Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Случайные разбиения множеств с известным числом блоков, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 2, 138–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:56:35

Случайные разбиения множеств с известным числом блоков

© 2003 г. А. Н. Тимашёв

Рассматривается класс всех разбиений n -элементного множества на N блоков. В предположении, что на этом классе задано равновероятное распределение и $n, N \rightarrow \infty$, получены асимптотики математического ожидания и дисперсии и доказаны пуассоновские и локальная нормальная теоремы для случайной величины, равной числу блоков заданного размера в случайно выбранном разбиении. Найдены асимптотические разложения для числа разбиений n -элементного множества на N блоков, имеющих ровно $k = k(n, N)$ блоков фиксированного размера.

Рассмотрим класс всех разбиений n -элементного множества на N попарно непересекающихся непустых подмножеств (блоков). Число таких разбиений равно $\sigma(n, N)$, где $\sigma(n, N)$ — числа Стирлинга второго рода, $N = 1, \dots, n$ [1]. Пусть k — целое неотрицательное число и r — натуральное число (всюду далее, если не оговорено противное, r фиксировано). Предполагая, что на этом классе задано равновероятное распределение, на соответствующем вероятностном пространстве определим случайную величину $\chi_r(n, N)$, равную числу блоков мощности (размера) r в случайно выбранном разбиении. Если $B_{kr}(n, N)$ — число разбиений указанного вида, имеющих каждое ровно k блоков размера r , то

$$B_{kr}(n, N) = \sigma(n, N) \mathbf{P}\{\chi_r(n, N) = k\}. \quad (1)$$

Пусть при $n, N \rightarrow \infty$ целое неотрицательное число $k = k(n, N)$ меняется так, что выполнены условия

$$N - k \rightarrow \infty, \quad 1 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n - kr}{N - k} \leq \alpha_1 < \infty, \quad (2)$$

где α_0, α_1 — постоянные и $\alpha_0 > 2$ при $r = 1$.

Заметим, что при условиях (2) параметры n, N меняются в центральной области в том смысле, что

$$1 < \beta_0 \leq \beta = n/N \leq \beta_1 < \infty, \quad (3)$$

где β_0, β_1 — постоянные.

В работе получена асимптотика чисел $B_{kr}(n, N)$ и доказана локальная нормальная теорема, оценивающая вероятность $\mathbf{P}\{\chi_r(n, N) = k\}$ в предположении, что $n, N \rightarrow \infty$ и выполнены условия (2). Получены также достаточные условия сходимости распределения случайной величины $\chi_r(n, N)$ к пуассоновскому закону, справедливые при $n, N \rightarrow \infty$ в

трех различных областях изменения параметров n, N . В доказательствах соответствующих теорем используются равенство (1) и известные оценки чисел Стирлинга второго рода $\sigma(n, N)$, а также метод условных распределений для сумм независимых случайных величин [2]. Заметим, что случайные разбиения множеств — сравнительно новое направление в комбинаторных исследованиях с использованием вероятностных методов (это отмечается в Главе 4 в [3]), и известные результаты в этой области носят менее законченный характер, чем, например, в схемах случайных размещений. В этом направлении укажем работы В. Н. Сачкова [1, 3–6], а также [7–9] (более подробную библиографию см. в [6]). Насколько известно автору, случайные разбиения конечных множеств с заданным числом блоков до настоящего времени систематически не изучались (за исключением так называемых противоречивых разбиений, см. обзор [6]).

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ и целое неотрицательное число $k = k(n, N)$ меняется так, что выполнены условия (2). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$B_{kr} = \frac{n!}{N!} \frac{(e^{\lambda_r} - 1)^N}{\lambda_r^n} \binom{N}{k} \left(\frac{p_r(\lambda_r)}{1 - e^{-\lambda_r}} \right)^k \times \left(1 - \frac{p_r(\lambda_r)}{1 - e^{-\lambda_r}} \right)^{N-k} \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} (1 + O(1/(N-k))), \quad (4)$$

где $\lambda = \lambda_r$ — единственный положительный корень уравнения

$$(1 - e^{-\lambda} - p_r(\lambda))^{-1} (\lambda - r p_r(\lambda)) = \alpha, \quad (5)$$

$$p_r(\lambda) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$\sigma_r^2 = (1 - e^{-\lambda_r} - p_r(\lambda_r))^{-1} (\lambda_r^2 + \lambda_r - r^2 p_r(\lambda_r)) - \alpha^2 > 0. \quad (7)$$

