Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков, О двух статистиках типа хи-квадрат, построенных по частотам цепочек состояний сложной цепи Маркова, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 2, 149–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:20:57

О двух статистиках типа хи-квадрат, построенных по частотам цепочек состояний сложной цепи Маркова

© 2003 г. М. И. Тихомирова, В. П. Чистяков

Рассматривается последовательность состояний $(s - 1)$ -сложной цепи Маркова, у которой вероятности переходов зависят только от небольшой части $s - 1$ предыдущих состояний. Получены предельные распределения χ^2 -статистик X и Y , построенных по частотам цепочек состояний цепи Маркова. Для статистики X использовались частоты цепочек только тех состояний, от которых зависят вероятности переходов, а для статистики Y — частоты сплошных s -цепочек. Статистический критерий со статистикой X , различающий гипотезы H_1 (сложная цепь Маркова) и H_0 (независимая равновероятная последовательность) оказался более мощным по сравнению с аналогичным критерием со статистикой Y . Статистика Z критерия Неймана–Пирсона так же, как и X , зависит только от частот несплошных цепочек. Статистики X и Y вычисляются без использования параметров распределения при гипотезе H_1 , а их вероятности ошибок 1-ого и 2-ого рода зависят только от параметра нецентральности, являющегося функцией от вероятностей переходов. Таким образом, для этих статистик гипотезу H_1 можно рассматривать как сложную.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 00-15-96136.

1. Сложная цепь Маркова

При проверке качества последовательности случайных чисел одной из возможных конкурирующих гипотез по отношению к основной гипотезе H_0 о независимости и равновероятности элементов последовательности является предположение о том, что исследуемая последовательность является сложной цепью Маркова, у которой вероятности переходов близки к вероятностям равномерного распределения на состояниях, а зависимость от прошлого в переходных вероятностях ограничивается небольшим числом элементов, удаленных от данного момента на заданные расстояния.

Рассмотрим $(s - 1)$ -сложную цепь Маркова

$$x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, \quad (1)$$

у которой при любых $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \{1, 2, \dots, N\}$ и любых $t = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{x_{t+s-1} = \alpha \mid x_t = \alpha_1, x_{t+1} = \alpha_2, \dots, x_{t+s-2} = \alpha_{s-1}\} \\ &= \mathbf{P}\{x_{t+s-1} = \alpha_s \mid x_t = \alpha_1, x_{t+r-1} = \alpha_r\} > 0, \quad 1 < r < s. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим $P_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)}$ правую часть (2). Последовательность

$$y_t = (x_t, \dots, x_{t+s-1}), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

очевидно, образует неразложимую простую однородную цепь Маркова, в которой из любого состояния можно попасть в любое с положительной вероятностью не более, чем за s шагов. Обозначим

$$\{\pi_\alpha\}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s),$$

стационарное распределение цепи Маркова (3). Будем предполагать, что

$$\mathbf{P}\{x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_s = \alpha_s\} = \pi_\alpha.$$

Частоту состояний α в n первых членах последовательности (3) обозначим $\mu_\alpha(n)$. Частоту цепочки $i = (i_1, i_2, i_3)$ в n первых членах последовательности цепочек длины 3

$$z_t = (x_t, x_{t+r-1}, x_{t+s-1}), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

обозначим $v_i(n)$. Распределения частот $\mu_\alpha(n)$, $v_i(n)$ будем исследовать при $n \rightarrow \infty$ в схеме серий, когда последовательность (1) близка к независимой равновероятной последовательности:

$$P_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)}(n) = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)}(n)}{\sqrt{n}} \right), \quad (5)$$

где

$$\omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)}(n) \rightarrow \omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)}, \quad 1 < r < s \leq N.$$

Отметим, что при любых α_1, α_r

$$\sum_{\alpha_s=1}^N \omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)} = 0. \quad (6)$$

Частоты $\mu_\alpha(n)$, $v_i(n)$ удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(n) &= \sum_{t=1}^n \varepsilon_\alpha(t), \\ v_i(n) &= \sum_{t=1}^n \chi_i(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(t) &= \chi(x_t = \alpha_1, x_{t+1} = \alpha_2, \dots, x_{t+s-1} = \alpha_s), \\ \chi_i(t) &= \chi(x_t = i_1, x_{t+r-1} = i_2, x_{t+s-1} = i_3), \end{aligned}$$

$\chi(A)$ — индикатор события A .

