Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, Булева сводимость, *Дискрет. матем.*,
2003, том 15, выпуск 3, 40–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:50:09

Булева сводимость

© 2003 г. С. С. Марченков

На множестве всех бесконечных двоичных последовательностей определяется оператор булевой сводимости — вариант оператора конечно-автоматной сводимости, когда рассматриваются автоматы с несколькими входами и одним состоянием. Каждое множество Q булевых функций, содержащее селекторную функцию и замкнутое относительно операции суперпозиции специального вида, определяет Q -сводимость и Q -степени — множества Q -эквивалентных последовательностей. В работе исследуются свойства частично упорядоченного множества $\mathcal{L}_Q$ всех Q -степеней: наличие максимальных, минимальных и наибольшего элементов, существование бесконечных цепей и антицепей, существование верхних граней.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 03-01-00783.

1. Введение

В теории алгоритмов в вопросах классификации множеств важная роль отводится понятиям алгоритмической сводимости и степени неразрешимости. Алгоритмическая сводимость и порождаемые ею степени вводятся по следующей схеме.

Пусть $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Фиксируется некоторый класс $\mathcal{O}$ эффективных операторов, заданных на булеане $\mathcal{B}(N)$. Пусть X, Y — подмножества N . Говорят, что оператор O сводит множество X к множеству Y , если $X = O(Y)$. Множество X $\mathcal{O}$ -сводимо к множеству Y (обозначение $X \leq_{\mathcal{O}} Y$), если существует такой оператор O из класса $\mathcal{O}$, который сводит X к Y .

Обычно класс $\mathcal{O}$ содержит тождественный оператор и замкнут относительно операции композиции. Поэтому отношение $\mathcal{O}$ -сводимости определяет на булеане $\mathcal{B}(N)$ предпорядок. Множества X, Y называются $\mathcal{O}$ -эквивалентными, если $X \leq_{\mathcal{O}} Y$ и $Y \leq_{\mathcal{O}} X$. Класс $\mathcal{O}$ -эквивалентных множеств называется $\mathcal{O}$ -степенью. Отношение $\leq_{\mathcal{O}}$ индуцирует на множестве $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ всех $\mathcal{O}$ -степеней частичный порядок. Для наиболее употребительных алгоритмических сводимостей (e -, T -, tt - и m -сводимости) соответствующее частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ образует верхнюю полурешетку с нулем (см. [1]).

В рамках приведенной выше общей схемы можно определять многие другие виды алгоритмической сводимости и соответствующие им степени. В 1974 г. Г. Рейна [2] предложил рассматривать в качестве операторов сводимости операторы конечно-автоматных преобразований. Не вдаваясь в детали определения конечно-автоматной сводимости, отметим, что она оказалась весьма своеобразной сводимостью, во многом отличающейся от известных алгоритмических сводимостей (см. [2–6]). Добавим еще, что при рассмотрении

конечно-автоматной сводимости вместо множеств удобно пользоваться характеристическими функциями или, что эквивалентно, бесконечными двоичными последовательностями.

Естественным шагом на пути определения “самых простых” операторов алгоритмической сводимости является рассмотрение конечно-автоматных операторов, осуществляемых автоматами с несколькими входами и одним состоянием. В этом случае автомат можно представить одной булевой функцией. Поэтому соответствующая сводимость в работе названа булевой сводимостью.

Цель настоящей работы — дать точное определение булевой сводимости, установить ее важнейшие свойства, выявить структуру частично упорядоченного множества булевых степеней и рассмотреть примеры булевой сводимости для наиболее интересных множеств булевых функций.

2. Основные понятия

Будем рассматривать бесконечные двоичные последовательности, составленные из нулей и единиц. Если α — такая последовательность, то ее элементы обозначаем через $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$. Таким образом, $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\dots$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$ при $i \geq 0$. Если $i \in N$, то через $(\alpha)_i$ обозначаем последовательность $\alpha_i\alpha_{i+1}\dots$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, $\alpha = \alpha_0\alpha_1\dots$, $\beta = \beta_0\beta_1\dots$ — бесконечные двоичные последовательности. Говорим, что функция f сводит последовательность α к последовательности β , если существуют такие числа $k, l \in N$, что для любого $i \in N$ выполняется условие

$$\alpha_{k+i} = f(\beta_{l+i}, \dots, \beta_{l+i+n-1}). \quad (1)$$

В случае, когда $k = l = 0$, говорим, что функция f стандартно сводит последовательность α к последовательности β . Очевидно, что если функция f сводит последовательность α к последовательности β и выполняется соотношение (1), то функция f стандартно сводит последовательность $(\alpha)_k$ к последовательности $(\beta)_l$.

Пусть Q — множество булевых функций. Говорим, что последовательность α Q -сводится к последовательности β (обозначение $\alpha \leq_Q \beta$), если множество Q содержит такую функцию f , которая сводит α к β . Последовательности α, β называем Q -эквивалентными, если $\alpha \leq_Q \beta$ и $\beta \leq_Q \alpha$. Совокупность всех последовательностей, Q -эквивалентных последовательности α , образует Q -степень, содержащую последовательность α , которую мы обозначаем через $[\alpha]_Q$.

Пусть $\mathcal{L}_Q$ есть множество всех Q -степеней. Отношение $\leq_Q$ переносим с последовательностей на Q -степени: если a, b — Q -степени, то полагаем $a \leq_Q b$, если $\alpha \leq_Q \beta$ для некоторых последовательностей $\alpha \in a$ и $\beta \in b$.

Мы хотим, чтобы отношение $\leq_Q$ являлось частичным порядком на множестве $\mathcal{L}_Q$. Нетрудно видеть, что для этого отношение $\leq_Q$, рассматриваемое на множестве последовательностей, должно обладать свойствами рефлексивности и транзитивности. Чтобы обеспечить рефлексивность отношения $\leq_Q$, потребуем вхождение в множество Q какой-либо селекторной функции, то есть функции e_j^n , $1 \leq j \leq n$, $n \geq 1$, удовлетворяющей тождеству

$$e_j^n(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = x_j.$$

Действительно, если $e_j^n \in Q$, то для любой последовательности α функция e_j^n сводит α

к α (в качестве значений параметров k, l в соответствующей формуле (1) следует взять $j - 1$ и 0) и, таким образом, $\alpha \leq_Q \alpha$.