Доказательство. Нетрудно показать, что к рассматриваемой задаче применима обобщенная схема размещения (см. например, [10]), поэтому при $\lambda > 0$, $r = 1, 2, \dots$, справедливо представление

$$\mathbf{P}\{\chi_r(n, N) = k\} = \binom{N}{k} \left(\frac{p_r(\lambda)}{1 - e^{-\lambda}} \right)^k \left(1 - \frac{p_r(\lambda)}{1 - e^{-\lambda}} \right)^{N-k} \times \frac{\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (8)$$

где

$$S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N,$$

$\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = m\} = \frac{p_m(\lambda)}{1 - e^{-\lambda}}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

наконец,

$$S_{N-k}^{(r)} = \xi^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)},$$

$\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{N-k}^{(r)}$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = m\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = m \mid \xi_1 \neq r\} = \frac{p_m(\lambda)}{1 - e^{-\lambda} - p_r(\lambda)}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad m \neq r,$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = r\} = 0.$$

Из этих условий следует, что

$$\mathbf{P}\{S_N = n\} = \frac{N! \lambda^n}{n! (e^\lambda - 1)^N} \sigma(n, N), \quad (9)$$

поскольку

$$\sigma(n, N) = \frac{n!}{N!} \sum_{k_1 + \dots + k_N = n} \frac{1}{k_1! \dots k_N!}.$$

Подставляя (9) в (8) и используя (1), находим, что

$$B_{kr}(n, N) = \frac{n!}{N!} \frac{(e^\lambda - 1)^N}{\lambda^n} \binom{N}{k} \left(\frac{p_r(\lambda)}{1 - e^{-\lambda}} \right)^k \left(1 - \frac{p_r(\lambda)}{1 - e^{-\lambda}} \right)^{N-k} \mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}. \quad (10)$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = (1 - e^{-\lambda} - p_r(\lambda))^{-1}(\lambda - r p_r(\lambda)), \quad r = 1, 2, \dots$$

Если потребовать, чтобы $\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \alpha$, то окажется, что

$$\mathbf{E}S_{N-k}^{(r)} = (N - k)\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = n - kr,$$

и параметр $\lambda > 0$ удовлетворяет уравнению (5). Легко проверить, что при $\alpha > 1$ и $r \geq 2$ уравнение (5) имеет единственный положительный корень $\lambda = \lambda_r$ (при $r = 1$ это верно, если $\alpha > 2$). Таким образом, при условиях (2) это уравнение имеет ровно один положительный корень $\lambda = \lambda_r$.

Вычислим дисперсию $\mathbf{D}\xi_1^{(r)}$. Нетрудно убедиться в том, что при $\lambda = \lambda_r$

$$\mathbf{D}\xi_1^{(r)} = \sigma_r^2,$$

где значение σ_r^2 определяется согласно (6), (7). При этом $\sigma_r^2 > 0$, поскольку при наших условиях распределение случайной величины $\xi_1^{(r)}$ невырожденное. Применяя к оценке вероятности

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = \mathbf{E}S_{N-k}^{(r)}\}$$

метод перевала (см. ниже (18), (19) и теорему 2), убеждаемся, что

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} (1 + O(1/(N-k))) \quad (11)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$.

Полагая в (10) $\lambda = \lambda_r$ и используя (11), получаем оценку (4). Теорема 1 доказана.

Формула (4) позволяет при выполнении условий теоремы 1 оценить число разбиений $B_{kr}(n, N)$ множества из n элементов на N блоков, каждое из которых имеет ровно k блоков размера r . Отметим, что при $k = 0$ и $r = 1$ числа $B_{01}(n, N)$ есть так называемые присоединенные числа Стирлинга второго рода [12]. В этом случае из (4) получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнены условия (3), причем $\beta_0 > 2$. Тогда равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$B_{01}(n, N) = \frac{n!}{N!} \lambda_1^{-n} (e^{\lambda_1} - 1 - \lambda_1)^N \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi N}} (1 + O(N^{-1})) \quad (12)$$

где $\lambda = \lambda_1$ — единственный положительный корень уравнения (5) и величина $\sigma_1^2 > 0$ определяется из (7) при $r = 1$ и $\alpha = \beta$.