Лемма 1. Если выполнено условие (5), то стационарное распределение $\{\pi_\alpha\}$ можно при $n \rightarrow \infty$ представить в виде

$$\pi_\alpha = \frac{1}{N^s} \left(1 + \frac{\Delta_\alpha(n)}{\sqrt{n}} \right), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (8)$$

где величины $\Delta_\alpha(n)$ стремятся при $n \rightarrow \infty$ к величинам Δ_α , удовлетворяющим равенствам

$$\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)} + \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N \Delta_{u \alpha_1 \dots \alpha_{s-1}}, \quad \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_s=1}^N \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = 0. \quad (9)$$

Доказательство. Доказательство сходимости $\Delta_\alpha(n)$ к пределам Δ_α нетрудно получить, если рассматривать вероятности $\pi_\alpha = \varphi_\alpha(x)$ как функции от x , являющиеся решением системы линейных уравнений

$$\pi_\alpha(x) = \sum_{u=1}^N \pi_{u \alpha_1 \dots \alpha_{s-1}}(x) P_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)}(x), \quad \sum_{\alpha} \pi_\alpha(x) = 1,$$

в которой

$$P_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)}(x) = \frac{1}{N} \left(1 + x \omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)} (1/x^\alpha) \right).$$

Равенства (9) также можно получить из приведенной системы уравнений.

Из равенств (9) и (6) следует, что

$$\sum_{v=1}^N \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1} v} = \sum_{u=1}^N \Delta_{u \alpha_1 \dots \alpha_{s-1}}. \quad (10)$$

Эти равенства будут использованы при вычислении параметров нецентральности χ^2 -статистик.

Ниже нам потребуется представление, аналогичное (8), для вероятностей

$$\pi_i^* = \sum_{\alpha \in G_i, i=(i_1, i_2, i_3)} \pi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}, \quad (11)$$

где

$$G_i = \{\alpha : \alpha_1 = i_1, \alpha_r = i_2, \alpha_s = i_3\}, \quad i = (i_1, i_2, i_3).$$

Используя лемму 1, нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 2. Если выполнено условие (5), то

$$\pi_i^* = \frac{1}{N^3} \left(1 + \frac{\Delta_i^*(n)}{\sqrt{n}} \right), \quad i = (i_1, i_2, i_3), \quad (12)$$

где $\Delta_i^*(n)$ стремятся при $n \rightarrow \infty$ к величинам

$$\Delta_i^* = \frac{1}{N^{s-3}} \sum_{\alpha \in G_i} \Delta_\alpha.$$

Эти величины удовлетворяют равенствам

$$\Delta_i^* = \omega_{i_3}^{(i_1, i_2)} + \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N \Delta_{i_1 i_2 u}, \quad i = (i_1, i_2, i_3). \quad (13)$$

Скорость сходимости вероятностей перехода $P_{\alpha\beta}(t)$ цепи Маркова (3) к предельным вероятностям π_β оценивается в условиях (5) при всех n и t следующим образом:

$$|P_{\alpha\beta}(t) - \pi_\beta| < Kn^{-(t/s-1)/2}, \quad (14)$$

где K — некоторая положительная постоянная. Эта оценка непосредственно следует из теоремы на стр. 100 книги Ю. А. Розанова [1], если для коэффициента эргодичности $k(s)$ воспользоваться оценкой

$$1 - k(s) = \frac{1}{2} \sup_{\alpha, \beta} \sum_{\gamma} |P_{\alpha\gamma}(s) - P_{\beta\gamma}(s)| = O(1/\sqrt{n})$$

Приведенные результаты для цепей Маркова (3) будут использованы для получения асимптотических формул моментов частот состояний цепи Маркова (3) и частот цепочек (4).

