Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Об асимптотических разложениях для
распределения числа циклов в случайной подстановке,
Дискрет. матем., 2003, том 15, выпуск 3, 117–127

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:38:04

Об асимптотических разложениях для распределения числа циклов в случайной подстановке

© 2003 г. А. Н. Тимашёв

Получены явные формулы, определяющие коэффициенты асимптотических разложений в области больших уклонений для распределения числа циклов v_n в случайной равновероятной подстановке степени n , то есть вероятности $\mathbf{P}\{v_n = N\}$ при условии, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$1 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n}{N} \leq \alpha_1 < \infty,$$

где α_0, α_1 — постоянные. Эти формулы выражают указанные коэффициенты через кумулянты случайной величины, имеющей распределение логарифмического ряда со специальным образом выбранным параметром. Для кумулянтов третьего и четвертого порядков приведены соответствующие значения. Обсуждается вопрос о точности полученных аппроксимаций. В случае, когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \gamma_0 \leq \gamma = \frac{N}{\ln n} \leq \gamma_1 < \infty,$$

где γ_0, γ_1 — постоянные, выведены асимптотические оценки вероятностей $\mathbf{P}\{v_n = N\}$, $\mathbf{P}\{v_n \leq N\}$, $\mathbf{P}\{v_n \geq N\}$ с остаточным членом порядка $O((\ln n)^{-2})$, справедливые равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$. Соответствующая оценка вероятности $\mathbf{P}\{v_n = N\}$ улучшает ранее известные результаты для случая, когда

$$N = \beta \ln n + o(\ln n),$$

где β — положительная постоянная.

Рассмотрим случайную величину v_n , равную числу циклов в подстановке, выбранной случайно равновероятно из симметрической группы степени n . Известно [1], что распределение этой случайной величины определяется из соотношений

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{|s(n, N)|}{n!}, \quad N = 1, \dots, n. \quad (1)$$

В равенствах (1) $s(n, N)$ — числа Стирлинга первого рода. Асимптотические оценки для вероятности $\mathbf{P}\{v_n = N\}$ на уровне главного члена известны при всех возможных соотношениях между параметрами $n \rightarrow \infty$ и $N = N(n)$ [2].

Если, в частности, $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$1 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n}{N} \leq \alpha_1 < \infty, \quad (2)$$

где α_0, α_1 — постоянные, то соответствующая формула для главного члена впервые получена в [3] и имеет следующий вид: равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$|s(n, N)| = \frac{n!}{N!} \frac{(-\ln(1-x_0))^N}{x_0^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma_0^2}} (1 + O(1/N)), \quad (3)$$

где $x = x_0$ — единственный принадлежащий интервалу $(0, 1)$ корень уравнения

$$\frac{x}{(x-1)\ln(1-x)} = \alpha, \quad (4)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\alpha(\alpha x_0 - \alpha + 1)}{1 - x_0} > 0. \quad (5)$$

В работе автора [4] для чисел $|s(n, N)|$ при условиях (2) и $n, N \rightarrow \infty$ получено асимптотическое разложение вида (3), справедливое равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$, в котором остаточный член $O(1/N)$ заменен на асимптотический степенной ряд $\sum_{m=1}^{\infty} A_m N^{-m}$. Для коэффициентов A_m в [4] приведены имеющие достаточно сложный вид нелинейные рекуррентные соотношения с известными начальными условиями. Таким образом, при $n, N \rightarrow \infty$ и при выполнении условий (2) из (1) и (3) получаем, что равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} \sim \frac{(-\ln(1-x_0))^N}{N! x_0^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma_0^2}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m N^{-m}\right). \quad (6)$$

Поскольку при $n \rightarrow \infty$ (см. [5])

$$\mathbf{E}v_n = \ln n(1 + o(1)),$$

из соотношений (1) и (2) следует, что разложение (6) определяет асимптотику вероятностей $\mathbf{P}\{v_n = N\}$ в области больших отклонений случайной величины v_n . Тем не менее, локальная нормальная теорема для v_n [6], а также другие известные оценки вероятностей $\mathbf{P}\{v_n = N\}$ (см. [2]) при их практическом применении дают во многих случаях худший результат по сравнению с оценкой (6) (что будет показано ниже на примерах).