Выполнение для отношения $\leq_Q$ свойства транзитивности приводит к замкнутости множества Q относительно операции суперпозиции специального вида, которую мы будем называть r -суперпозицией. Говорят, что функция $h(x_1, \dots, x_{m+n-1})$ получается из функций $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_m)$ с помощью операции r -суперпозиции, если

$$h(x_1, \dots, x_{m+n-1}) = f(g(x_1, \dots, x_m), g(x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1})). \quad (2)$$

Множество булевых функций, замкнутое относительно операции r -суперпозиции, назовем r -замкнутым.

Убедимся, что для r -замкнутого множества Q отношение $\leq_Q$ транзитивно на множестве последовательностей. Пусть функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_m)$ сводят соответственно последовательность α к последовательности β и последовательность β к последовательности γ . Пусть далее для функции f , некоторых k, l и всех i выполняется равенство (1), а для функции g , некоторых p, q и всех i равенство

$$\beta_{p+i} = g(\gamma_{q+i}, \dots, \gamma_{q+i+m-1}). \quad (3)$$

Если функция h определена равенством (2), то из соотношений (1) и (3) следует, что для любых i выполняется равенство

$$\alpha_{s+i} = h(\gamma_{s+l+q-k-p+i}, \dots, \gamma_{s+l+q-k-p+i+m+n-2}),$$

где s выбрано так, что $s \geq \max(k, p+k-l)$. Значит, функция h сводит последовательность α к последовательности γ и, таким образом, $\alpha \leq_Q \gamma$.

Отметим, что r -замкнутое множество, вообще говоря, не является замкнутым относительно обычной операции суперпозиции. Это видно на примере r -замкнутого множества

$$\{a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_{n-1} x_{n-1} \oplus x_n, n = 1, 2, \dots\}.$$

В дальнейшем мы будем преимущественно рассматривать такие множества Q булевых функций, которые r -замкнуты и содержат селекторную функцию. Для таких множеств Q множество $\mathcal{L}_Q$ Q -степеней частично упорядочено отношением $\leq_Q$.

3. Некоторые свойства булевой сводимости

Предложение 1. Пусть Q — r -замкнутое множество булевых функций, содержащее селекторную функцию, $\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \dots$ — бесконечная двоичная последовательность. Тогда число двоичных последовательностей, Q -сводящихся к последовательности α , не более чем счетно, а Q -степень $[\alpha]_Q$ содержит все последовательности вида

$$\beta_0 \dots \beta_p \alpha_q \alpha_{q+1} \dots, \quad (4)$$

где $\beta_0 \dots \beta_p$ — произвольная конечная двоичная последовательность (возможно пустая) и $q \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Первая часть утверждения следует из того, что каждый из параметров f, k, l , участвующих в определении Q -сводимости, принимает значения из не более чем счетного множества.

Пусть в множество Q входит селекторная функция e_j^n . Тогда функция e_j^n будет сводить последовательность (4) к последовательности α , если в качестве значений параметров k, l в определении сводимости выбрать $p + j$ и q . Обратно, последовательность α сводится к последовательности (4) функцией e_j^n , если в качестве значений параметров k, l выбрать $q + j - 1$ и $p + 1$.

Следствие 1. Для любого r -замкнутого множества Q булевых функций, содержащего селекторную функцию, любая Q -степень состоит из счетного числа различных последовательностей. Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_Q$ континуально и не имеет наибольшего элемента.

Предложение 2. Пусть β — периодическая последовательность периода p и булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сводит последовательность α к последовательности β . Тогда α — также периодическая последовательность периода p .

Доказательство. Пусть для некоторых k, l и всех i выполняется соотношение (1). Согласно условию, найдется такое j_0 , что для любого $j \geq j_0$ имеет место равенство $\beta_j = \beta_{p+j}$. Тогда на основании (1) для любого i такого, что $l + i \geq j_0$, будет справедливо равенство $\alpha_{k+i} = \alpha_{p+k+i}$. Таким образом, α — периодическая последовательность периода p .

Следствие 2. Пусть Q — r -замкнутое множество булевых функций, содержащее селекторную функцию, α — бесконечная периодическая последовательность. Тогда начальный сегмент

$$\{a: a \in \mathcal{L}_Q, a \leq_Q [\alpha]_Q\}$$

частично упорядоченного множества $\mathcal{L}_Q$, определяемый элементом $[\alpha]_Q$, конечен.

Будем обозначать число элементов конечного множества A через $|A|$.

Предложение 3. Для любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ существует такая периодическая последовательность α , что функция f стандартно сводит последовательность α не более чем к 2^{n-1} двоичным последовательностям.

Доказательство. Пусть $i \in \{0, 1\}$ и $f^{-1}(i)$ — полный прообраз i при отображении f . Обозначим через A_0 то из множеств $f^{-1}(0), f^{-1}(1)$, которое содержит меньшее число элементов (при равенстве числа элементов полагаем $A_0 = f^{-1}(0)$). Очевидно, что $|A_0| \leq 2^{n-1}$. Если $A_0 = f^{-1}(i)$, то пусть $\alpha_0 = i$. При $A_0 = \emptyset$ полагаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_0$$

и тем самым завершаем определение последовательности α .

Пусть $A_0 \neq \emptyset$. Обозначим через A_1 то из двух множеств

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}): (a_1, \dots, a_{n+1}) \in A_0 \times \{0, 1\}, f(a_2, \dots, a_{n+1}) = i\}, \quad (5)$$

которое содержит меньшее число элементов (при равенстве числа элементов в множествах (5) в качестве A_1 выбираем множество, отвечающее значению $i = 0$). Полагаем $\alpha_1 = i$, если для данного i множество A_1 совпадает с множеством (5). Очевидно, что $A_1 \subseteq \{0, 1\}^{n+1}$ и $|A_1| \leq |A_0|$.