Оценка (12) дает хорошее приближение даже при небольших значениях n и N . Так, например, если $n = 10$, $N = 4$, $r = 1$, $k = 0$, то $\beta = 5/2$ и $\lambda_1 = 1,229934 \dots$ с точностью до 10^{-6} . В этом случае оценка (12) дает значение 9934 (с точностью до целых), если отбросить член $O(N^{-1})$, в то время как $B_{01}(10; 4) = 9450$.

Чтобы уточнить формулы (4) и (11), оценим коэффициенты ряда Крамера–Эссеена, дающего асимптотическое разложение остаточного члена вида $O(1/(N - k))$ в этих формулах. Поскольку $\mathbf{E}S_{N-k}^{(r)} = n - kr$ при $\lambda = \lambda_r$, такие коэффициенты могут быть отличны от нуля только при целых отрицательных степенях вида $(N - k)^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$. Для простоты ограничимся оценкой коэффициента A_1 при $(N - k)^{-1}$ в случае $m = 1$. Известно [13], что

$$A_1 = \frac{1}{8} x_4^{(r)} \sigma_r^{-4} - \frac{5}{24} (x_3^{(r)})^2 \sigma_r^{-6}, \quad (13)$$

где $x_s^{(r)}$ — кумулянт порядка s случайной величины $\xi_1^{(r)}$, $s = 3, 4$.

Нетрудно подсчитать, что

$$x_3^{(r)} = \mathbf{E}(\xi_1^{(r)} - \mathbf{E}\xi_1^{(r)})^3 = m_3 - 3\alpha\sigma_r^2 - \alpha^3, \quad (14)$$

$$m_3 = \mathbf{E}(\xi_1^{(r)})^3 = \frac{\lambda_r^3 + 3\lambda_r^2 + \lambda_r - r^3 p_r(\lambda_r)}{1 - e^{-\lambda_r} - p_r(\lambda_r)}, \quad (15)$$

$$x_4^{(r)} = \mathbf{E}(\xi_1^{(r)} - \mathbf{E}\xi_1^{(r)})^4 - 3\sigma_r^4 = m_4 - 4\alpha m_3 + 6\alpha^2 \sigma_r^2 + 3\alpha^4 - 3\sigma_r^4, \quad (16)$$

$$m_4 = \mathbf{E}(\xi_1^{(r)})^4 = \frac{\lambda_r^4 + 6\lambda_r^3 + 7\lambda_r^2 + \lambda_r - r^4 p_r(\lambda_r)}{1 - e^{-\lambda_r} - p_r(\lambda_r)}, \quad (17)$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Следствие 2. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедлива оценка (4) с заменой остаточного члена вида $O(1/(N - k))$ на $A_1(N - k)^{-1} + O((N - k)^{-2})$, где значение A_1 определяется согласно (13)–(17).

Утверждение следствия 2 дает гораздо более точную оценку чисел $B_{kr}(n, N)$ по сравнению с формулой (4). Так, в примере, рассмотренном выше, нетрудно подсчитать, что $A_1 = -0,197113 \dots$ с точностью до 10^{-6} , и поэтому соответствующая оценка с отбрасыванием остаточного члена вида $O(N^{-2})$ дает значение 9445 с относительной погрешностью порядка $-0,00055$.

Аналогичные (13), но более сложные формулы для коэффициентов A_m при $(N - k)^{-m}$ в асимптотическом разложении остаточного члена вида $O((N - k)^{-1})$ в (4) и (11) можно выписать и при $m \geq 2$.

Другой способ определения коэффициентов A_m основан на применении метода перевала и исходит из легко проверяемого равенства

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(P(z))^{N-k}}{z^{n-kr+1}} dz, \quad (18)$$

где

$$P(z) = \frac{e^{\lambda_r(z-1)} - e^{-\lambda_r} - z^r p_r(\lambda_r)}{1 - e^{-\lambda_r} - p_r(\lambda_r)} \quad (19)$$

и интегрирование осуществляется по окружности с центром в нуле, пробегаемой в положительном направлении.