В работе получены явные формулы для коэффициентов A_m , $m = 1, 2, \dots$. Эти формулы выражают коэффициенты A_m через кумулянты случайной величины ξ_1 , имеющей распределение логарифмического ряда с параметром x [6], то есть такой, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = -\frac{x^k}{k \ln(1-x)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad x \in (0, 1). \quad (7)$$

Вывод получаемых ниже соотношений основан на применении известных равенств [6]

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{(-\ln(1-x))^N}{N! x^n} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad N = 1, \dots, n. \quad (8)$$

В равенствах (8) случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ независимы и одинаково распределены.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнены условия (2). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо асимптотическое разложение (6), в котором величины x_0 и σ_0^2 определяются равенствами (4), (5), а коэффициенты A_m находятся из соотношений

$$A_m = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots+2mk_{2m}=2m} \frac{(-1)^l (2l)!}{l! 2^l} \prod_{s=1}^{2m} \frac{1}{(k_s)!} \left(\frac{x_{s+2}}{(s+2)! \sigma_0^{s+2}} \right)^{k_s}, \quad (9)$$

где $m = 1, 2, \dots$ и суммирование в (9) проводится по всевозможным упорядоченным наборам неотрицательных целых чисел $k_1, \dots, k_{2m}$, удовлетворяющих условию $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + 2mk_{2m} = 2m$. При этом $l = m + k_1 + \dots + k_{2m}$ и x_s — кумулянт порядка s случайной величины ξ_1 , имеющей распределение вида (7) при $x = x_0$, $s = 3, 4, \dots$

Доказательство. Используем равенства (7) и (8), полагая $x = x_0$. Как нетрудно подсчитать, согласно (2) и (4)

$$\mathbf{E}\xi_1 = \frac{x_0}{(x_0 - 1) \ln(1 - x_0)} = \frac{n}{N} = \alpha,$$

поэтому

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \mathbf{D}\xi_1}} (1 + O(1/N)), \quad (10)$$

где $\mathbf{D}\xi_1 = \sigma_0^2 > 0$.

Чтобы уточнить формулу (10), оценим коэффициенты ряда Крамера–Эссеена, дающего асимптотическое разложение остаточного члена вида $O(1/N)$ в этой формуле. Так как $\mathbf{E}(\xi_1 + \dots + \xi_N) = n$ при $x = x_0$, указанные коэффициенты A_m могут быть отличны от нуля только при целых отрицательных степенях вида N^{-m} , $m = 1, 2, \dots$. Известно [7], что эти коэффициенты выражаются через кумулянты x_s порядка s , $s = 3, 4, \dots$, случайной величины ξ_1 . Точнее, при $m = 1, 2, \dots$ согласно [7] можно утверждать, что справедливости формулы (9). Таким образом, при условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ (см. аналогичное утверждение в статье автора [16])

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi N \sigma_0^2}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m N^{-m} \right). \quad (11)$$

Подставляя разложение (11) в (8), при $x = x_0$ получаем (6). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{(-\ln(1 - x_0))^N}{N! x_0^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi N \sigma_0^2}} (1 + A_1 N^{-1} + O(N^{-2})), \quad (12)$$

$$A_1 = \frac{x_4}{8\sigma_0^4} - \frac{5x_3^2}{24\sigma_0^6}, \quad (13)$$

$$x_3 = \frac{\alpha(1 + x_0)}{(1 - x_0)^2} - 3\alpha\sigma_0^2 - \alpha^3, \quad (14)$$

$$x_4 = \frac{\alpha(1 - 4\alpha + 4x_0 + (1 + 4\alpha)x_0^2)}{(1 - x_0)^3} + 6\alpha^2\sigma_0^2 + 3\alpha^4 - 3\sigma_0^4. \quad (15)$$