Продолжая по индукции, предположим, что множество A_j уже определено и $A_j \subseteq \{0, 1\}^{n+j}$. Если $A_j = \emptyset$, то завершаем определение последовательности α , полагая

$$\alpha_{j+1} = \alpha_{j+2} = \dots = \alpha_j.$$

Если же $A_j \neq \emptyset$, то обозначим через A_{j+1} то из двух множеств

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_{n+j+1}) : (a_1, \dots, a_{n+j+1}) \in A_j \times \{0, 1\}, f(a_{j+2}, \dots, a_{n+j+1}) = i\}, \quad (6)$$

которое содержит меньшее число элементов (при равенстве числа элементов выбираем множество (6) для $i = 0$). Полагаем $\alpha_{j+1} = i$, если для данного i множество A_{j+1} совпадает с множеством (6).

Из построения следует, что либо для некоторого j получаем $A_j = \emptyset$, и тогда α есть периодическая последовательность

$$\alpha_0 \dots \alpha_{j-1} \alpha_j \alpha_j \alpha_j \dots,$$

либо все множества $A_0, A_1, \dots$ непусты и тогда

$$|A_0| \geq |A_1| \geq |A_2| \geq \dots$$

В последнем случае положим

$$m = \lim_{i \rightarrow \infty} |A_i|.$$

Если в процессе построения реализуется случай $A_j = \emptyset$, то по определению множества A_j и значения α_j функция f не может стандартно сводить последовательность α ни к какой двоичной последовательности.

Предположим, что все множества A_j непусты. Поскольку при любом j любой набор из A_{j+1} получается из подходящего набора множества A_j добавлением последнего элемента, последовательность множеств $A_0, A_1, \dots$ в пределе определяет m бесконечных двоичных последовательностей $\beta^1, \dots, \beta^m$. Из построения следует также, что последовательность α стандартно сводится функцией f только к одной из последовательностей $\beta^1, \dots, \beta^m$.

Остается убедиться, что последовательность α периодическая. В самом деле, число множеств вида

$$\{(a_{j+2}, \dots, a_{j+n}) : (a_{j+2}, \dots, a_{j+n}) \text{ есть конец некоторого набора из } A_j\} \quad (7)$$

не превосходит величины 2^{2^n-1} . Если для некоторых j_1, j_2 соответствующие множества (7) совпадают и при этом $|A_{j_1}| = |A_{j_2}| = m$, то, как вытекает из построения, будут совпадать множества (7), определенные для величин $j_1 + 1$ и $j_2 + 1$. Это обеспечивает периодичность последовательности α . Предложение доказано.

Обозначим последовательности $00\dots, 11\dots$ через 0 и 1 .

Предложение 4. Для любого r -замкнутого множества Q булевых функций, содержащего селекторную функцию, хотя бы одна из Q -степеней $[0]_Q, [1]_Q$ минимальна в $\mathcal{L}_Q$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность 0 . Если каждая функция множества Q сохраняет константу 0 , то любая последовательность α , Q -сводящаяся к последовательности 0 , содержит, очевидно, лишь конечное число единиц. Пользуясь предложением 1, заключаем, что в этом случае последовательности 0 и α Q -эквивалентны и, следовательно, Q -степень $[0]_Q$ минимальна в $\mathcal{L}_Q$.

Предположим, что в множестве Q имеется функция f , не сохраняющая 0 . Тогда функция f сводит к последовательности 0 любую последовательность β , которая содержит конечное число нулей. В силу предложения 1 любая такая последовательность β

Q -эквивалентна последовательности **1**. Далее повторяем приведенные выше рассуждения для последовательности **1**. Именно, если все функции множества Q сохраняют константу **1**, то минимальной является Q -степень $[1]_Q$. В противном случае последовательности **0** и **1** Q -эквивалентны и определяют (одну) минимальную Q -степень.

Предложение 5. Пусть Q — r -замкнутое множество булевых функций, содержащее селекторную функцию. Тогда Q -степени $[0]_Q$, $[1]_Q$ являются различными минимальными элементами в $\mathcal{L}_Q$ в том и только том случае, когда все функции множества Q сохраняют константы **0** и **1**.

Доказательство. Пусть Q -степени $[0]_Q$, $[1]_Q$ суть различные минимальные элементы в $\mathcal{L}_Q$. Тогда, в частности, последовательность **1** не может Q -сводиться к последовательности **0**. Отсюда вытекает (см., например, доказательство предложения 4), что все функции множества Q сохраняют константу **0**. Аналогично устанавливаем, что все функции множества Q сохраняют константу **1**.

Обратно, пусть все функции множества Q сохраняют константы **0** и **1**. Теми же рассуждениями, что и в доказательстве предложения 4, показываем, что Q -степени $[0]_Q$, $[1]_Q$ минимальны в $\mathcal{L}_Q$. Кроме того, очевидно, что эти Q -степени различны.

Предложение 6. Пусть множество Q булевых функций r -замкнуто и содержит селекторную функцию. Тогда множество $\mathcal{L}_Q$ имеет наименьший элемент a в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

- (1) $0 \in Q$ и все функции множества Q сохраняют константу **0** (в этом случае $\mathbf{0} \in a$ и $\mathbf{1} \notin a$);
- (2) $1 \in Q$ и все функции множества Q сохраняют константу **1** (в этом случае $\mathbf{1} \in a$ и $\mathbf{0} \notin a$);
- (3) $\{0, 1\} \subset Q$ (в этом случае $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \subset a$).

Доказательство. Пусть a — наименьший элемент множества $\mathcal{L}_Q$. Согласно предложению 4, Q -степень a содержит хотя бы одну из последовательностей **0**, **1**. Предположим, что $\mathbf{0} \in a$. Если $\mathbf{1} \notin a$, то множество Q не может содержать функцию, не сохраняющую константу **0**, так как иначе последовательность **1** сводилась бы этой функцией к последовательности **0** и в силу минимальности Q -степени a последняя содержала бы последовательность **1**. Итак, все функции множества Q сохраняют константу **0**.

