Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Дайняк, О числе независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 2, 63–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:54:17

О числе независимых множеств в графах с фиксированным числом независимости

© 2007 г. А. Б. Дайняк

Построена последовательность регулярных графов большой степени с возрастающим числом вершин, для которых число независимых множеств существенно больше числа всех подмножеств максимального по мощности независимого множества.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 04-01-00359.

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим соответственно множество вершин и множество ребер графа G . Приведем некоторые стандартные определения (см., например, [3]). Граф называется k -регулярным, если степень каждой вершины в нем равна k . Независимым множеством называется всякое подмножество попарно несмежных вершин графа. Семейство всех независимых множеств графа G будем обозначать $\mathcal{I}(G)$. Введем также обозначения

$$I(G) = |\mathcal{I}(G)|, \quad \beta_0(G) = \max_{A \in \mathcal{I}(G)} |A|.$$

При доказательстве некоторых теорем о числе независимых множеств в графах используется понятие системы контейнеров. Под системой контейнеров в данном случае понимается семейство подмножеств вершин графа, обладающее определенными свойствами. Например, для того чтобы оценить число независимых множеств в графе, можно указать систему контейнеров, покрывающую все независимые множества, и затем оценить число контейнеров и число независимых множеств, содержащихся в каждом контейнере (см. [1]).

Примером системы контейнеров для независимых множеств в любом графе является семейство $\mathcal{B}_0$ всех его максимальных по включению независимых множеств. В связи с этим возникает вопрос, что можно сказать о числе независимых множеств в некотором регулярном графе G , если известно, что размер $\beta_0(G)$ максимального независимого множества не слишком велик, скажем,

$$\beta_0(G) < \frac{p}{2}(1 - \varepsilon), \quad (1)$$

где $p = |V(G)|$, а ε — некоторая положительная константа. Предположим, что число вершин и минимальная степень вершины в графе G велики. Возникает вопрос, верно ли тогда, что

$$I(G) < 2^{p/2}.$$

Рис. 1. Графы G_3 (a) и G_4 (b)

Ответ был бы положительным при условии, что число максимальных по включению независимых множеств в любом графе G , удовлетворяющем указанным условиям, невелико. Именно, если бы оказалось, что $|\mathcal{B}_0| = o(2^{p/2})$ при растущем p , то из условия (1) следовало бы, что $I(G) < 2^{(p/2)(1-\varepsilon+o(1))}$. В [4] доказано, что для всех k -регулярных графов на p вершинах выполняется неравенство

$$I(G) \leq 2^{(p/2)(1+O(k^{-0,1}))}.$$

А. А. Сапоженко улучшил эту оценку (см. [2]), доказав, что

$$I(G) \leq 2^{(p/2)(1+O(\sqrt{(\log k)/k}))}.$$

Приводимый ниже пример показывает, что ответ на поставленный вопрос отрицателен, если $p \rightarrow \infty$, а степень k вершин в регулярном графе G ограничена. Неясным остается, что будет в случае, когда $k \rightarrow \infty$.

Лемма 1. Для всякого натурального $k \geq 3$ существует связный k -регулярный граф G_k на $p = 2(k-1)^2$ вершинах, для которого выполнены неравенства

$$(1) \beta_0(G_k) < (p/2)(1 - k^{-2}),$$

$$(2) I(G_k) > 2^{(p/2)(1+0,5k^{-1})}.$$

Доказательство. Будем рассматривать графы G_k следующего вида:

$$\begin{aligned} V(G_k) &= \{u_i \mid i = 1, \dots, k\} \cup \{v_i^j \mid i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k-2\} \\ &\quad \cup \{w_l^j \mid l = 1, \dots, k-1, j = 1, \dots, k-2\}, \\ E(G_k) &= \{u_i, u_{i+1} \mid i = 1, \dots, k-1\} \cup \{u_k, u_1\} \\ &\quad \cup \{u_i, v_i^j \mid i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k-2\} \\ &\quad \cup \{v_i^j, w_l^j \mid i = 1, \dots, k, l = 1, \dots, k-1, j = 1, \dots, k-2\}. \end{aligned}$$

Примеры графов G_3 и G_4 изображены на рис. .

Очевидно, G_k является k -регулярным графом на $p = 2(k-1)^2$ вершинах. Покажем, что $\beta_0(G_k) = k^2 - 2k$. Пусть A — произвольное независимое множество в графе G_k . Возможны следующие два случая.

- (а) Какая-либо из вершин $u_1, \dots, u_k$ входит в множество A . Пусть это вершина u_1 . Тогда ни одна из вершин $v_1^1, \dots, v_1^{k-2}$ не принадлежит множеству A . Кроме того, всего из множества $u_1, \dots, u_k$ в A может входить не более $\lfloor k/2 \rfloor$ вершин, поэтому $|A| \leq \lfloor k/2 \rfloor + (k-1)(k-2)$.
- (б) Ни одна из вершин $u_1, \dots, u_k$ не входит в A . В данном случае $|A| \leq k(k-2)$ (это значение достигается при $A = \{v_i^j \mid i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k-2\}$).