Доказательство. Заметим, что разложение (6) следует понимать в том смысле, что при условиях теоремы 1 для любого фиксированного значения $M = 1, 2, \dots$ равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{(-\ln(1 - x_0))^N}{N! x_0^N} \frac{1}{\sqrt{2\pi N \sigma_0^2}} \left(1 + \sum_{m=1}^M A_m N^{-m} + O(N^{-(M+1)}) \right). \quad (16)$$

В частности, при $M = 1$ из (16) следует (12). Равенство (13) для коэффициента A_1 следует из (9) при $m = 1$. Полагая в (7) $x = x_0$, нетрудно проверить, что

$$\mathbf{E}\xi_1^3 = \frac{\alpha(1 + x_0)}{(1 - x_0)^2}, \quad (17)$$

$$\mathbf{E}\xi_1^4 = \frac{\alpha(1 + 4x_0 + x_0^2)}{(1 - x_0)^3} \quad (18)$$

Кроме того,

$$\kappa_3 = \mathbf{E}(\xi_1 - \alpha)^3 = \mathbf{E}\xi_1^3 - 3\alpha\sigma_0^2 - \alpha^3, \quad (19)$$

$$\kappa_4 = \mathbf{E}(\xi_1 - \alpha)^4 - 3\sigma_0^4. \quad (20)$$

Из (17)–(20) получаем соотношения (14), (15). Следствие 1 доказано.

Замечание 1. Оценка (12) обладает высокой точностью приближения даже при сравнительно небольших значениях n и N . Так, например, если $n = 12$ и $N = 8$, то $\alpha = 3/2$, $x_0 \approx 0,5335893$ с точностью до 10^{-7} и главный член в (12) равен 0,0007650 (с той же точностью). Первое приближение, полученное из (12) путем отбрасывания остаточного члена порядка $O(N^{-2})$, дает значение 0,0007457, в то время как

$$\mathbf{P}\{v_{12} = 8\} \approx 0,0007462.$$

Если $n = 20$ и $N = 3$, то $\alpha = 20/3$, $x_0 \approx 0,94989$ с точностью 10^{-5} , в этом случае оценки, полученные из (12), дают значения 0,30589 и 0,28682, в то время как

$$\mathbf{P}\{v_{20} = 3\} \approx 0,27482$$

(с той же точностью).

Приближения, полученные по локальной нормальной теореме и формуле Жордана [8], дают менее точные значения, равные соответственно 0,23049 и 0,31915.

Замечание 2. Формулы для коэффициентов A_m , аналогичные (13)–(15), можно выписать и при $m \geq 2$. Так, например, при $m = 2$ из (9) получаем, что

$$A_2 = -\frac{\kappa_6}{48\sigma_0^6} + \frac{56\kappa_3\kappa_5 + 35\kappa_4^2}{384\sigma_0^8} - \frac{35\kappa_3^2\kappa_4}{64\sigma_0^{10}} + \frac{385\kappa_3^4}{1152\sigma_0^{12}}.$$

Замечание 3. При условиях (2) и $n, N \rightarrow \infty$ асимптотические разложения для чисел Стирлинга второго рода, аналогичные (6), получены автором в [4]. Формулы для коэффициентов этих разложений, соответствующие (9), приведены в [9].

Рассмотрим теперь другую область изменения параметров n, N , когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \gamma_0 \leq \gamma = \frac{N}{\ln n} \leq \gamma_1 < \infty, \quad (21)$$

где γ_0, γ_1 — постоянные.

Известно [2], что если при $n \rightarrow \infty$, $N = \beta \ln n + o(\ln n)$, где β — положительная постоянная, то

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{(\ln n)^N}{N! n \Gamma(\beta)} (1 + o(1)). \quad (22)$$

Обобщая (22) на случай, когда выполнены условия (21), докажем следующее общее утверждение.