Покажем, что $\mathbf{0} \in Q$. Предположим противное. Тогда для произвольной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из Q найдется такой набор $(b_1, \dots, b_n)$, что $f(b_1, \dots, b_n) = 1$. Рассмотрим такую последовательность α , которая для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из Q содержит бесконечное число соответствующих подпоследовательностей $b_1 \dots b_n$. Понятно, что в силу этого условия любая последовательность β , которая Q -сводится к последовательности α , будет содержать бесконечное число единиц. Иными словами, в этом случае последовательность **0** не может Q -сводиться к последовательности α . Это противоречит тому, что Q -степень $[0]_Q$ является наименьшей в $\mathcal{L}_Q$.

Аналогично рассматривается случай, когда $\mathbf{1} \in a$ и $\mathbf{0} \notin a$.

Обратно, легко проверяется, что выполнение любого из условий 1–3 приводит к существованию в $\mathcal{L}_Q$ наименьшего элемента.

4. Верхние грани и антицепи

Теорема 1. Для любого множества Q булевых функций найдутся такие последовательности α, β , что ни для одной последовательности γ не могут одновременно выполняться соотношения $\alpha \leq_Q \gamma$ и $\beta \leq_Q \gamma$.

Доказательство. Будем предполагать, что функции множества Q перенумерованы и f_i — функция из Q с номером i . Зафиксируем также нумерацию множества N^3 , в которой каждая тройка чисел имеет бесконечное количество номеров. Последовательности α, β будем определять с помощью пошаговой процедуры, задавая на каждом шаге конечное число элементов α и β . Считаем, что до шага 0 ни один элемент последовательностей α, β не определен.

Шаг $2t$. Пусть до шага $2t$ уже определены значения $\alpha_0, \dots, \alpha_{k_{2t-1}}$ и $\beta_0, \dots, \beta_{k_{2t-1}}$, и пусть t есть номер тройки (p, q, r) . Будем предполагать, что функции f_p, f_q зависят от n переменных.

Используя функцию f_p , так же, как в доказательстве предложения 3, разворачиваем процесс порождения элементов периодической последовательности

$$\alpha_{k_{2t-1}+1}, \alpha_{k_{2t-1}+2}, \dots$$

и последовательностей $\delta^1, \dots, \delta^m$ с таким расчетом, чтобы последовательность $\alpha_{k_{2t-1}+1}, \alpha_{k_{2t-1}+2}, \dots$ стандартно сводилась функцией f_p лишь к одной из последовательностей $\delta^1, \dots, \delta^m$. Если для некоторого s после определения значений

$$\alpha_{k_{2t-1}+1}, \dots, \alpha_{k_{2t-1}+s}$$

выяснится, что $m = 0$, то завершаем шаг $2t$, добавляя к уже определенным элементам $\alpha_0, \dots, \alpha_{k_{2t-1}}$ новые элементы $\alpha_{k_{2t-1}+1}, \dots, \alpha_{k_{2t-1}+s}$. Полагаем также

$$\beta_{k_{2t-1}+1} = \dots = \beta_{k_{2t-1}+s} = 0.$$

Таким образом, получаем, что $k_{2t} = k_{2t-1} + s$. Далее переходим к шагу $2t + 1$.

Пусть $m \neq 0$. Выберем число s так, чтобы (см. доказательство предложения 3) множество A_s , строящееся для определения значения $\alpha_{k_{2t-1}+s}$, состояло из m элементов. Пусть, кроме того, выполняется неравенство $s \geq r + m - 1$. Добавляем тогда к элементам $\alpha_0, \dots, \alpha_{k_{2t-1}}$ элементы $\alpha_{k_{2t-1}+1}, \dots, \alpha_{k_{2t-1}+s}$, и полагаем

$$\beta_{k_{2t-1}+1} = \bar{f}_q(\delta_r^1, \dots, \delta_{r+n-1}^1), \dots, \beta_{k_{2t-1}+m} = \bar{f}_q(\delta_{r+m-1}^m, \dots, \delta_{r+m+n-2}^m) \quad (8)$$

и $\beta_{k_{2t-1}+i} = 0$ при $m < i \leq s$. Таким образом, получаем, что $k_{2t} = k_{2t-1} + s$. Переходим к шагу $2t + 1$.

Шаг $2t + 1$. Пусть до шага $2t + 1$ уже определены значения $\alpha_0, \dots, \alpha_{k_{2t}}$ и $\beta_0, \dots, \beta_{k_{2t}}$, а t есть номер тройки (p, q, r) . Проводим те же построения, что и на шаге $2t$, заменяя k_{2t-1} на k_{2t} и поменяв местами f_p, f_q и α, β . Затем переходим к шагу $2t + 2$.

Покажем, что не существует такой последовательности γ , для которой одновременно $\alpha \leq_Q \gamma$ и $\beta \leq_Q \gamma$. Пусть это не так, последовательность γ с указанными свойствами существует и булевы функции f_p, f_q из Q сводят последовательности α, β к последовательности γ . Тогда найдутся такие числа a, b, c, d , что функция f_p стандартно сводит

последовательность $(\alpha)_a$ к последовательности $(\gamma)_b$, а функция f_q стандартно сводит последовательность $(\beta)_c$ к последовательности $(\gamma)_d$. Нетрудно видеть, что в этом случае для любого $v \geq \max(a, c)$ найдутся такие числа z, w , что функции f_p, f_q будут стандартно сводить последовательности $(\alpha)_v$ и $(\beta)_v$ к последовательностям $(\gamma)_z$ и $(\gamma)_w$ соответственно. В самом деле, достаточно положить $z = b + v - a$ и $w = d + v - c$.

Пусть

$$r = |w - z| = |a + d - b - c|.$$

Рассмотрим случай, когда $a + d - b - c \geq 0$. Тогда последовательность $(\gamma)_w$ есть конец последовательности $(\gamma)_z$. Выберем такой номер t тройки (p, q, r) , чтобы выполнялось неравенство $k_{2t-1} \geq \max(a, c)$. Если на шаге $2t$ выясняется, что $m = 0$, то элементы $\alpha_{k_{2t-1}+1}, \dots, \alpha_{k_{2t-1}+s}$ последовательности α определяются в конструкции таким образом, что функция f_p не может стандартно сводить последовательность $(\alpha)_{k_{2t-1}+1}$ ни к какой последовательности γ .