При $k \geq 3$ выполнено неравенство

$$\lfloor k/2 \rfloor + (k-1)(k-2) \leq k(k-2),$$

поэтому

$$\beta_0(G_k) = k^2 - 2k < (p/2)(1 - k^{-2}),$$

а значит, первое неравенство из утверждения леммы выполнено.

Оценим теперь снизу число независимых множеств в графе G_k . Введем обозначение

$$U = \{u_i \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Любое независимое множество A в графе G_k можно построить следующим образом.

- (а) Выбираем независимое множество $A_u \subseteq U$
- (б) Выбираем независимое множество $A_{\bar{u}} \subseteq V(G_k) \setminus U$. Число способов сделать этот выбор равно $(2^{k-1} + 2^{k-|A_u|} - 1)^{k-2}$.
- (в) Полагаем $A = A_u \cup A_{\bar{u}}$.

Отсюда

$$\begin{aligned} I(G_k) &\geq \sum_{A_u \in \mathcal{I}(G_k), A_u \subseteq U, |A_u| \leq 1} (2^{k-1} + 2^{k-|A_u|} - 1)^{k-2} \\ &= (2^{k-1} + 2^k - 1)^{k-2} + k(2^k - 1)^{k-2}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$f(k) = (2^{k-1} + 2^k - 1)^{k-2}, \quad g(k) = k(2^k - 1)^{k-2}.$$

Тогда

$$I(G_k) \geq f(k) + g(k).$$

Оценим $I(G_k)$ в предположении, что $k \geq 6$. Для таких k

$$I(G_k) > f(k) > 2^{k^2-1,45k-1,12} = 2^{(p/2)(1+(0,55k-2,12)/(k-1)^2)} > 2^{(p/2)(1+0,5k^{-1})}.$$

Непосредственным вычислением, оценивая $I(G_k)$ при $k = 3, 4, 5$ снизу как $f(k) + g(k)$, можно убедиться, что неравенство

$$I(G_k) > 2^{(p/2)(1+0,5k^{-1})}$$

остается верным.

Предложение 1. Для всякого натурального числа $k \geq 3$ существует последовательность k -регулярных графов $\{G_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $p = |V(G_{k,n})| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и для всех n выполнены неравенства

$$\beta_0(G_{k,n}) < (p/2)(1 - k^{-2}),$$

$$I(G_{k,n}) > 2^{(p/2)(1+0,5k^{-1})}.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное натуральное число n . Рассмотрим n графов G_k^s , $s = 1, \dots, n$, каждый из которых изоморфен графу G_k , построение которого описано в лемме 1. Будем предполагать, что $V(G_k^i) \cap V(G_k^j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Рассмотрим граф $G_{k,n}$ такой, что

$$V(G_{k,n}) = \bigcup_{s=1}^n V(G_k^s), \quad E(G_{k,n}) = \bigcup_{s=1}^n E(G_k^s).$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что выполнены равенства

$$\beta_0(G_{k,n}) = \sum_{s=1}^n \beta_0(G_k^s), \quad I(G_{k,n}) = \prod_{s=1}^n I(G_k^s),$$

и учесть результат леммы 1.

Можно построить последовательность связных k -регулярных графов $\{G'_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$, обладающую указанным в предложении 1 свойством. Обозначим через u_i^s вершину графа G_k^s , $s = 1, \dots, n$, переходящую при изоморфизме соответственно в вершину u_i графа G_k . Граф $G'_{k,n}$ может быть получен из $G_{k,n}$ следующим образом: в $G_{k,n}$ удаляются все ребра $\{u_1^s, u_k^s\}$ и добавляются ребра $\{u_k^s, u_1^{s+1}\}$, $s = 1, \dots, n-1$, а также ребро $\{u_k^n, u_1^1\}$. Можно убедиться, что оценки для $I(G'_{k,n})$ и $\beta_0(G'_{k,n})$ совпадают с соответствующими оценками для графа $G_{k,n}$.

Список литературы

1. Сапоженко А. А., Доказательство гипотезы Камерона–Эрдеша о числе множеств, свободных от сумм. *Матем. вопросы киберн.* (2003) **12**, 5–14.
2. Сапоженко А. А., О числе независимых множеств в расширителях. *Дискретная математика* (2001) **13**, №1, 56–62.
3. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
4. Alon N., Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups. *Israel J. Math.* (1991) **73**, №2, 247–256.

Статья поступила 8.06.2006.