\frac{1}{4}2^n \lesssim L(n) \lesssim \frac{9}{2}2^n$$

при $n \rightarrow \infty$. Позднее, в [2] было доказано существование асимптотики для $L(n)$. Точные по порядку оценки сложности реализации некоторых конкретных систем функций схемами из клеточных элементов были получены в [3, 4].

Рассматриваемое в данной работе понятие активности схем из клеточных элементов аналогично понятию мощности схем из функциональных элементов, введенному в [5]. Дальнейшее исследование мощности схем из функциональных элементов было проведено О. М. Касим-Заде [6]. В [7] О. М. Касим-Заде доказана возможность одновременного достижения порядка роста функции Шеннона для мощности и асимптотики функции Шеннона для сложности при реализации булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$.

Все необходимые определения, касающиеся схем из клеточных элементов, можно найти в [1, 4]. Кратко повторим основные из них.

Рассмотрим шесть базисных элементов: три функциональных (рис. 1) и три коммутационных (рис. 2). Каждый из этих элементов имеет форму единичного квадрата и может быть повернут на угол $k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Функциональным элементам ставятся в соответствие обычные функциональные элементы (рис. 3). Первые два коммутационных элемента служат для соединения функциональных элементов (они являются аналогами физических проводников электрического

Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

тока). На третий элемент могут подаваться как входы, так и выходы других элементов (он является аналогом изолятора электричества).

Схемой из клеточных элементов называется прямоугольная система клеточных элементов такая, что при замене клеточных функциональных элементов (рис. 1) на обычные функциональные элементы в соответствии с рис. 3 и соединении последних в соответствии с тем, что предписывают клеточные коммутационные элементы, получается обычная схема из функциональных элементов, удовлетворяющая известному определению, данному в [8].

Для наглядности на рис. 4 приведен пример схемы из клеточных элементов, реализующей систему всех конъюнкций двух переменных.

В дальнейшем будем также называть клеточные элементы ячейками схемы. Горизонтальной (вертикальной) цепочкой ячеек в схеме из клеточных элементов будем называть всякую последовательность элементов, расположенных вдоль некоторой горизонтальной (вертикальной) прямой так, что любые два соседних элемента этой последовательности имеют общую сторону, а крайние элементы этой последовательности примыкают к сторонам схемы (рис. 5).

Число горизонтальных (вертикальных) цепочек ячеек в схеме называется шириной (длиной) этой схемы. Ширина (длина) схемы S обозначается через $m(S)$ (соответственно, $d(S)$).

Под сложностью схемы S понимается ее площадь (число элементов). Эта величина обозначается через $L(S)$. Очевидно, что $L(S) = m(S)d(S)$.

Сложностью системы K_n называется величина

$$L(K_n) = \min_S L(S),$$

где минимум берется по всевозможным схемам S , реализующим систему K_n .

Теперь дадим определение активности схем из клеточных элементов. Пусть S — произвольная схема. Для произвольного набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений переменных, при-

писанных входам схемы S , обозначим через $E(S, \tilde{\alpha})$ число элементов схемы, как функциональных, так и коммутационных, у которых хотя бы один выход находится в состоянии 1 при поступлении на входы схемы набора $\tilde{\alpha}$. Величину $E(S, \tilde{\alpha})$ назовем активностью схемы S на наборе $\tilde{\alpha}$.

Максимальной активностью схемы S назовем величину

$$E_{\max}(S) = \max_{\tilde{\alpha}} E(S, \tilde{\alpha}).$$

Средней активностью схемы S назовем величину

$$E_m(S) = \frac{1}{2^n} \sum_{\tilde{\alpha}} E(S, \tilde{\alpha}).$$

Максимальной (средней) активностью системы всех конъюнкций K_n назовем величину

$$E_{\max}(K_n) = \min_S E_{\max}(S)$$

(соответственно,

$$E_m(K_n) = \min_S E_m(S))$$

(в обоих случаях минимум берется по всевозможным схемам S , реализующим систему K_n).