Предположим, что на шаге $2t$ значение соответствующей величины m не равно 0. Тогда значения $\alpha_{k_{2t-1}+1}, \dots, \alpha_{k_{2t-1}+s}$ определяются в конструкции так, что функция f_p может стандартно сводить последовательность $(\alpha)_{k_{2t-1}+1}$ только к одной из последовательностей $\delta^1, \dots, \delta^m$. Вместе с тем равенства (8) показывают, что функция f_q не может стандартно сводить последовательность $(\beta)_{k_{2t-1}+1}$ к последовательности $(\delta^1)_r$, последовательность $(\beta)_{k_{2t-1}+2}$ к последовательности $(\delta^2)_{r+1}, \dots$, последовательность $(\beta)_{k_{2t-1}+m}$ к последовательности $(\delta^m)_{r+m-1}$. Получаем противоречие с утверждением о существовании последовательностей вида $(\gamma)_z$ и $(\gamma)_w$, где $w - z = r$.

В случае $a + d - b - c < 0$ рассматриваем подходящий шаг вида $2t + 1$, где t есть номер тройки (p, q, r) .

Теорема доказана.

Следствие 3. Для любого r -замкнутого множества Q булевых функций, содержащего селекторную функцию, частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_Q$ не является верхней полурешеткой.

Замечание 1. Полученное следствие указывает на значительное отличие булевой сводимости от известных алгоритмических сводимостей (e -, T -, tt -, m - и конечно-автоматной сводимости), для которых соответствующее множество $\mathcal{L}_Q$ образует верхнюю полурешетку.

Подмножество A частично упорядоченного множества $\mathcal{L}$ называется антицепью, если любые два элемента множества A не сравнимы в смысле отношения частичного порядка на $\mathcal{L}$.

Теорема 2. Пусть Q — r -замкнутое множество булевых функций, содержащее селекторную функцию, а — элемент множества $\mathcal{L}_Q$, не являющийся наименьшим. Тогда в $\mathcal{L}_Q$ существует континуальная антицепь, включающая элемент a .

Доказательство. Поскольку элемент a не является наименьшим, найдется такой элемент b_1 , что $a \not\leq b_1$. Согласно следствию из предложения 1 элемент a не может быть наибольшим в $\mathcal{L}_Q$. Значит, существует такой элемент b_2 , что $b_2 \not\leq a$. Пусть α, β^1, β^2 — последовательности, входящие соответственно в Q -степени a, b_1, b_2 .

Мы определим континуальное семейство $\{\gamma_\xi\}$ двоичных последовательностей таким образом, что множество Q -степеней

$$\bigcup_{\xi} [\gamma_\xi]_Q \cup \{a\}$$

будет являться антицепью в $\mathcal{L}_Q$. Последовательности γ_ξ определяются ниже с помощью пошаговой процедуры. На каждом шаге t этой процедуры образуется множество D_t конечных двоичных последовательностей, которое состоит из 2^t последовательностей, причем ни одна из них не является началом другой. Вместе с тем каждая последовательность из D_t служит началом ровно двух последовательностей из D_{t+1} . В пределе множества D_t определяют искомое континуальное семейство $\{\gamma_\xi\}$.

Будем предполагать, что множество Q перенумеровано и f_m — функция из Q с номером m . Зафиксируем, кроме того, некоторую нумерацию множества N^3 .

Шаг 0. Образует множество D_0 из последовательностей 0 и 1.

Шаг $t+1$. Пусть t есть номер тройки (k, l, m) , функция f_m из Q зависит от n переменных и уже определено множество $D_t = \{d_1, \dots, d_{2^t}\}$ конечных последовательностей, каждая из которых не является началом другой. Поскольку $a \notin_Q b_1$, функция f_m не может сводить последовательность α ни к одной из последовательностей $d_1\beta^1, \dots, d_{2^t}\beta^1$. Значит, для любого j , $1 \leq j \leq 2^t$, найдется такое число i_j , что

$$\alpha_{k+i_j} \neq f_m(\delta_{l+i_j}, \dots, \delta_{l+i_j+n-1}),$$

где $\delta_{l+i_j} \dots \delta_{l+i_j+n-1}$ — начало последовательности $(d_j\beta^1)_{l+i_j}$. Если величина $l+i_j+n-1$ больше длины последовательности d_j , то определяем d_j^1 равной началу последовательности $d_j\beta^1$ длины $l+i_j+n$. В противном случае полагаем $d_j^1 = d_j$.

Выполняя переход от последовательностей $d_1, \dots, d_{2^t}$ к последовательностям $d_1^1, \dots, d_{2^t}^1$, мы обеспечиваем стандартную несводимость с помощью функции f_m последовательности $(\alpha)_{k+i_j}$ к любой последовательности $(\delta)_{l+i_j}$, где началом δ служит последовательность d_j^1 .

Этот технический прием с небольшими изменениями мы применяем на шаге $t+1$ еще 2^t раз. Именно, рассматриваем последовательность $d_1^1\beta^2$. Она Q -эквивалентна последовательности β^2 и потому в силу выбора β^2 последовательность $d_1^1\beta^2$ не может сводиться функцией f_m ни к одной из последовательностей $\alpha, d_2^1\alpha, \dots, d_{2^t}^1\alpha$ (которые все Q -эквивалентны последовательности α). Обозначив через $\delta^2, \dots, \delta^{2^t}$ последовательности $d_2^1\alpha, \dots, d_{2^t}^1\alpha$, заключаем, что можно выбрать такое число p , что каждая из последовательностей

$$\begin{aligned} & f_m(\alpha_l, \dots, \alpha_{l+n-1}) f_m(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_{l+n}) \dots f_m(\alpha_{l+p}, \dots, \alpha_{l+p+n-1}), \\ & f_m(\delta_l^2, \dots, \delta_{l+n-1}^2) f_m(\delta_{l+1}^2, \dots, \delta_{l+n}^2) \dots f_m(\delta_{l+p}^2, \dots, \delta_{l+p+n-1}^2), \\ & \dots \\ & f_m(\delta_l^{2^t}, \dots, \delta_{l+n-1}^{2^t}) f_m(\delta_{l+1}^{2^t}, \dots, \delta_{l+n}^{2^t}) \dots f_m(\delta_{l+p}^{2^t}, \dots, \delta_{l+p+n-1}^{2^t}) \end{aligned}$$

будет отличаться от начала последовательности $(d_1^1\beta^2)_k$ длины $p+1$. Считая p достаточно большим, полагаем d_1^2 равным началу последовательности $d_1^1\beta^2$ длины $k+p$, а $d_2^2, \dots, d_{2^t}^2$ — началам соответственно последовательностей $d_2^1\alpha, \dots, d_{2^t}^1\alpha$ длины $l+p+n$.