2. Математические ожидания и ковариации частот

Из однородности цепи Маркова и равенства (7) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_\alpha(n) &= n\pi_\alpha, \\ \mathbf{E}v_i(n) &= n\pi_i^*. \end{aligned} \quad (15)$$

Положим

$$\begin{aligned} \eta_\alpha(n) &= \frac{\mu_\alpha(n) - n/N^s}{\sqrt{n/N^s}}, \\ \xi_i(n) &= \frac{v_i(n) - n/N^3}{\sqrt{n/N^3}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Лемма 3. При $n \rightarrow \infty$ в схеме серий (5)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\eta_\alpha(n) &= \frac{\Delta_\alpha}{N^{s/2}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\xi_i(n) &= \frac{\Delta_i^*}{N^{3/2}}. \end{aligned}$$

Утверждения этой леммы следуют из лемм 1 и 2 и равенств (15).

Будем предполагать, что $2r \neq s + 1$. В случае равенства $\text{cov}(\xi_i(n), \xi_j(n))$ совпадают с ковариациями сплошных цепочек длины 3. Ковариации величин $\xi(n)$, $\xi_j(n)$ представимы в виде

$$\text{cov}(\xi_i(n), \xi_j(n)) = \sum_{l=1}^6 S_l - nN^3 \pi_i^* \pi_j^* \quad (17)$$

где

$$S_l = \frac{N^3}{n} \sum_{(u_1, u_2) \in A_l} \mathbf{E} \chi_i(u_1) \chi_j(u_2), \quad l = 1, \dots, 6,$$

$$A_1 = \{(u_1, u_2) : u_1 = u_2, 1 \leq u_1, u_2 \leq n\},$$

$$A_2 = \{(u_1, u_2) : |u_1 - u_2| = r - 1, 1 \leq u_1, u_2 \leq n\},$$

$$A_3 = \{(u_1, u_2) : |u_1 - u_2| = s - 1, 1 \leq u_1, u_2 \leq n\},$$

$$A_4 = \{(u_1, u_2) : |u_1 - u_2| = s - r, 1 \leq u_1, u_2 \leq n\},$$

$$A_5 = C \cap \{(u_1, u_2) : |u_1 - u_2| \leq s + 1, 1 \leq u_1, u_2 \leq n\},$$

$$A_6 = C \cap \{(u_1, u_2) : |u_1 - u_2| \geq s + 2, 1 \leq u_1, u_2 \leq n\},$$

$$C = \{(u_1, u_2) : 1 \leq u_1 \leq n, 1 \leq u_2 \leq n\} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4).$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} |A_1| &= n, \\ |A_2| &= |A_3| = |A_4| = 2n + O(1), \\ |C| &= |A_5 \cup A_6| = n^2 - 7n + O(1). \end{aligned} \quad (18)$$

Величины $\chi_i(u_1)$, $\chi_j(u_2)$ в первых четырех суммах (17) одинаково распределены и, следовательно, эти суммы можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_1 &= M_{ij}^{(1)}, \\ S_2 &= M_{ij}^{(2)} + M_{ji}^{(2)}, \\ S_3 &= M_{ij}^{(3)} + M_{ji}^{(3)} + O(1/n), \\ S_4 &= M_{ij}^{(4)} + M_{ji}^{(4)} + O(1/n), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(1)} &= N^3 P\{D_i \cap D_j\}, \\ M_{ij}^{(2)} &= N^3 P\{D_i \cap (x_r = j_1, x_{2r-1} = j_2, x_{r+s-1} = j_3)\}, \\ M_{ij}^{(3)} &= N^3 P\{D_i \cap (x_s = j_1, x_{s+r-1} = j_2, x_{2s-1} = j_3)\}, \\ M_{ij}^{(4)} &= N^3 P\{D_i \cap (x_{s-r+1} = j_1, x_s = j_2, x_{2s-r} = j_3)\}, \\ D_i &= \{x_1 = i_1, x_r = i_2, x_s = i_3\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$M_{ij}^{(1)} = N^3 \delta_{ij} \pi_i^*,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Отсюда, используя лемму 2, при $n \rightarrow \infty$ получим, что

