Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Один класс докритических ветвящихся процессов с иммиграцией и с бесконечным числом типов частиц, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 1, 6–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm2>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:25:53

Один класс докритических ветвящихся процессов с иммиграцией и с бесконечным числом типов частиц

© 2007 г. Б. А. Севастьянов

Рассматривается докритический ветвящийся процесс с иммиграцией, со счетным числом типов $T_1, T_2, \dots$ частиц и с дискретным временем. Состояние процесса в момент t определяется совокупностью векторов

$$\vec{\xi}(r, t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t)), \quad r \geq 1,$$

где $\xi_i(t)$ — число частиц типа T_i в момент времени t , $i = 1, 2, \dots$. Предполагается, что иммигрируют в каждый момент времени только частицы типа T_1 ; каждая частица типа T_i превращается в совокупность частиц типов T_i и T_{i+1} . Доказывается, что распределения вероятностей векторов $\vec{\xi}(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ сходятся к предельным дискретным распределениям.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05.01.00035, и программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ 4129.2006.1.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующий ветвящийся случайный процесс с иммиграцией, со счетным числом типов частиц $T_1, T_2, \dots$ и с дискретным временем. Будем предполагать, что в каждый момент времени $t = 1, 2, \dots$ независимо друг от друга появляются $\eta_0(t)$ частиц типа T_1 . Обозначим $G(s_1) = \mathbf{M}s_1^{\eta_0(t)}$ производящую функцию распределения $\eta_0(t)$, которое не зависит от момента времени t . Далее размножение частиц идет по следующей схеме. Каждая частица типа T_k , $k = 1, 2, \dots$, существующая в момент времени $t \geq 1$, независимо от всех других частиц производит $\eta_k(t+1)$ частиц типа T_k и $\eta_{k+1}(t+1)$ частиц типа T_{k+1} . Закон распределения этой пары случайных величин определяется производящей функцией

$$\mathbf{M}s_k^{\eta_k(t+1)} s_{k+1}^{\eta_{k+1}(t+1)} = F(s_k, s_{k+1}),$$

где функция $F(u, v)$ одна и та же при любых k и t . Первоначальный ветвящийся процесс с иммиграцией и с бесконечным числом типов частиц $T_1, T_2, \dots$ обозначим $\mathcal{B}$, а число частиц типа T_i в этом процессе обозначим $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Эволюцию закона распределения этих случайных величин в процессе $\mathcal{B}$ сведем к эволюции последовательности ветвящихся процессов $\mathcal{B}_r$, $r \geq 1$, с конечным числом типов частиц $T_1, T_2, \dots, T_r$ таких, что в $\mathcal{B}_r$ размножение частиц типов $T_1, T_2, \dots, T_{r-1}$ происходит так

же, как в процессе $\mathcal{B}$, а частицы типа T_{r+1} , рождающиеся из частиц типа T_r , считаются погибшими.

Введем следующие векторные обозначения. Положим

$$\begin{aligned}\vec{s}(r) &= (s_1, s_2, \dots, s_r), \\ \vec{F}(r, \vec{s}(r)) &= (F_1(\vec{s}(r)), F_2(\vec{s}(r)), \dots, F_r(\vec{s}(r))),\end{aligned}\quad (1)$$

где при $1 \leq i < r$

$$F_i(\vec{s}(r)) = F(s_i, s_{i+1})$$

и $F_r(\vec{s}(r)) = F(s_r, 1)$.

Далее для векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_r)$ будем использовать обозначение

$$\vec{a}^{\vec{b}} = \prod_{i=1}^r a_i^{b_i}.$$

Состояние ветвящегося процесса $\mathcal{B}_r$ в момент времени $t \geq 1$ определяется вектором

$$\vec{\xi}(r, t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t)). \quad (2)$$

Введем многомерную производящую функцию вектора (2) при условии $\vec{\xi}(r, 0) = \vec{0}$

$$\Phi(r; t, \vec{s}(r)) = \mathbf{M}_{\{\vec{s}(r)\}}^{\vec{\xi}(r, t)} | \vec{\xi}(r, 0) = \vec{0} \}.$$

2. Уравнения для производящих функций

Теорема 1. В ветвящемся процессе $\mathcal{B}_r$, $r \geq 1$, производящая функция $\Phi(r, t, \vec{s}(r))$ удовлетворяет при любом целом $t = 0, 1, 2, \dots$ рекуррентному соотношению

$$\Phi(r; t+1, \vec{s}(r)) = G(s_1)\Phi(r; t, \vec{F}(r, \vec{s}(r))) \quad (3)$$

и начальному условию

$$\Phi(r; 0, \vec{s}(r)) = 1. \quad (4)$$

Доказательство. Начальное условие (4) следует из того, что в начальный момент $t = 0$ частиц нет. Равенство (3) вытекает из условия независимости размножения частиц и иммиграции частиц. Нетрудно видеть, что последовательность $\vec{\xi}(r, t)$ образует цепь Маркова, поэтому в каждый момент времени t

$$\mathbf{M}_{\{\vec{s}(r)\}}^{\xi(r, t+1)} | \vec{\xi}(r, t) \} = s_1^{\eta_0(t)} (\vec{F}(r; \vec{s}(r)))^{\vec{\xi}(r, t)}. \quad (5)$$

Осредняя равенство (5) по распределению $\eta_0(t)$ и $\vec{\xi}(r, t)$ получаем (3). Теорема доказана.