Выполняя эту часть шага $t+1$, мы обеспечиваем стандартную несводимость с помощью функции f_m любой последовательности $(\delta^1)_k$, для которой d_1^1 служит началом последовательности δ^1 , к последовательности $(\alpha)_l$, а также к любым последовательностям $(\delta^2)_l, \dots, (\delta^{2^t})_l$, для которых $d_2^2, \dots, d_{2^t}^2$ служат началами последовательностей $\delta^2, \dots, \delta^{2^t}$.

Далее рассматриваем последовательность d_2^2 и поступаем так же, как при рассмотрении последовательности d_1^1 , используя уже построенные последовательности $d_1^2, d_3^2, \dots, d_{2^i}^2$. В результате образуем последовательности $d_1^3, d_2^3, \dots, d_{2^i}^3$ и так далее. После того, как будут получены последовательности $d_1^{2^i+1}, \dots, d_{2^i}^{2^i+1}$, завершаем шаг $t + 1$, полагая

$$D_{t+1} = \{d_1^{2^i+1}0, d_1^{2^i+1}1, \dots, d_{2^i}^{2^i+1}0, d_{2^i}^{2^i+1}1\}.$$

Из построения следует, что семейство последовательностей $\{\gamma_\xi\}$, образованное из множеств D_t переходом к пределу, будет задавать в $\mathcal{L}_Q$ континуальную антицепь, удовлетворяющую условиям теоремы.

5. Примеры

- (1a) $Q_1 = \{e_1^1(x)\}$. Очевидно, что если последовательность α сводится к последовательности β функцией e_1^1 , то α имеет вид $\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}(\beta)_k$. Значит, последовательность α Q_1 -эквивалентна последовательности β . Таким образом, каждая последовательность β порождает в $\mathcal{L}_{Q_1}$ минимальный элемент, а множество $\mathcal{L}_{Q_1}$ представляет собой континуальную антицепь.
- (1b) $Q_2 = \{0, e_1^1(x)\}$. В соответствии с предложением 6, множество $\mathcal{L}_{Q_2}$ имеет наименьший элемент $[0]_{Q_2}$. Оставшаяся часть $\mathcal{L}_{Q_2}$, так же, как и в примере 1a, представляет собой континуальную антицепь.
- (1c) $Q_3 = \{0, 1, e_1^1(x)\}$. Здесь предложение 6 дает в множестве $\mathcal{L}_{Q_3}$ наименьший элемент, порожденный последовательностями 0 и 1 . Как и в примере 1b, над наименьшим элементом в $\mathcal{L}_{Q_3}$ располагается континуальная антицепь.
- (1d) $Q_4 = \{e_1^1(x), \bar{e}_1^1(x)\}$. Нетрудно видеть, что в этом случае для любой последовательности α Q_4 -степень $[\alpha]_{Q_4}$ получается объединением Q_1 -степеней $[\alpha]_{Q_1}$ и $[\bar{\alpha}]_{Q_1}$, где $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 \dots$. В остальном этот пример близок к примеру 1a: частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_{Q_4}$ является континуальной антицепью.
- (1e) $Q_5 = \{0, 1, e_1^1(x), \bar{e}_1^1(x)\}$. Здесь получаем аналог примера 1c: множество $\mathcal{L}_{Q_5}$ имеет наименьший элемент, над которым расположена континуальная антицепь.
- (2a) $Q_6 = \{x_1 \vee \dots \vee x_n; n = 1, 2, \dots\}$

Предложение 5 гарантирует существование в множестве $\mathcal{L}_{Q_6}$ двух минимальных элементов, определяемых последовательностями 0 и 1 . Покажем, что других минимальных элементов в $\mathcal{L}_{Q_6}$ нет.

Предположим, напротив, что α — последовательность с бесконечным числом нулей и единиц и Q_6 -степень $[\alpha]_{Q_6}$ минимальна в $\mathcal{L}_{Q_6}$, и пусть последовательность β сводится к последовательности α функцией $x_1 \vee \dots \vee x_c$. В силу минимальности Q_6 -степени $[\alpha]_{Q_6}$ последовательность α будет сводиться к последовательности β некоторой функцией $x_1 \vee \dots \vee x_d$. Пользуясь транзитивностью сводимости и свойствами дизъюнкции, заключаем, что последовательность α сводится к самой себе функцией $x_1 \vee \dots \vee x_{c+d-1}$. Случай $c + d - 1 = 1$ тривиален: последовательность β сводится к последовательности α селекторной функцией. Покажем, что случай $c + d - 1 \geq 2$ невозможен.

В целях упрощения обозначений положим $n = c + d - 1$, и пусть $n \geq 2$. Считаем, что функция $x_1 \vee \dots \vee x_n$ стандартно сводит последовательность $(\alpha)_k$ к последовательности $(\alpha)_l$.

Пусть $k > l$. Возьмем такое i , что $\alpha_{l+i} = 1$. Пользуясь стандартной сводимостью последовательности $(\alpha)_k$ к последовательности $(\alpha)_l$, заключаем, что должно быть, по крайней мере, $\alpha_{k+i} = 1$. Поскольку $k > l$, воспользуемся еще раз стандартной сводимостью последовательности $(\alpha)_k$ к $(\alpha)_l$ и получим, что $\alpha_{k+(k-l)+i} = 1$. Повторяя это рассуждение, приходим к выводу, что для любого $j \geq 0$ имеет место равенство $\alpha_{k+j(k-l)+i} = 1$. Однако в этом случае последовательность $\mathbf{1}$ сводится к последовательности α функцией $x_1 \vee \dots \vee x_{k-l}$, что противоречит минимальности Q_6 -степени $[\alpha]_{Q_6}$ и неравенству $[1]_{Q_6} \neq [\alpha]_{Q_6}$.