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что справедливы условия (21). Тогда равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{(\ln n)^N}{N! n \Gamma(\gamma)} \left(1 + \frac{\gamma(\psi'(\gamma) - (\psi(\gamma))^2)}{2 \ln n} + O(1/(\ln n)^2) \right), \quad (23)$$

где

$$\psi(\gamma) = \frac{\Gamma'(\gamma)}{\Gamma(\gamma)} = (\ln \Gamma(\gamma))'.$$

Доказательство. Для обоснования равенства (23) используем метод перевала, исходя из интегрального представления [8]

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{1}{2\pi i n!} \oint \frac{(z+1) \dots (z+n-1)}{z^N} dz. \quad (24)$$

Интегрирование в (24) осуществляется по окружности $|z| = z_0 > 0$, где значение z_0 будет выбрано позднее. Формулу (24) можно представить в виде

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{1}{2\pi i n!} \oint z^{-1} \exp(N\omega(z)) dz, \quad (25)$$

где

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(z+k) - \ln z \quad (26)$$

и для логарифма выбирается та непрерывная ветвь, которая принимает вещественные значения на вещественной положительной полуоси.

Далее,

$$\omega'(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z+k} - \frac{1}{z} = 0,$$

если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z}{z+k} = N. \quad (27)$$

При фиксированном n функция $f(z)$ непрерывна и строго возрастает от 1 до n при возрастании z от 0 до ∞ , поэтому из (21) следует, что уравнение (27) для заданных достаточно больших значений n и N имеет единственный положительный корень $z_0 = z_0(n, N)$. Из (26) и (27) получаем, что

$$\omega''(z_0) = -\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(z_0 + k)^2} + \frac{1}{z_0^2} > 0$$

при $n \geq 2$, и поэтому z_0 — точка перегиба первого порядка функции $\omega(z)$. Но тогда согласно [10] из (25) следует, что при условиях (21) и $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{z_0^{-1} \exp(N\omega(z_0))}{n! \sqrt{2\pi N \omega''(z_0)}} \left(1 + \frac{B}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right), \quad (28)$$

где (см. [11])

$$B = -\frac{1}{4\omega''(z_0)} \left(\frac{4}{z_0^2} + \frac{2\omega'''(z_0)}{z_0\omega''(z_0)} + \frac{5(\omega'''(z_0))^2}{6(\omega''(z_0))^2} - \frac{\omega^{(4)}(z_0)}{2\omega''(z_0)} \right). \quad (29)$$

Известно [12], что при $z > 0$

$$\psi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z+k} \right), \quad (30)$$

$$\psi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}. \quad (31)$$

Используя (21), из (27) получаем, что при $z = z_0$

$$z \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z+k} = \gamma \ln n. \quad (32)$$

Из равенств (30)–(32) нетрудно получить, что при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ (промежуточные выкладки мы опускаем)

$$z_0 = \gamma + \frac{\gamma \psi(\gamma)}{\ln n} + \frac{\gamma \psi(\gamma)(\psi(\gamma) + \gamma \psi'(\gamma))}{(\ln n)^2} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^3}\right). \quad (33)$$

Подставляя оценку (33) в формулу для $\omega''(z_0)$, приведенную выше, и осуществляя элементарные преобразования, выводим, что

$$\omega''(z_0) = z_0^{-2} \left(1 - \frac{\gamma \psi'(\gamma)}{\ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right) \right).$$

Следовательно,

$$\frac{z_0^{-1}}{\sqrt{\omega''(z_0)}} = 1 + \frac{\gamma \psi'(\gamma)}{2 \ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right). \quad (34)$$

Из соотношения

$$\exp(N\omega(z_0)) = \frac{\Gamma(z_0 + n)}{\Gamma(z_0)z_0^N}$$

и формулы Стирлинга для гамма-функции получаем, что

$$\frac{\exp(N\omega(z_0))}{n!} = \frac{n^{z_0-1-\gamma \ln z_0}}{\Gamma(z_0)}(1 + O(1/n)).$$

Согласно (33)

$$\Gamma(z_0) = \Gamma(\gamma) \left(1 + \frac{\gamma(\psi(\gamma))^2}{\ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right) \right),$$