Для введенного описанным образом понятия активности схем из клеточных элементов, как и для аналогичного понятия мощности схем из функциональных элементов, возможны несколько содержательных интерпретаций.

Наиболее известная из них — тепловая интерпретация. При этой интерпретации считается, что элементы схемы способны выделять тепло, причем элемент (функциональный или коммутационный) выделяет тепло в том и только том случае, когда хотя бы один из его выходов находится в состоянии 1, и всякий элемент, выделяющий тепло, выделяет единицу тепла за единицу времени. При этом величины $E_{\max}(S)$ и $E_m(S)$ интерпретируются соответственно как максимальная и средняя тепловые мощности схемы.

С. С. Кравцовым [1] для всякого n , $n \geq 1$, была построена схема S_n , реализующая систему K_n со сложностью

$$L(S_n) = 3(2n - 1)2^n.$$

Н. А. Шкаликовой [4] показано, что $L(K_n) \asymp n2^n$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом Н. А. Шкаликовой было установлено, что построенные С. С. Кравцовым схемы S_n оптимальны по порядку роста сложности.

Легко подсчитать, что активность построенных в [1] оптимальных по порядку роста сложности схем S_n дается соотношениями

$$E_{\max}(S_n) = E_m(S_n) \asymp n2^n.$$

Однако оказывается, что эти схемы не оптимальны по порядку роста активности и в действительности порядки роста функций $E_{\max}(K_n)$ и $E_m(K_n)$ существенно ниже. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$

$$E_{\max}(K_n) \asymp E_{\text{ср}}(K_n) \asymp 2^n.$$

Доказательство теоремы разобьем на две леммы.

Рис. 6.

Рис. 7.

Лемма 1. Существует последовательность схем W_n , реализующих системы K_n такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$E_{\max}(W_n) \lesssim 5 \cdot 2^n.$$

Доказательство. Для построения схемы W_n используем два экземпляра схем S_k , построенных в [1], и вспомогательные схемы A_k .

Схема A_k реализует умножение 2^k входов $x_1, \dots, x_{2^k}$ на выделенный вход y . Расположение входов и выходов этой схемы показано на рис. 6. Строение схем A_k можно понять на примере схемы A_2 , которая изображена на рис. 7. Легко подсчитать, что

$$m(A_k) = 2 \cdot 2^k, \quad d(A_k) = 2 \cdot 2^k + 1.$$

Схема S_k реализует систему всех элементарных конъюнкций k переменных. Расположение входов и выходов этой схемы показано на рис. 8. Для схем S_k в [1] показано, что

$$m(S_k) = 2k - 1, \quad d(S_k) = 3 \cdot 2^k.$$

Теперь построим схему W_n . Положим $p = \lfloor n/2 \rfloor$, $q = \lceil n/2 \rceil$. При построении будем использовать две подсхемы S_p и S_q . Обе эти подсхемы повернем на угол $\pi/2$, а

Рис. 8.

Рис. 9.

первую из них еще отобразим зеркально относительно вертикальной оси (из определения схемы видно, что это не отразится на ее функционировании). Также для построения схемы W_n будем использовать 2^q подсхем A_p . Чтобы исключить паразитное взаимодействие различных подсхем, между ними требуется разместить изоляцию, обеспечивающую лишь необходимое взаимодействие различных подсхем. Изоляцией будем называть цепочки коммутационных элементов, в которых проводящие элементы стоят только в местах, соответствующих выходам подсхемы, а во всех остальных местах стоят пустые (изоляционные) элементы. Строение схемы W_n показано на рис. 9. Изоляция на этом рисунке не показана явно, но учтена во всех указанных на рисунке размерах.