$$M_{ij}^{(1)} = \delta_{ij} + O(1/\sqrt{n}). \quad (20)$$

Величину $M_{ij}^{(2)}$ представим в виде

$$M_{ij}^{(2)} = N^3 \sum_{\alpha \in G_i, \beta \in G_j} \pi_\alpha P_{\alpha\beta}(r-1). \quad (21)$$

Отсюда, используя (5) и (8), нетрудно получить, что

$$\frac{1}{N^3} M_{ij}^{(2)} = \delta_{i_2 j_1} \frac{1}{N^5} + O(1/\sqrt{n}). \quad (22)$$

Аналогично находим, что

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(3)} &= \delta_{i_3 j_1} \frac{1}{N^2} + O(1/\sqrt{n}), \\ M_{ij}^{(4)} &= \delta_{i_3 j_2} \frac{1}{N^2} + O(1/\sqrt{n}). \end{aligned} \quad (23)$$

Сумма S_5 разбивается на конечное число сумм с фиксированной разностью $u_1 - u_2$. Каждая из них оценивается аналогично (21). В сумме, аналогичной (21), фиксируется 6 индексов вместо 5 и поэтому

$$S_5 = N^3 \frac{|A_5|}{n} (1/N^6 + O(1/\sqrt{n})).$$

Отсюда, учитывая (12), получим, что

$$S_5 = \frac{|A_5|}{n} (N^3 \pi_i^* \pi_j^* + O(1/\sqrt{n})). \quad (24)$$

Сумму S_6 представим в виде

$$S_6 = \frac{N^3}{n} \sum_{\alpha \in G_i, \beta \in G_j} \sum_{(u_1, u_2) \in A_6} \pi_\alpha P_{\alpha\beta}(|u_1 - u_2|).$$

Используя это представление и (14), можно показать, что

$$S_6 = \frac{|A_6|}{n} (N^3 \pi_i^* \pi_j^* + O(1/\sqrt{n})). \quad (25)$$

Из равенств (17), (18), (20), (22)–(25) находим асимптотическую формулу для ковариаций (17). Полученные результаты приведем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если $2r \neq s + 1$, то при $n \rightarrow \infty$ в схеме серий (5)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \xi_i(n) &= \omega_{i_3}^{(i_1, i_2)} / \sqrt{N^3}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}(\xi_i(n), \xi_j(n)) &= b_{ij}, \end{aligned}$$

где

$$b_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{N^2} (\delta_{i_2 j_1} + \delta_{i_3 j_1} + \delta_{i_3 j_2} + \delta_{j_2 i_1} + \delta_{j_3 i_1} + \delta_{j_3 i_2}) - \frac{7}{N^3}.$$

3. Предельные распределения

Частоты $\mu_\alpha(n)$ состояний цепи Маркова (3) при $n \rightarrow \infty$ в схеме серий (5) асимптотически нормальны. Это утверждение нетрудно получить, если воспользоваться теоремой 1 из [6]. Отсюда следует асимптотическая нормальность $v_i(n)$, являющихся суммами частот $\mu_\alpha(n)$.