Уравнение точки перевала $zP'(z)/P(z) = \alpha$ с учетом (5) и (19) дает единственное значение корня $z = 1$, лежащее на вещественной положительной полуоси. При этом

$$P(1) = 1, \quad P'(1) = \alpha, \quad P''(1) = \sigma_r^2 + \alpha(\alpha - 1).$$

Учитывая эти равенства и используя стандартную технику метода перевала [14], нетрудно вывести из (18) и (19), что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. При условиях теоремы 1 остаточный член вида $O((N - k)^{-1})$ в (4) можно заменить на ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m (N - k)^{-m},$$

если знак равенства заменить символом асимптотического разложения, справедливого равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Коэффициенты A_m этого разложения определяются из соотношений

$$A_m = -\frac{i\sigma_r(2m)!}{m! 2^{2m+1/2}} a_{2m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s u^s = \eta'(u)(\eta(u))^{-1}$$

при всех достаточно малых по модулю значениях u ,

$$a_0 = i\sqrt{2}\sigma_r^{-1}$$

и функция $\eta(u)$ является аналитическим в окрестности нуля решением дифференциального уравнения

$$\eta'(u)(P'(\eta(u))(P(\eta(u)))^{-1} - \alpha(\eta(u))^{-1}) + 2u = 0,$$

удовлетворяющим начальному условию $\eta(0) = 1$, значение P определяется из (19).

Нетрудно проверить, что коэффициенты A_m в теореме 2 определены так, что каждый из них является непрерывной функцией параметра α (и поэтому ограничен на отрезке $[\alpha_0, \alpha_1]$). Отсюда следует, что соответствующее асимптотическое разложение справедливо равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. На уровне главного члена асимптотики интегралов вида (18) этот факт отмечен в [18].

Теорема 3. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и целых положительных значений

$$k = Nq_r(\lambda_r) + x\sqrt{N},$$

для которых $q_r(\lambda) = (p_r(\lambda))/(1 - e^{-\lambda})$ и величина x заключена в любом фиксированном конечном интервале,

$$\mathbf{E}\chi_r(n, N) = Nq_r(\lambda_r)(1 + O(1/(\sqrt{N}))),$$

$$\mathbf{D}\chi_r(n, N) = N(\sigma^{(r)})^2(1 + O(1/(\sqrt{N}))),$$

где

$$(\sigma^{(r)})^2 = \frac{\sigma_r^2}{\sigma^2}(1 - q_r(\lambda_r))^2 q_r(\lambda_r) > 0, \quad (20)$$

$$\sigma^2 = (1 - e^{-\lambda_r})^{-2}(1 - (1 + \lambda_r)e^{-\lambda_r})\lambda_r > 0. \quad (21)$$

Доказательство. Нетрудно подсчитать, что в обозначениях (8) и (21) $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma^2$.

Применяя для оценки вероятности $\mathbf{P}\{S_N = n\}$ метод перевала и учитывая равенство

$$M = \mathbf{E}\xi_1 = (1 - e^{-\lambda_r})^{-1}\lambda_r \quad (22)$$

и равенство

$$(n - MN)/\sqrt{N} = (r - \alpha)x,$$

которое следует из (5), (22) и условий теоремы 3, получаем, что

$$\mathbf{P}\{S_N = n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma} \exp\left(-\frac{(r - \alpha)^2 x^2}{2\sigma^2}\right) (1 + O(1/\sqrt{N})). \quad (23)$$

Следовательно, согласно (9)

$$\sigma(n, N) = \frac{n!}{N!} \lambda_r^{-n} (e^{\lambda_r} - 1)^N \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma} \exp\left(-\frac{(r - \alpha)^2 x^2}{2\sigma^2}\right) (1 + O(1/\sqrt{N})).$$

При замене n на $n - r$, N на $N - 1$ и k на $k - 1$ равенство $\alpha = (n - kr)/(N - k)$, справедливое согласно (2), сохраняется, поэтому из условий теоремы 3 получаем, что

$$\frac{\sigma(n - r, N - 1)}{\sigma(n, N)} = \frac{(n - r)! N}{n!} \lambda_r^r (e^{\lambda_r} - 1)^{-1} (1 + O(1/\sqrt{N})).$$