Подсчитаем величину $E_{\max}(W_n)$. Как было указано выше, $E_{\max}(S_k) \asymp k2^k$, следовательно, вклад S_p и S_q в активность всей схемы будет пренебрежимо мал. Заметим, что при любом входном наборе лишь на одном выходе каждой из схем S_p и S_q будет реализовываться значение 1. Соответственно, активность на проводах будет асимптотически не больше, чем $2 \cdot 2 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n$. У той из подсхем A_p , на которую приходит единица от подсхемы S_q , будет активность $E_{\max}(A_p) \sim 2^n$, у остальных подсхем A_p активность будет пренебрежимо мала (вклад в активность вертикального провода с единицей от схемы S_p , проходящего через все схемы A_p , мы уже посчитали выше). Таким образом, получим, что $E_{\max}(W_n) \lesssim 5 \cdot 2^n$.

Замечание 1. Легко подсчитать, что $L(W_n) \asymp 2^{3n/2}$.

Рис. 10.

Рис. 11.

Лемма 2. Для любой последовательности схем S^n , реализующих системы K_n , при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$E_m(S^n) \geq \frac{1}{50} 2^n (1 + o(1)).$$

Доказательство. Пусть S — произвольная схема, реализующая систему K_n при некотором n , $n \geq 1$. Расположим схему S таким образом, чтобы на ее горизонтальных сторонах было не меньше половины всех ее выходов (то есть не меньше чем 2^{n-1} выходов). Тогда мы можем разбить схему S на две подсхемы S_1 и S_2 (рис. 10) так, чтобы в каждой из подсхем было не меньше чем $2^{n-1} - 2$ выходов схемы S . Без ограничения общности будем считать, что в подсхеме S_2 не больше половины входов схемы S (иначе повернем схему S на π).

В дальнейшем будем называть сечением схемы всякую вертикальную цепочку ячеек.

Рассмотрим два случая:

- (1) горизонтальная сторона подсхемы S_2 не меньше чем $\lfloor 2^n/20 \rfloor + 1$;
- (2) горизонтальная сторона подсхемы S_2 меньше чем $\lfloor 2^n/20 \rfloor + 1$.

В первом случае рассмотрим подсхему S_2 . Построим в ней $\lfloor 2^n/20 \rfloor$ сечений как показано на рис. 11.

В оставшейся подсхеме S_3 будет не менее чем

$$2^{n-1} - 2 - 2\lfloor 2^n/20 \rfloor \geq \frac{2}{5} 2^n - 4$$

выходов схемы S и не более чем $n/2$ входов схемы S .

Для каждого построенного сечения α рассмотрим схему S_3^α , образованную расширением схемы S_3 до сечения α так, чтобы ячейки сечения были входами схемы S_3^α (то есть объявим их входами схемы S_3^α наряду с имеющимися в ней входами исходной схемы S). Здесь мы подразумеваем, что значения, реализуемые на выходах элементов сечения α , подаются на входы схемы S_3^α . Как и в схеме S_3 , в схеме S_3^α будет не меньше чем $(2/5)2^n - 4$ выходов схемы S , и следовательно, будет не меньше чем $(2/5)2^n - 4$ различных выходных наборов (так как каждый выход соответствует определенной конъюнкции, на каждом выходе должна реализовываться 1 (при определенном входном наборе), при этом на всех остальных выходах должны реализовываться 0). Очевидно, что различные

Рис. 12.

выходные наборы могут получаться только при различных входных наборах. Значит, у схемы S_3^α будет не меньше $(2/5)2^n - 4$ различных входных наборов.

Входной набор схемы S_3^α состоит из не более чем $n/2$ входов схемы S и ячеек сечения α . Значит, не более чем $2^{n/2}$ входных наборов могут содержать в сечении α одни только нули. Соответственно, не менее чем

$$\frac{2}{5}2^n - 4 - 2^{n/2} = \frac{2}{5}2^n(1 + o(1)),$$

входных наборов будут содержать в сечении α хотя бы одну единицу (полагаем, что $n \rightarrow \infty$).