Положим

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}}(n) &= \sum_{\alpha_s=1}^N \mu_\alpha(n), \\ \tilde{\alpha} &= (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s), \\ \tilde{v}_{(i_1, i_2)}(n) &= \sum_{i_3=1}^N v_{i_1 i_2 i_3}(n); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{\tilde{\alpha}}(n) &= \frac{\tilde{\mu}_{\tilde{\alpha}}(n) - n/N^{s-1}}{\sqrt{n/N^{s-1}}}, \\ \tilde{\xi}_{(i_1, i_2)}(n) &= \frac{\tilde{v}_{(i_1, i_2)}(n) - n/N^2}{\sqrt{n/N^2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Нормированные величины (27) можно выразить через величины (16) следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{(i_1, i_2)}(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i_3=1}^N \xi_{i_1 i_2 i_3}(n), \\ \tilde{\eta}_{\tilde{\alpha}}(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha_s=1}^N \mu_\alpha(n). \end{aligned} \quad (28)$$

Статистики типа χ^2 , построенные по частотам несплошных и сплошных цепочек, определим следующим образом:

$$X(n) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^N \xi_i^2(n) - \sum_{i_1, i_2=1}^N \tilde{\xi}_{(i_1, i_2)}^2(n), \quad (29)$$

$$Y(n) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}=1}^N \eta_\alpha^2(n) - \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}=1} \tilde{\eta}_{\tilde{\alpha}}^2(n). \quad (30)$$

Сходимость при $n \rightarrow \infty$ распределения статистики (30) к нецентральному χ^2 -распределению хорошо известна. Это утверждение можно получить из результатов работ [2] и [3]. Выразим параметр нецентральности a_Y^2 предельного распределения $Y(n)$ через параметры рассматриваемой цепи Маркова. По второй формуле (28), используя лемму 3, при $n \rightarrow \infty$ получим, что

$$\mathbf{E} \tilde{\eta}_{\tilde{\alpha}}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha_s=1}^N \mathbf{E} \eta_\alpha(n) \rightarrow \frac{1}{N^{(s+1)/2}} \sum_{\alpha_s=1}^N \Delta_\alpha.$$

Отсюда, используя лемму 3 и равенство

$$a_Y^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_s=1}^N (\mathbf{E} \eta_\alpha(n))^2 - \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}=1} (\mathbf{E} \tilde{\eta}_{\tilde{\alpha}}(n))^2 \right),$$

получим равенство

$$N^s a_Y^2 = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_s=1}^N \Delta_\alpha^2 - \frac{1}{N} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}=1}^N \left(\sum_{\alpha_s}^N \Delta_\alpha \right)^2. \quad (31)$$

Из равенства (9) следует, что

$$\Delta_\alpha^2 = (\omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)})^2 + \frac{2}{N} \omega_{\alpha_1}^{(\alpha_1, \alpha_r)} \sum_{u=1}^N \Delta_{u\alpha_1 \dots \alpha_{s-1}} + \frac{1}{N^2} \sum_{u,v=1}^N \Delta_{u\alpha_1 \dots \alpha_{s-1}} \Delta_{v\alpha_1 \dots \alpha_{s-1}}.$$

Отсюда и из равенств (6), (10) получаем равенство

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_s=1}^N \Delta_\alpha^2 = N^{s-3} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^N (\omega_{i_3}^{(i_1, i_2)})^2 + \frac{1}{N} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_s=1}^N \left(\sum_{u=1}^N \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{s-1} u} \right)^2.$$

Подставив это выражение в (31), найдем, что

$$a_Y^2 = a^2,$$

где

$$a^2 = \frac{1}{N^3} \sum_{\alpha_1, \alpha_r, \alpha_s=1}^N (\omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)})^2. \quad (32)$$

Приведем этот частный случай общего утверждения о сходимости к χ^2 -распределению в виде следующей теоремы.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ в схеме серий (5) распределение статистики $Y(n)$ сходится к нецентральному χ^2 -распределению с $N^s - N^{s-1}$ степенями свободы и параметром нецентральности a^2 , определенным равенством (32).

Статистика $X(n)$ является квадратичной формой от нормированных частот $\{\xi_i(n)\}$. Обозначим $A = (A_{ij})$ матрицу коэффициентов этой квадратичной формы. Предельную матрицу ковариаций b_{ij} , определенных в теореме 1, обозначим B . Для того чтобы статистика $X(n)$ имела в пределе χ^2 -распределение (центральное или нецентральное) достаточно (см. [4]), чтобы выполнялось условие $ABA = A$.