поэтому

$$\frac{\exp(N\omega(z_0))}{n!} = \frac{n^{z_0-1-\gamma \ln z_0}}{\Gamma(\gamma)} \left(1 - \frac{\gamma(\psi(\gamma))^2}{\ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right) \right),$$

и с учетом (34)

$$\frac{z_0^{-1} \exp(N\omega(z_0))}{n! \sqrt{\omega''(z_0)}} = \frac{n^{z_0-1-\gamma \ln z_0}}{\Gamma(\gamma)} \left(1 + \frac{\gamma(\psi'(\gamma) - 2(\psi(\gamma))^2)}{2 \ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right) \right). \quad (35)$$

Использование формулы Стирлинга для $N!$ и условий (21) приводит к равенству

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi N}} = \frac{(\ln n)^N}{N!} n^{\gamma(\ln \gamma - 1)} \left(1 + \frac{1}{12\gamma \ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right) \right). \quad (36)$$

Таким образом, согласно (35) и (36)

$$\begin{aligned} \frac{z_0^{-1} \exp(N\omega(z_0))}{n! \sqrt{2\pi N\omega''(z_0)}} &= \frac{(\ln n)^N n^{z_0-\gamma-\gamma \ln z_0+\gamma \ln \gamma}}{N! n \Gamma(\gamma)} \\ &\times \left(1 + \frac{\gamma(\psi'(\gamma) - 2(\psi(\gamma))^2) + (1/6)\gamma^{-1}}{2 \ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Из (29) и (33) с учетом легко проверяемых соотношений

$$\begin{aligned} \omega''(z_0) &= \gamma^{-2}(1 + O(1/(\ln n))), \\ \omega'''(z_0) &= -2\gamma^{-3}(1 + O(1/(\ln n))), \\ \omega^{(4)}(z_0) &= 6\gamma^{-4}(1 + O(1/(\ln n))) \end{aligned}$$

следует, что

$$B = -\frac{1}{12} + O(1/(\ln n)). \quad (38)$$

Далее, согласно (33)

$$n^{z_0-\gamma-\gamma \ln z_0+\gamma \ln \gamma} = 1 + \frac{\gamma(\psi(\gamma))^2}{2 \ln n} + O\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right). \quad (39)$$

Подставляя оценки (37)–(39) в (28), получаем (23). Поскольку эти оценки равномерны по $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$, то теорема 2 доказана.

Замечание 4. При $n \rightarrow \infty$ и $N = \beta \ln n + o(\ln n)$, где β — положительная постоянная, оценка скорости сходимости в (22) была получена в [13]. Для случая $\beta = 1$ соответствующая оценка приведена в [14], более точная оценка доказана в [15], а именно, если $n \rightarrow \infty$, $N = \ln n + x\sqrt{\ln n}$, где $x = x(n) = o(\sqrt{\ln n})$, то

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{(\ln n)^N}{N!n} \left(1 + O\left(\frac{|x|}{\sqrt{\ln n}} + \frac{1}{\ln n} \right) \right). \quad (40)$$

Формула (40) следует из (23), поскольку согласно (21) $\gamma = 1 + x/\sqrt{\ln n}$, и поэтому $\Gamma(\gamma) = 1 + O(x/\sqrt{\ln n})$.

Существенным усилением (40) является следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть $n \rightarrow \infty$, $N = \ln n + x\sqrt{\ln n}$, где $x = x(n) = o(\sqrt{\ln n})$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{(\ln n)^N}{N!n} & (1 + Cx/\sqrt{\ln n} + (\pi^2/12 - C^2/2 - (\pi^2/6 + C^2)x^2)(\ln n)^{-1} \\ & + ((\pi^2/12)(1 + 3C) - C^2(C + 1)/2 - \xi(3))x \\ & + (C\pi^2/2 + C^3 + 2\xi(3))x^3)(\ln n)^{-3/2} + O((1 + x^4)/(\ln n)^2)), \end{aligned} \quad (41)$$

где $C = 0,577215 \dots$ — постоянная Эйлера,

$$\xi(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1,2020569 \dots$$

Оценка (41) следует из (23), если использовать известные равенства

$$\psi(1) = -C, \quad \psi'(1) = \pi^2/6, \quad \psi''(1) = -2\xi(3), \quad \psi'''(1) = \pi^4/15$$

и учесть, что $\psi(\gamma) = \psi(1 + x/\sqrt{\ln n})$.