Далее будем предполагать, что существуют и конечны производные

$$\begin{aligned}G_1 &= G'(1), & G_2 &= G''(1), \\ a &= \left. \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \right|_{u=v=1}, & c &= \left. \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \right|_{u=v=1}.\end{aligned}$$

Вторые частные производные функции $F(u, v)$ по u и v в точке $u = v = 1$ будем обозначать b и d соответственно. Вторую смешанную производную функции $F(u, v)$ в точке $u = v = 1$ обозначим e . В этих обозначениях $\mathbf{M}\eta_0(t) = G_1$ и $\mathbf{M}\eta_0(t)(\eta_0(t) - 1) = G_2$. Если случайные величины ξ_1, ξ_2 имеют совместное распределение с производящей функцией $F(u, v)$, то справедливы равенства

$$a = \mathbf{M}\xi_1, \quad c = \mathbf{M}\xi_2, \quad b = \mathbf{M}\xi_1(\xi_1 - 1), \quad d = \mathbf{M}\xi_2(\xi_2 - 1), \quad e = \mathbf{M}\xi_1\xi_2.$$

Теорема 2. Если моменты G_1, G_2, a, c, b, d, e конечны и $0 < a < 1, c > 0$, то распределение вероятностей $\vec{\xi}(r, t)$ в ветвящемся процессе $\mathcal{B}_r$ при $t \rightarrow \infty$ сходится к предельному распределению, производящая функция которого $\Phi(r, \vec{s}(r))$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(r; \vec{s}(r)) = G(s_1)\Phi(r, \vec{F}(r, \vec{s}(r))). \quad (6)$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{B}_r^*$ докритический ветвящийся процесс с r типами частиц $T_1, T_2, \dots, T_r$ без иммиграции, в котором в векторном обозначении (1) производящие функции $\vec{F}(r; \vec{s}(r))$ определяют размножение частиц (см. [1]). Итерации векторной функции $\vec{F}(r, \vec{s}(r))$ будем далее обозначать

$$\vec{F}(r; t + 1, \vec{s}(r)) = \vec{F}(r; t, \vec{F}(r, \vec{s}(r))), \quad (7)$$

$$\vec{F}(r; 1, \vec{s}(r)) = \vec{F}(r, \vec{s}(r)). \quad (8)$$

Далее в координатной форме t -ю итерацию вектора (8) будем обозначать

$$\vec{F}(r; t, \vec{s}(r)) = (\vec{F}_1(r; t, \vec{s}(r)), \dots, \vec{F}_r(r; t, \vec{s}(r))).$$

Применяя последовательно формулу (3) при $t = 0, 1, 2, \dots, t - 1$, получаем, что

$$\Phi(r; t, \vec{s}(r)) = \prod_{n=0}^{t-1} G(\vec{F}_1(r; n, \vec{s}(r))). \quad (9)$$

В (9) полагаем $\vec{F}(r; 0, \vec{s}(r)) = s_1$. Число частиц в процессе $\mathcal{B}_r^*$ типа T_i в момент t обозначим $\mu_i(t)$. Этот процесс докритический, так как по условию теоремы для всех $i, 1 \leq i \leq r$,

$$\mathbf{M}\{\mu_i(1) \mid \mu_i(0) = 1, \mu_j(0) = 0, \forall j \neq i\} = a < 1.$$

Переходя в обеих сторонах равенства (9) к пределу по $t \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\Phi(r; \vec{s}(r)) = \prod_{n=0}^{\infty} G(\vec{F}_1(r; n, \vec{s}(r))). \quad (10)$$

Бесконечное произведение в (10) равномерно по $\vec{s}(r), |s_i| \leq 1, 1 \leq i \leq r$, сходится, так как в этой области $\vec{F}_1(r; n, \vec{s}(r)) = 1 + O(a^n)$ и $|1 - G(s_1)| \leq G_1|1 - s_1|$ (см. [2]). Переходя в равенстве (7) к пределу по $t \rightarrow \infty$, получаем уравнение (6). Теорема доказана.