Это условие было проверено в [5] для случая равновероятной независимой последовательности. В рассматриваемой схеме серий (5) предельная ковариационная матрица совпала с ковариационной матрицей для независимой равновероятной последовательности и, следовательно, это условие проверено. Параметр нецентральности a_X^2 предельного распределения определяется равенством

$$a_X^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^N (\mathbf{E} \xi_i(n))^2 - \sum_{(i_1, i_2)}^N (\mathbf{E} \tilde{\xi}_{(i_1, i_2)}(n))^2 \right).$$

Отсюда, используя леммы 2, 3 и равенство (28), нетрудно получить, что $a_X^2 = a^2$.

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 3. При $n \rightarrow \infty$ в схеме серий (5) распределение статистики $X(n)$ сходится к нецентральному χ^2 -распределению с $N^3 - N^2$ степенями свободы и параметром нецентральности a^2 , определенным формулой (31).

Статистики $X(n)$ и $Y(n)$ могут быть использованы для различения основной гипотезы H_0 (последовательность (1) является независимой и равновероятной) и конкурирующей H_1 , определенной равенством (2). Если вероятности переходов в левой части равенства (2) зависят от $v - 1$ знаков, $v > 3$, то потребуется статистика, зависящая от частот несплошных цепочек длины v .

Теорема 3 в случае $v > 3$ очевидным образом формулируется, и ее доказательство существенно не отличается от доказательства, проведенного для частот цепочек длины 3.

4. Статистические критерии

Определим X -критерий и Y -критерий. Гипотеза H_1 по X -критерию со статистикой $X(n)$ принимается, если $X(n) > C_X$, где C_X — некоторая положительная постоянная. Такое же условие для Y -критерия со статистикой $Y(n)$: гипотеза H_1 принимается, если $Y(n) > C_Y$, $C_Y > 0$.

Сравним эти два критерия в случае больших N , когда можно воспользоваться нормальных приближением предельных распределений. Обозначим X и Y нормально распределенные величины, у которых первые два момента при гипотезах H_0 и H_1 определяются равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{H_0} X &= N^3 - N^2, & \mathbf{D}_{H_0} X &= 2(N^3 - N^2), \\ \mathbf{E}_{H_1} X &= N^3 - N^2 + a^2, & \mathbf{D}_{H_1} X &= 2(N^3 - N^2) + 4a^2, \\ \mathbf{E}_{H_0} Y &= N^s - N^{s-1}, & \mathbf{D}_{H_0} Y &= 2(N^s - N^{s-1}), \\ \mathbf{E}_{H_1} Y &= N^s - N^{s-1} + a^2, & \mathbf{D}_{H_1} Y &= 2(N^s - N^{s-1}) + 4a^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Если задать для обоих критериев одинаковую вероятность ошибки первого рода α , то их вероятности ошибок 2-го рода β_X, β_Y определяются равенствами

$$\begin{aligned} u_{\beta_X} &= \frac{a^2}{\sqrt{2(N^3 - N^2) + 4a^2}} - u_\alpha \left(1 + \frac{2a^2}{N^3 - N^2} \right)^{-1/2}, \\ u_{\beta_Y} &= \frac{a^2}{\sqrt{2(N^s - N^{s-1}) + 4a^2}} - u_\alpha \left(1 + \frac{2a^2}{N^3 - N^2} \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (34)$$

где u_γ — квантиль нормального распределения:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_\gamma}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \gamma.$$

При больших N

$$\frac{u_{\beta_X}}{u_{\beta_Y}} \sim \sqrt{(N^s - N^{s-1}) / (N^3 - N^2)} \sim N^{s/6}$$

и, следовательно, X -критерий является более мощным по сравнению с Y -критерием.