Замечание 5. Если, в частности, величина $x = x(n)$ ограничена, то равномерно относительно целых положительных значений $N = \ln n + x\sqrt{\ln n}$, для которых $|x| \leq c$, где c — постоянная (см. [2])

$$\mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}} e^{-x^2/2} (1 + o(1)). \quad (42)$$

Уточняя (42), можно получить следующее утверждение.

Следствие 3. При $n \rightarrow \infty$ и $N = \ln n + x\sqrt{\ln n}$ равномерно относительно целых положительных значений N , для которых $|x| \leq c$, где c — постоянная,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{v_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}} e^{-x^2/2} \\ \times \left(1 + \frac{(C - 1/2)x + x^3/6}{\sqrt{\ln n}} + A(x)(\ln n)^{-1} + B(x)(\ln n)^{-3/2} + O(1/(\ln n)^2) \right), \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi^2/12 - C^2/2 - 1/12 - (\pi^2/6 + C^2 + C/2 - 1/8)x^2 + ((C - 1)/6)x^4 - x^6/72, \\ B(x) &= (\pi^2/24 + \pi^2 C/4 - C^3/2 - C^2/4 - C/12 - \xi(3) + 1/8)x \\ &\quad + (7\pi^2/72 + \pi^2 C/2 + C^3 + (5/12)C^2 + C/8 + 2\xi(3) - 11/144)x^3 \\ &\quad - (\pi^2/36 + C^2/6 + C/6 - 9/80)x^5 - (C/72 - 1/48)x^7 + x^9/1296 \end{aligned}$$

и C и $\xi(3)$ определены в следствии 2.

Обоснование формулы (43) проводится с использованием стандартной техники асимптотических оценок, исходя из (41), применением формулы Стирлинга.

Замечание 6. Нетрудно убедиться в том, что оценка (43) остается справедливой, если предположить, что $x = x(n) = o((\ln n)^{1/6})$ и остаточный член вида $O(1/(\ln n)^2)$ заменить на $O((1 + x^{12})/(\ln n)^2)$.

Проиллюстрируем точность оценок (23), (41), (43) для одного из рассмотренных выше примеров. Если $n = 20$ и $N = 3$, то $\gamma = 3/\ln 20 \approx 1,00142$ с точностью до 10^{-5} и вычисления по формуле (23) с отбрасыванием остаточного члена порядка $O(1/(\ln n)^2)$ дают значение 0,27336 (с той же точностью) с относительной погрешностью порядка $-0,005$. При этом $x = (3 - \ln 20)/\sqrt{\ln 20} \approx 0,00247$, и вычисления по формулам (41), (43) дают значения 0,27328 и 0,27463 с относительными погрешностями, равными соответственно $-0,006$ и $-0,0007$.

Теорема 3. Пусть при условиях теоремы 2 $\gamma_1 < 1$. Тогда равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{v_n \leq N\} &= \frac{(\ln n)^N}{N! n \Gamma(\gamma)} (1 - \gamma)^{-1} \\ &\times \left(1 + \frac{\gamma(\psi'(\gamma) - (\psi(\gamma))^2 + 2\psi(\gamma)(1 - \gamma)^{-1} - 2(1 - \gamma)^{-2})}{2 \ln n} + O(1/(\ln n)^2) \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Доказательство. Согласно (24)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{v_n \leq N\} &= \sum_{m=1}^N \mathbf{P}\{v_n = m\} \\ &= \frac{1}{2\pi i n!} \oint \frac{(z+1) \dots (z+n-1)}{z^N (1-z)} dz - \frac{1}{2\pi i n!} \oint \frac{(z+1) \dots (z+n-1)}{1-z} dz, \end{aligned}$$