С помощью несложных комбинаторных рассуждений нетрудно убедиться в том, что факториальные моменты случайной величины $\chi_r(n, N)$ определяются соотношениями

$$\mathbf{E}(\chi_r(n, N))_j = \frac{n!}{(n - rj)!(r!)^j} \frac{\sigma(n - rj, N - j)}{\sigma(n, N)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (24)$$

В частности, при $j = 1$

$$\mathbf{E}\chi_r(n, N) = \binom{n}{r} \frac{\sigma(n-r, N-1)}{\sigma(n, N)} = Nq_r(\lambda_r)(1 + O(1/\sqrt{N})).$$

При $j = 2$ получаем, что

$$\mathbf{E}(\chi_r(n, N))^2 = \mathbf{E}\chi_r(n, N) + \frac{n!}{(n-2r)!(r!)^2} \frac{\sigma(n-2r, N-2)}{\sigma(n, N)}.$$

Используя эту формулу и соображения, аналогичные приведенным выше, можно вывести асимптотическую оценку для дисперсии $\mathbf{D}\chi_r(n, N)$; соответствующие (существенно более громоздкие) выкладки мы опускаем.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. При условиях теоремы 3 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и целых положительных значений $k = Nq_r(\lambda_r) + x\sqrt{N}$, для которых $|x| \leq C$, где C — положительная постоянная,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\chi_r(n, N) = k\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\sigma^{(r)})^2}} \\ &\times \exp\left(-\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{q_r(\lambda_r)(1-q_r(\lambda_r))} - \frac{(r-\alpha)^2}{\sigma^2}\right)\right) (1 + O(1/\sqrt{N})), \end{aligned} \quad (25)$$

где значения $(\sigma^{(r)})^2$ и σ^2 определяются согласно (20) и (21).

Доказательство. Оценка (25) следует из (8), (11) и (23), если учесть, что при условиях теоремы 4 по локальной теореме Муавра–Лапласа

$$\begin{aligned} &\binom{N}{k} (q_r(\lambda_r))^k (1 - q_r(\lambda_r))^{N-k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi Nq_r(\lambda_r)(1-q_r(\lambda_r))}} \exp\left(-\frac{x^2}{2q_r(\lambda_r)(1-q_r(\lambda_r))}\right) (1 + O(1/\sqrt{N})) \end{aligned}$$

и согласно (11)

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi N(1-q_r(\lambda_r))}} (1 + O(1/\sqrt{N}))$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и $x \in [-C, C]$, для которых $k \in \mathbf{N}$.

Теорема 4 доказана.

Предположим теперь, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (3). Если отказаться от ограничения, что r фиксировано, то окажется, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $n, N, r \rightarrow \infty$ так, что выполнено (3) и $Nq_r(z_0) \rightarrow \lambda > 0$, где $z = z_0$ — единственный положительный корень уравнения

$$z(1 - e^{-z})^{-1} = \beta. \quad (26)$$

Тогда случайная величина $\chi_r(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ .

Доказательство. Известно [16], что если $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено (3), то равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$\sigma(n, N) = \frac{n!}{N!} \frac{z_0^{N-n}}{(\beta - z_0)^N \sqrt{2\pi n(1 - \beta + z_0)}} (1 + O(1/N)). \quad (27)$$

Поэтому при условиях теоремы 5 для любого фиксированного $j = 1, 2, \dots$

$$\sigma(n - rj, N - j) = \frac{(n - rj)!}{(N - j)!} \frac{z_1^{N-n+rj} (e^{z_1} - 1)^{-j}}{(\alpha - z_1)^N \sqrt{2\pi (n - rj)(1 - \alpha + z_1)}} (1 + O(1/N)), \quad (28)$$

где $z = z_1$ — единственный положительный корень уравнения (26) с заменой β на $\alpha = (n - rj)/N$. Но при наших условиях $r \sim \ln N / \ln \ln N$, и поэтому из (27) и (28) следует, что

$$\frac{\sigma(n - rj, N - j)}{\sigma(n, N)} = \frac{(n - rj)! N!}{n! (N - j)!} \frac{z_0^j}{(e^{z_0} - 1)^j} (1 + o(1)). \quad (29)$$