Суммируя по всем построенным сечениям и по всем входным наборам схемы S и затем усредняя по всем этим наборам, получим, что

$$E_m(S) \geq \frac{1}{2^n} \frac{2^n}{20} \frac{2}{5} 2^n (1 + o(1)) = \frac{1}{50} 2^n (1 + o(1)).$$

Во втором случае (если горизонтальная сторона подсхемы S_2 меньше чем $\lfloor 2^n/20 \rfloor + 1$) разобьем схему S на подсхемы S_1^1 и S_2^1 так, чтобы у подсхемы S_2^1 горизонтальная сторона была равна $\lfloor 2^n/20 \rfloor + 1$. Заметим, что в подсхеме S_2^1 будет не менее чем $2^{n-1} - 2$ выходов схемы S (так как схема S_2^1 образована путем расширения схемы S_2). Поэтому, если в подсхеме S_2^1 не более чем $n/2$ входов схемы S , то этот случай полностью аналогичен первому случаю.

Рассмотрим случай, когда в подсхеме S_2^1 больше чем $n/2$ входов схемы S (и, следовательно, в подсхеме S_1^1 меньше чем $n/2$ входов схемы S). Изначально на горизонтальных сторонах схемы S было не менее чем 2^{n-1} выходов схемы S . Так как горизонтальная сторона подсхемы S_2^1 равна $\lfloor 2^n/20 \rfloor + 1$, на горизонтальных сторонах подсхемы S_1^1 не менее чем

$$2^{n-1} - 2 - 2\lfloor 2^n/20 \rfloor \geq \frac{2}{5}2^n - 4$$

выходов схемы S . Аналогично первому случаю построим $\lfloor 2^n/10 \rfloor$ сечений (рис. 12).

Заметим, что в оставшейся подсхеме S_3^1 будет не менее чем

$$\frac{2}{5}2^n - 4 - 2\left\lfloor \frac{2^n}{10} \right\rfloor \geq \frac{2^n}{5} - 6$$

выходов схемы S (по крайней мере на горизонтальных сторонах найдется такое количество). Аналогично первому случаю получим, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$E_m(S) \geq \frac{1}{2^n} \frac{2^n}{10} \frac{2^n}{5} (1 + o(1)) = \frac{1}{50} 2^n (1 + o(1)).$$

Теорема доказана.

Рис. 13.

Рис. 14.

Теорема 1 дает ответ на вопрос о максимальной и средней активности системы K_n . Построенные выше схемы W_n реализуют эти системы с оптимальной по порядку роста активностью. Как было сказано ранее, сложность этих схем дается соотношением $L(W_n) \asymp 2^{3n/2}$. В соответствии с результатом Н. А. Шкаликовой [4], $L(K_n) \asymp n2^n$, то есть схемы W_n не оптимальны по порядку роста сложности. В связи с этим возникает вопрос о возможности одновременной минимизации порядков роста сложности и активности. Ответ на аналогичный вопрос для обычных схем из функциональных элементов, реализующих (одну) произвольную функцию n переменных, был дан О. М. Касим-Заде [7]. Он показал, что при указанных условиях возможно одновременное достижение оптимального порядка роста мощности и асимптотики сложности.

Однако в нашем случае это оказывается не так.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ для любой последовательности схем Q^n , реализующих системы K_n с минимальной по порядку роста сложностью (то есть удовлетворяющих соотношению $L(Q^n) \asymp n2^n$) выполняются соотношения

$$E_{\min}(Q^n) \geq n2^n, \quad E_{\max}(Q^n) \geq n2^n.$$

Доказательство. Пусть Q^n — последовательность схем, реализующих системы K_n , $n \rightarrow \infty$. Как показано в [4], любая схема, реализующая систему K_n с оптимальной по порядку роста сложностью, имеет одну сторону (пусть это будет горизонтальная сторона) размера $d(Q^n) \asymp 2^n$, а другую сторону (соответственно, это будет вертикальная сторона) размера $m(Q^n) \asymp n$. Отсюда следует, что существуют константы c_1 и c_2 такие, что ширина (размер вертикальной стороны) схем Q^n удовлетворяет неравенствам $c_1 n \leq m(Q^n) \leq c_2 n$.

Пусть Q — одна из схем, реализующая систему K_n при некотором n , $n \geq 1$. Разобьем схему Q на две подсхемы Q_1 и Q_2 (рис. 13) так, чтобы в каждой из подсхем было не менее чем $2^{n-1} - 2$ выходов схемы Q .