3. Первые и вторые моменты предельного распределения

Обозначим

$$\vec{\xi}(r) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r), \quad (11)$$

пределы по распределению при $t \rightarrow \infty$ случайных величин (2). По теореме 2 их распределение определяется многомерной производящей функцией $\Phi(r; \vec{s}(r))$, которая удовлетворяет уравнению (6). Далее будем обозначать первые и вторые моменты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ следующим образом:

$$\mathbf{M}\xi_k = A_k, \quad \mathbf{M}\xi_k(\xi_k - 1) = B_{kk}, \quad \mathbf{M}\xi_k\xi_l = B_{kl}, \quad k \neq l. \quad (12)$$

Теорема 3. В условиях теоремы 2 при любых $r \geq k, l \geq 1$ все моменты (12) конечны. Первые моменты определяются формулой $A_k = G_1 \lambda^k / c$, где $\lambda = c/(1-a)$. Вторые моменты B_{kk}, B_{kl} линейно выражаются через $B_{k'l'}$ с $k' \leq k, l' \leq l$, и начальные значения B_{11}, B_{12} , которые вычисляются непосредственно.

Доказательство. Моменты (12) выражаются через производные в точке $\vec{s}(r) = \vec{1}$ производящей функции $\Phi(r; \vec{s}(r))$ следующим образом:

$$A_k = \frac{\partial \Phi(r; \vec{s}(r))}{\partial s_k}, \quad B_{kl} = \frac{\partial^2 \Phi(r; \vec{s}(r))}{\partial s_k \partial s_l}.$$

Дифференцируя обе части уравнения (6) по s_k , получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(r; \vec{s}(r))}{\partial s_1} &= G'(s_1) \Phi(r; \vec{s}(r)) + G(s_1) \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial s_1}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial s_k} &= G(s_1) \frac{\partial \Phi}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial s_k} + G(s_1) \frac{\partial \Phi}{\partial F_{k-1}} \frac{\partial F_{k-1}}{\partial s_k}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} A_1 &= G_1 + A_1 a, \\ A_k &= A_k a + A_{k-1} c, \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$A_k = \frac{G_1}{c} \lambda^k, \quad k \geq 1,$$

где $\lambda = c/(1-a)$.

Вычисление вторых производных в равенстве (6) приводит к более громоздким выражениям, связывающим вторые моменты B_{kl} . Например,

$$\begin{aligned} B_{11} &= G_2 + 2G_1 A_1 + B_{11} a^2 + A_1 b, \\ B_{kk} &= B_{k-1, k-1} c^2 + B_{kk} a^2 + 2B_{k-1, k} a c + A_{k-1} d + A_k b, \\ B_{12} &= G_1 A_1 c + B_{12} a^2 + A_1 e + A_2 a G_1. \end{aligned}$$

В общем случае при $k \neq l$ вторые моменты B_{kl} линейно выражаются через $B_{k'l'}$, $k' \leq k, l' \leq l$. Отсюда следует, что все вторые моменты B_{kl} конечны. Дисперсии $D_{kk} = \mathbf{D}(\xi_k - A_k)^2$ и ковариации $D_{kl} = \mathbf{M}(\xi_k - A_k)(\xi_l - A_l)$, $k \neq l$, выражаются через B_{kl} следующим образом:

$$D_{kk} = B_{kk} + A_k - A_k^2, \quad D_{kl} = B_{kl} - A_k A_l, \quad k \neq l.$$

Теорема доказана.

Предельное распределение случайного вектора $\vec{\xi}(r)$ можно рассматривать как стационарное распределение ветвящегося процесса $\mathcal{B}(r)$. Рассмотрим последовательность независимых стационарных ветвящихся процессов $\mathcal{B}_r(i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Суммарное число частиц типа T_k в этих процессах обозначим $\mu_k(N)$. Из центральной предельной теоремы следует, что распределение случайных величин

$$\frac{\mu_k(N) - NA_k}{\sqrt{N}}, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

сходится к многомерному нормальному распределению с ковариационной матрицей $\|D_{kl}\|$ и нулевыми средними.

4. Заключение

Ветвящийся случайный процесс $\mathcal{B}$ может служить математической моделью начальной стадии зарождения жизни в среде, которую можно назвать “биологическим бульоном”. Пусть в этой среде случайно образуются некоторые агрегаты (молекулы), которые мы назовем частицами типа T_1 . Эти частицы типа T_1 , взаимодействуя со средой, могут производить в следующем поколении либо другие частицы того же типа, либо более сложные частицы типа T_2 . Аналогично любые частицы типа T_k либо воспроизводят частицы того же типа T_k , либо превращаются в более сложные частицы типа T_{k+1} , и так далее.

Список литературы

1. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
2. Kesten H., Stigum B. P., A limit theorem for multidimensional Galton–Watson processes. *Ann. Math. Statist.* (1966) **37**, №5, 1211–1223.

Статья поступила 9.12.2006.