Статистика $X(n)$ для произвольных несплошных цепочек в работе [5] была определена по аналогии с χ^2 -статистиками $Y(n)$, предложенными в [2]. Ранг ковариационной

матрицы частот сплошных s -цепочек совпадает с числом степеней свободы предельного χ^2 -распределения. Ранг ковариационной матрицы частот несплошных цепочек не совпадает с числом степеней свободы предельного распределения. Например, при $N = 2$ ранг ковариационной матрицы равен 5, а число степеней свободы $N^3 - N^2 = 4$. Таким образом, вместо $X(n)$ можно использовать более сложные квадратичные формы частот, не приводящее к потере степеней свободы и мощности критериев.

Отметим, что для вычисления квадратичных форм $X(n)$, $Y(n)$ от частот цепочек нужно знать только распределение при гипотезе H_0 . Для вычисления характеристик этих критериев нужны еще значения параметров a^2 , N , s . Таким образом, эти критерии могут быть использованы в случае, когда гипотеза H_1 является сложной (любые $\omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)}$ с фиксированным значением a^2).

Статистика критерия Неймана–Пирсона, когда обе гипотезы H_0 и H_1 простые, зависит от всех $\omega_{\alpha_s}^{(\alpha_1, \alpha_r)}$. Функция правдоподобия $L(x_1, \dots, x_{n+s-1})$ при гипотезе H_1 имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_{n+s-1}) = \prod_{t=1}^N p_{x_{t+s-1}}^{(x_t, x_{t+r-1})}.$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \ln L(x_1, \dots, x_{n+s-1}) &= \sum_{t=1}^n \ln p_{x_{t+s-1}}^{(x_t, x_{t+r-1})} \\ &= \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^N v_{(i_1 i_2 i_3)}(n) \ln p_{i_3}^{(i_1 i_2)}. \end{aligned}$$

и, следовательно, статистику $\tilde{Z}_n$ критерия Неймана–Пирсона, используя (5), можно записать в виде

$$\tilde{Z}_n = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^N v_i(n) \ln(1 + \omega_{i_3}^{(i_1, i_2)} / \sqrt{n}). \quad (35)$$

Приведем характеристики критерия, близкого к критерию Неймана–Пирсона, со статистикой

$$Z(n) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^N \omega_{i_3}^{(i_1, i_2)} \xi_i(n). \quad (36)$$

При $n \rightarrow \infty$ в схеме серий (5) эта статистика асимптотически нормальна. Обозначим Z случайную величину, распределение которой совпадает с предельным распределением для $Z(n)$.

Используя теорему 1, нетрудно получить первые два момента при гипотезах H_0 и H_1 :

$$\mathbf{E}_{H_0} Z = 0, \quad \mathbf{D}_{H_0} Z = \mathbf{D}_{H_1} Z = N^3 a^2, \quad \mathbf{E}_{H_1} Z = a^2 N^{3/2}. \quad (37)$$

Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, α и β_Z , критерия со статистикой Z связаны равенством

$$u_{\beta_Z} = a - u_{\alpha}. \quad (38)$$

Список литературы

1. Розанов Ю. А., *Случайные процессы*. Наука, Москва, 1979.
2. Степанов В. Е., Некоторые статистические критерии для цепей Маркова. *Теория вероятностей и ее применения* (1957) 2, №1, 143–144.
3. Селиванов Б. И., Чистяков В. П., Последовательный χ^2 -критерий, построенный по s -цепочкам состояний цепи Маркова. *Дискретная математика* (1997) 9, №4, 127–136.
4. Dik I. I., Gunst M. C. M., The distribution of general quadratic form in normal variables. *Stat. Neerlandica* (1985) 39, №1, 14–26.
5. Чистяков В. П., Статистики хи-квадрат, построенные по частотам несплошных цепочек исходов независимых испытаний. *Дискретная математика* (2001) 13, №4, 52–59.
6. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., Проверка серий и интервалов. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1995) 2, №6, 980–993.

Статья поступила 29.01.2003.