Без ограничения общности будем считать, что в подсхеме Q_2 не более чем $n/2$ входов схемы Q . Аналогично доказательству леммы 2 построим 2^{n-3} сечений в подсхеме Q_2 (рис. 14).

В оставшейся подсхеме Q_3 будет не менее чем $2^{n-1} - 2 - 2 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-2} - 2$ выходов схемы Q . Аналогично доказательству леммы 2 для каждого сечения α рассмотрим схему Q_3^α . У нее должно быть не менее чем $2^{n-2} - 2$ различных входных наборов, каждый из которых состоит из не более чем $n/2$ значений входов схемы Q и значений, реализуемых

в ячейках сечения α . Таким образом, различных входных наборов ровно с k единицами в сечении будет не более, чем $\binom{m(S)}{k} 2^{n/2}$, где $\binom{n}{k}$ — биномиальный коэффициент. Воспользуемся известной оценкой [9, 10] для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{i=0}^s \binom{n}{i} \leq 2^{H(s/n)n},$$

справедливой при условии, что $s/n \leq 1/2$, где $H(x)$ — функция двоичной энтропии, то есть $H(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$ при $0 < x < 1$ и $H(0) = H(1) = 0$.

Зададимся произвольным числом β , $0 \leq \beta \leq 1/2$. Тогда в соответствии с указанной оценкой число входных наборов с не более чем $\beta c_1 n$ единицами в сечении α не превосходит величины $2^{H(\beta c_1 n / m(S)) m(S) 2^{n/2}} \leq 2^{H(\beta) c_2 n 2^{n/2}}$.

Для всякой константы c_2 число β может быть выбрано настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $H(\beta) c_2 < 1/2$, и следовательно, $2^{H(\beta) c_2 n 2^{n/2}} = o(2^n)$. Тогда различных входных наборов схемы Q_3^α с более чем $\beta c_2 n$ единицами, будет не менее чем $2^{n-2}(1 + o(1))$.

Суммируя по всем построенным сечениям и по всем входным наборам схемы Q и затем усредняя по всем этим наборам, получим, что

$$E_m(Q) \geq \frac{1}{2^n} 2^{n-3} \beta c_2 n 2^{n-2} (1 + o(1)).$$

При фиксированном β и $n \rightarrow \infty$ отсюда следует, что $E_m(Q^n) \geq n 2^n$. Осталось учесть, что $E_{\max}(Q^n) \geq E_m(Q^n)$. Теорема доказана.

В заключение, хочу выразить глубокую благодарность О. М. Касим-Заде за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Кравцов С. С., О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов. *Проблемы кибернетики* (1967) **19**, 285–292.
2. Альбрехт А., О схемах из клеточных элементов. *Проблемы кибернетики* (1978) **33**, 209–214.
3. Шкаликова Н. А., О сложности реализации некоторых функций клеточными схемами. *Сборник работ по математической кибернетике* (1976) **1**, 102–115.
4. Шкаликова Н. А., О реализации булевых функций схемами из клеточных элементов. *Матем. вопросы кибернетики* (1989) **2**, 177–197.
5. Вайнцивайг М. Н., О мощности схем из функциональных элементов. *Докл. АН СССР* (1961) **139**, №2, 320–323.
6. Касим-Заде О. М., Об одной мере сложности схем из функциональных элементов. *Проблемы кибернетики* (1981) **38**, 117–179.
7. Касим-Заде О. М., Об одновременной минимизации сложности и мощности схем из функциональных элементов. *Проблемы кибернетики* (1978) **33**, 215–220.
8. Лупанов О. Б., О синтезе некоторых управляющих систем. *Проблемы кибернетики* (1963) **10**, 63–97.
9. Мак-Вильямс Ф., Слоэн Н., *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Радио и связь, Москва, 1979.
10. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. (ред.) *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики*, т. 1. Наука, Москва, 1974.

Статья поступила 28.10.2002.