Действительно, согласно (3) $\beta = \alpha + rj/N$, и нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_0} &= 1 - \frac{rj}{\beta(1 - \beta + z_0)N} + O(1/N^2), \\ \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{N-n} &= \exp\left(-\frac{rj(1 - \beta)}{\beta(1 - \beta + z_0)}\right) (1 + o(1)), \\ \left(\frac{\beta - z_0}{\alpha - z_1}\right)^N &= \exp\left(\frac{rj(1 - \beta)}{\beta(1 - \beta + z_0)}\right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Из этих оценок и формул (27), (28) следует (29). Но тогда согласно (24) получаем, что при условиях теоремы 5 для любого фиксированного $j = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}(\chi_r(n, N))_j = N^j (q_r(z_0))^j (1 + o(1)) = \lambda^j (1 + o(1)).$$

Теорема 5 доказана.

Замечание 1. Теорему 5 можно также доказать следующим способом. Если воспользоваться пуассоновским приближением для биномиального распределения, то окажется, что при условиях этой теоремы для любого фиксированного $k = 0, 1, \dots$

$$\binom{N}{k} (q_r(z_0))^k (1 - q_r(z_0))^{N-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (1 + o(1)).$$

Таким образом, для доказательства теоремы 5 достаточно убедиться в том, что

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \mathbf{P}\{S_N = n\} (1 + o(1)). \quad (30)$$

Исходя из (3) и используя метод перевала для оценки вероятностей $\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}$ и $\mathbf{P}\{S_N = n\}$, несложно проверить справедливость оценки (30) (а, тем самым, и утверждение теоремы 5).

Теорема 6. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = o(n)$ и $Np_r(n/N) \rightarrow \lambda > 0$. Тогда при любом фиксированном $r = 1, 2, \dots$ справедливо утверждение теоремы 5.

Доказательство. Известно [15], что если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = o(n)$, то

$$\sigma(n, N) = \frac{N^n}{N!} \exp(-Ne^{-n/N})(1 + o(1)). \quad (31)$$

Согласно (24) достаточно убедиться в том, что для любого фиксированного $j = 1, 2, \dots$

$$\frac{\sigma(n - rj, N - j)}{\sigma(n, N)} = \lambda^j (r!)^j n^{-rj} (1 + o(1)). \quad (32)$$

При наших условиях $n \sim N \ln N$, так что согласно (31) для любых фиксированных $r, j = 1, 2, \dots$

$$\sigma(n - rj, N - j) = \frac{(N - j)^{n-rj}}{(N - j)!} \exp(-(N - j)e^{-(n-rj)/(N-j)})(1 + o(1)). \quad (33)$$

Далее, справедливы оценки

$$\frac{(N - j)^{n-rj} N!}{N^n (N - j)!} = \frac{N^j (r!)^j}{n^{rj}} (p_r(\beta))^j (1 + o(1)),$$

где $r, j = 1, 2, \dots$, $\beta = n/N \sim \ln N$, $p_r(\beta) = \beta^r e^{-\beta}/r!$.

Следовательно, с учетом (31) и (33) для обоснования (32) достаточно проверить, что для любых фиксированных $r, j = 1, 2, \dots$

$$Ne^{-n/N} = (N - j)e^{-(n-rj)/(N-j)} + o(1).$$

Так как

$$j \exp(-(n - rj)/(N - j)) = o(1),$$

достаточно убедиться в том, что для любых фиксированных $r, j = 1, 2, \dots$

$$\varepsilon_N = N(e^{-n/N} - e^{-(n-rj)/(N-j)}) = o(1). \quad (34)$$

Но $n \sim N \ln N$, поэтому

$$\varepsilon_N = Ne^{-n/N} (1 - \exp(-j \ln N/N + o(\ln N/N))) \sim j \ln N N^{-1+o(1)},$$

откуда следует (34).

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что при некотором фиксированном $r = 3, 4, \dots$

$$N(n/N - 1)^{r-1} \rightarrow r! \lambda / 2^{r-1}, \quad (35)$$

где λ — положительная постоянная. Тогда случайная величина $\chi_r(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ .

Идея доказательства теоремы 7 состоит в следующем. Если $\beta = n/N$ и $z = z_0$ — единственный положительный корень уравнения (26), то можно показать, что оценка (29) остается справедливой при $r \geq 3$ и условии (35), если остаточный член вида $O(N^{-1})$ заменить на $o(1)$ (это верно и в том случае, когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n - N = o(\sqrt{n}) \rightarrow \infty$; соответствующая оценка чисел Стирлинга второго рода $\sigma(n, N)$ содержится в [17]). Остается заметить, что из условия (35) и уравнения (26) следует, что

$$\beta = 1 + o(1), \quad z_0 = 2(\beta - 1)(1 + o(1)) = o(1),$$

поэтому

$$Nz_0'(e^{z_0} - 1)^{-1} \sim Nz_0'^{-1} \sim N2^{r-1}(\beta - 1)^{r-1} = r!\lambda(1 + o(1)),$$

и из (24) и (29) выводим, что для любого фиксированного $j = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}(\chi_r(n, N))_j = \lambda^j(1 + o(1)).$$

Замечание 2. При $r = 2$ условие (35) означает, что $n - N = \lambda \in \mathbf{N}$ при всех достаточно больших значениях n и N . В этом случае согласно [17]

$$\sigma(n, N) = \frac{n^{2\lambda}}{2^{\lambda}\lambda!}(1 + o(1)),$$

поэтому

$$\mathbf{E}(\chi_2(n, N))_j = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - j + 1)(1 + o(1)), \quad j = 1, \dots, \lambda,$$

и $\mathbf{E}(\chi_2(n, N))_j = 0$ при $j > \lambda$. Таким образом, при $r = 2$ из (35) следует, что распределение случайной величины $\chi_2(n, N)$ асимптотически вырождено в точке λ .

Пусть $\theta(n, N)$ — случайная величина, равная размеру блока, содержащего фиксированный элемент, в случайном разбиении n -элементного множества на N блоков.

Теорема 8. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнены условия (3). Тогда для любого фиксированного $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\theta(n, N) = k\} = \frac{z_0^{k-1}}{(k-1)!} e^{-z_0} (1 + o(1)), \quad (36)$$

где величина z_0 определена в теореме 5.

Оценка (36) следует из (26) и (29), если положить в (29) $j = 1$ и $r = k$ и воспользоваться очевидными равенствами

$$\mathbf{P}\{\theta(n, N) = k\} = \frac{\binom{n-1}{k-1} \sigma(n-k, N-1)}{\sigma(n, N)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Список литературы

1. Сачков В. Н., *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.
2. Колчин В. Ф., Один класс предельных теорем для условных распределений. *Лит. матем. сб.* (1968) **8**, №1, 53–63.
3. Сачков В. Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.
4. Сачков В. Н., Случайные разбиения множеств с помеченными подмножествами. *Матем. сб.* (1973) **92**, №3, 491–502.
5. Сачков В. Н., Случайные разбиения множеств. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) **19**, №1, 178–194.
6. Сачков В. Н., Случайные разбиения множеств. *Матем. вопросы киберн.* (1999) **8**, 33–54.
7. Arratia R., Tavaré S., Independent process approximations for random combinatorial structures. *Adv. Math.* (1994) **104**, 90–154.
8. Pittel B., Random set partitions: asymptotic of subset counts. *J. Comb. Theory* (1997) **79**, 326–359.
9. Mutafchiev L., Limiting distributions for the number of distinct component sizes in relational structures. *J. Comb. Theory* (1997) **79**, 1–35.
10. Kolchin A. V., Random partitions of a set and the generalised allocation scheme. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. VSP, Utrecht, 2002, pp. 215–218.
11. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
12. Рнордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*. ИЛ, Москва, 1962.
13. Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
14. Евграфов М. А., *Асимптотические оценки и целые функции*. Физматлит, Москва, 1962.
15. Медведев Ю. И., Ивченко Г. И., Асимптотические представления конечных разностей от степенной функции в произвольной точке. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) **10**, №1, 151–156.
16. Good I. J., An asymptotic formula for the differences of the powers at zero. *Ann. Math. Statist.* (1961) **32**, 249–256.
17. Hsu L. C., Note on an asymptotic expansion of the n th difference of zero. *Ann. Math. Statist.* (1948) **19**, №2, 273–277.
18. Федорюк М. В., *Асимптотика. Интегралы и ряды*. Наука, Москва, 1987.

Статья поступила 11.04.2002.