Пусть $k \leq l$. Рассмотрим некоторую конечную подпоследовательность из нулей, входящую в последовательность α после разряда α_{k-1} . Иными словами, пусть i и p таковы, что

$$\alpha_{k+i} = \alpha_{k+i+1} = \dots = \alpha_{k+i+p} = 0.$$

Пользуясь стандартной сводимостью последовательности $(\alpha)_k$ к последовательности $(\alpha)_l$ функцией $x_1 \vee \dots \vee x_n$, заключаем, что справедливы равенства

$$\alpha_{l+i} = \alpha_{l+i+1} = \dots = \alpha_{l+i+p+n-1} = 0.$$

Так как $k \leq l$, из этих равенств и стандартной сводимости $(\alpha)_k$ к $(\alpha)_l$ функцией $x_1 \vee \dots \vee x_n$ вытекает, что

$$\alpha_{l+(l-k)+i} = \alpha_{k+(l-k)+i+1} = \dots = \alpha_{l+(l-k)+i+p+2(n-1)} = 0.$$

Аналогичным образом устанавливаем, что вообще для любого $j \geq 0$ имеют место равенства

$$\alpha_{l+j(l-k)+i} = \alpha_{k+j(l-k)+i+1} = \dots = \alpha_{l+j(l-k)+i+p+(j+1)(n-1)} = 0.$$

Однако для всех достаточно больших j справедливы неравенства

$$l + j(l - k) + i \leq l + (j + 1)(l - k) + i \leq l + j(l - k) + i + p + (j + 1)(n - 1).$$

Это означает, что последовательность α содержит лишь конечное число единиц, что невозможно по предположению. Таким образом, $\mathcal{L}_{Q_6}$ не содержит минимальных элементов, отличных от $[0]_{Q_6}$ и $[1]_{Q_6}$.

Нетрудно видеть, что Q_6 -степень $[0]_{Q_6}$ является не только минимальной, но и максимальной в $\mathcal{L}_{Q_6}$. В самом деле, если последовательность $\mathbf{0}$ сводится к последовательности α функцией $x_1 \vee \dots \vee x_n$, то последовательность α necessarily содержит лишь конечное число единиц. Значит, последовательность α Q_6 -эквивалентна последовательности $\mathbf{0}$.

Множество $\mathcal{L}_{Q_6}$ имеет еще континуальное число максимальных элементов. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим бесконечную последовательность $i_0, i_1, \dots$ чисел из N такую, что для любого $j \geq 0$ выполняется неравенство $i_{j+1} - i_j \geq 2$. Определим последовательность β условиями

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \{i_0, i_1, \dots\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что Q_6 -степень $[\beta]_{Q_6}$ максимальна в $\mathcal{L}_{Q_6}$.

Предположим, что последовательность β сводится к последовательности γ функций $x_1 \vee \dots \vee x_n$. Если $n = 1$, то, очевидно, последовательность γ Q_6 -эквивалентна последовательности β . Пусть $n \geq 2$. Возьмем такое достаточно большое число j , чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned}\beta_{ij-1} &= \gamma_p \vee \dots \vee \gamma_{p+n-1}, \\ \beta_{ij} &= \gamma_{p+1} \vee \dots \vee \gamma_{p+n} = 1, \\ \beta_{ij+1} &= \gamma_{p+2} \vee \dots \vee \gamma_{p+n+1}.\end{aligned}$$

Так как $\beta_{ij} = 1$, одно из чисел $\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+n}$ равно 1. Тогда ввиду неравенства $n \geq 2$ будет равна 1 хотя бы одна из дизъюнкций $\gamma_p \vee \dots \vee \gamma_{p+n-1}$, $\gamma_{p+2} \vee \dots \vee \gamma_{p+n+1}$. Однако согласно выбору последовательности $\{i_0, i_1, \dots\}$ должно быть $\beta_{ij-1} = \beta_{ij+1} = 0$. Противоречие показывает, что последовательность β не может сводиться ни к какой последовательности γ функцией $x_1 \vee \dots \vee x_n$, где $n \geq 2$. Значит, элемент $[\beta]_{Q_6}$ максимален в множестве $\mathcal{L}_{Q_6}$.

Так как существует континуальное множество последовательностей $\{i_0, i_1, \dots\}$ с указанными выше свойствами, приходим к выводу, что в $\mathcal{L}_{Q_6}$ существует континуальное число максимальных элементов.

Q_6 -степень $[1]_{Q_6}$, очевидно, не является максимальной в $\mathcal{L}_{Q_6}$. Покажем, что в $\mathcal{L}_{Q_6}$ имеется еще континуальное число немасимальных элементов. Пусть $i_0, i_1, \dots$ — последовательность натуральных чисел, больших 1. Определим двоичную последовательность β следующим образом. Пусть $\beta_0 = 1$. Далее полагаем равными 0 следующие i_0 разрядов последовательности β . Затем в последовательности β помещаем два блока вида 110^{i_1} (0^i обозначает последовательность, состоящую из i нулей). Вообще, после последнего блока вида $1^k 0^{i_k-1}$ в последовательности β располагаем $k+1$ блоков вида $1^{k+1} 0^{i_k}$.

Пусть последовательность γ^1 получается из последовательности β заменой первой единицы каждого блока, состоящего целиком из единиц, нулем. Легко видеть, что последовательность β сводится к последовательности γ^1 функцией $x_1 \vee x_2$. Вместе с тем последовательность γ^1 не может Q_6 -сводиться к последовательности β , поскольку при достаточно больших k идущие подряд k блоков 1^{k-1} последовательности γ^1 не могут получаться из единичных блоков последовательности β добавлением фиксированного числа единиц.

Нетрудно понять, что элемент $[\gamma^1]_{Q_6}$ также не является максимальным в $\mathcal{L}_{Q_6}$. Из последовательности γ^1 заменой первой единицы каждого блока, состоящего из единиц, нулем получаем последовательность γ^2 такую, что γ^1 сводится к γ^2 функцией $x_1 \vee x_2$, но γ^2 не входит в Q_6 -степень $[\gamma^1]_{Q_6}$. Этот процесс позволяет определить над элементом $[\beta]_{Q_6}$ бесконечную возрастающую цепь.

(2b), (2c), (2d) В этих примерах

$$\begin{aligned}Q_7 &= \{0, x_1 \vee \dots \vee x_n; n = 1, 2, \dots\}, \\ Q_8 &= \{1, x_1 \vee \dots \vee x_n; n = 1, 2, \dots\}, \\ Q_9 &= \{0, 1, x_1 \vee \dots \vee x_n; n = 1, 2, \dots\}.\end{aligned}$$

Отличия множеств $\mathcal{L}_{Q_7}$, $\mathcal{L}_{Q_8}$, $\mathcal{L}_{Q_9}$ от множества $\mathcal{L}_{Q_6}$ состоят в следующем. В множестве $\mathcal{L}_{Q_7}$ элемент $[0]_{Q_7}$ является наименьшим, а элемент $[1]_{Q_7}$ — атомом. Остальные структурные особенности множества $\mathcal{L}_{Q_6}$ сохраняются. В множестве $\mathcal{L}_{Q_8}$ элемент $[1]_{Q_8}$ является наименьшим, а элемент $[0]_{Q_8}$ — атомом и одновременно наибольшим элементом. В множестве $\mathcal{L}_{Q_9}$ наименьший элемент содержит обе последовательности 0 и 1.

(3) $\mathcal{Q}_{10}$ — множество всех булевых функций.

Согласно предложению 6 множество $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}_{10}}$ имеет наименьший элемент, содержащий последовательности 0 и 1. Докажем, что над каждым элементом множества $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}_{10}}$, содержащим периодическую последовательность, существует счетная возрастающая цепь. Пусть α — периодическая последовательность периода $p \geq 2$. Без ограничения общности можно считать, что α — чисто периодическая последовательность. Рассмотрим периодическую последовательность β^1 периода $2p$, составленную из блоков 10^{2p-1} . Тогда $\alpha \leq_{\mathcal{Q}_{10}} \beta^1$. В самом деле, последовательность α стандартно сводится к последовательности β^1 любой функцией $f(x_1, \dots, x_{2p})$, для которой выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f(1, 0, \dots, 0) &= \alpha_0, & f(0, \dots, 0, 1) &= \alpha_1, \\ f(0, \dots, 0, 1, 0) &= \alpha_2, \dots, & f(0, 1, 0, \dots, 0) &= \alpha_{2p-1}. \end{aligned}$$

Вместе с тем последовательность β^1 не может $\mathcal{Q}_{10}$ -сводиться к последовательности α , поскольку в этом случае в силу предложения 2 последовательность β^1 имела бы период p .

Далее, аналогичным образом определяем периодические последовательности $\beta^2, \beta^3, \dots$, имеющие соответственно периоды $10^4 p^{-1}, 10^8 p^{-1}, \dots$. Понятно, что

$$\beta^1 \leq_{\mathcal{Q}_{10}} \beta^2 \leq_{\mathcal{Q}_{10}} \beta^3 \leq_{\mathcal{Q}_{10}} \dots$$

однако в силу предложения 2 соотношения

$$\beta^2 \leq_{\mathcal{Q}_{10}} \beta^1, \quad \beta^3 \leq_{\mathcal{Q}_{10}} \beta^2, \dots$$

невозможны.

Заметим, что в приведенном выше построении вместо последовательности β^1 с равным успехом можно взять любую последовательность с периодом $10^d p^{-1}$, где $d \geq 3$. Поэтому на самом деле над элементом $[\alpha]_{\mathcal{Q}_{10}}$ в множестве $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}_{10}}$ располагается континуальное число счетных возрастающих цепей.

Описанное выше свойство элементов множества $\mathcal{L}_{\mathcal{Q}_{10}}$, содержащих периодические последовательности, присуще не только этим элементам. Имеется еще континуальное множество элементов, которые обладают этим свойством. Пусть $i_0, i_1, \dots$ — последовательность чисел из N такая, что

$$2 < i_1 - i_0 < i_2 - i_1 < i_3 - i_2 < \dots$$

Определим двоичную последовательность α условиями:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \{i_0, i_1, \dots\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Возьмем произвольную двоичную последовательность γ и определим двоичную последовательность β , полагая $\beta_{i_j+1} = \gamma_j$, $\beta_l = \alpha_l$ для остальных значений l . Очевидно, что последовательность α сводится к последовательности β функцией $\bar{x}_1 x_2$. Поскольку существует континуальное число последовательностей β , найдется такая последовательность β^1 , которая не $\mathcal{Q}_{10}$ -эквивалентна последовательности α . С последовательностью β^1 поступаем так же, как с последовательностью α : для любой двоичной последовательности γ полагает $\beta_{i_j+2} = \gamma_j$, $\beta_l = \beta_l^1$ для остальных значений l . В качестве булевой функции, сводящей последовательность β^1 к любой такой последовательности β , можно взять функцию $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$ и так далее.

Список литературы

1. Роджерс Х., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*. Мир, Москва, 1972.
2. Рейна Г., Степени автоматных преобразований. *Киберн. сб.* (1977), **14**, 95–106.
3. Gordon H. G., Complete degrees of finite-state transformability. *Information and Control* (1976) **32**, 169–187.
4. Байрашева В. Р., Структурные свойства автоматных преобразований. *Известия вузов. Математика* (1988) **7**, 34–39.
5. Марченков С. С., Конечные начальные сегменты верхней полурешетки конечно-автоматных степеней. *Дискретная математика* (1989) **1**, №3, 96–103.
6. Соловьев В. Д., Структура распределения информации в бесконечной последовательности. *Дискретная математика* (1996) **8**, №2, 97–107.

Статья поступила 31.10.2002.