где интегрирование в обоих случаях осуществляется по окружности $|z| = z_0$, пробегаемой в положительном направлении. Так как $\gamma_1 < 1$, существует постоянная $z_1 \in (0, 1)$ такая, что $z_0 = z_0(n, N) \leq z_1$ при всех достаточно больших значениях n, N и $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$. Но тогда согласно интегральной теореме Коши второй интеграл в последнем равенстве для таких значений n, N равен нулю. Применяя к оценке первого интеграла метод перевала и рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что

$$\mathbf{P}\{v_n \leq N\} = (1 - z_0)^{-1} \frac{z_0^{-1} \exp(N\omega(z_0))}{n! \sqrt{2\pi N\omega''(z_0)}} (1 + B_1/N + O(N^{-2})), \quad (45)$$

где аналогично (29)

$$B_1 = -\frac{1}{4\varphi_1(z_0)\omega''(z_0)}(2\varphi_1''(z_0) - (2\omega'''(z_0)\varphi_1'(z_0))/(\omega''(z_0)) + \varphi_1(z_0)((5(\omega'''(z_0))^2)/(6(\omega''(z_0))^2) - (\omega^{(4)}(z_0))/(2\omega''(z_0)))),$$

$$\varphi_1(z) = z^{-1}(1-z)^{-1}. \quad (46)$$

Подставляя в (46) значения функции $\varphi_1(z_0)$ и ее производных $\varphi_1'(z_0)$ и $\varphi_1''(z_0)$, а также найденные ранее значения $\omega^{(k)}(z_0)$, $2 \leq k \leq 4$, и учитывая (33), после элементарных преобразований приходим к равенству

$$B_1 = -1/12 - \gamma^2(1-\gamma)^{-2} + O(1/\ln n). \quad (47)$$

Теперь оценка (44) следует из соотношений (37), (39), (45), (47), поскольку согласно (33)

$$(1-z_0)^{-1} = (1-\gamma)^{-1} \left(1 + \frac{\gamma\psi(\gamma)}{(1-\gamma)\ln n} + O(1/(\ln n)^2) \right).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть при условиях теоремы 2 $\gamma_0 > 1$. Тогда равномерно относительно $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$\mathbf{P}\{v_n \geq N\} = \frac{(\ln n)^N}{N!n\Gamma(\gamma)}\gamma(\gamma-1)^{-1} \times \left(1 + \frac{\gamma(\psi'(\gamma) - (\psi(\gamma))^2) - 2\psi(\gamma)(\gamma-1)^{-1} - 2(\gamma-1)^{-2}}{2\ln n} + O(1/(\ln n)^2) \right). \quad (48)$$

Доказательство. Теорема 4 доказывается аналогично теореме 3. Следует учесть, что

$$P\{v_n \geq N\} = \sum_{m=N}^{\infty} P\{v_n = m\} = \frac{1}{2\pi i n!} \oint_{|z|=z_0>1} \frac{(z+1)\dots(z+n-1)}{(z-1)z^{N-1}} dz,$$

причем из условия $\gamma_0 > 1$ вытекает, что существует постоянная $z_2 > 1$, такая, что $z_0 = z_0(n, N) \geq z_2$ при всех достаточно больших значениях n, N . Применяя к оценке полученного интеграла метод перевала, заменяя в предыдущем доказательстве функцию $\varphi_1(z) = z^{-1}(1-z)^{-1}$ на $\varphi_2(z) = (z-1)^{-1}$ и замечая, что согласно (33)

$$z_0(z_0-1)^{-1} = \gamma(\gamma-1)^{-1} \left(1 - \frac{\psi(\gamma)}{(\gamma-1)\ln n} + O(1/(\ln n)^2) \right),$$

приходим к равенству

$$\mathbf{P}\{v_0 \geq N\} = \frac{(\ln n)^N}{N!n\Gamma(\gamma)}\gamma(\gamma-1)^{-1} \times \left(1 + \frac{\gamma(\psi'(\gamma) - (\psi(\gamma))^2) - 2\psi(\gamma)(\gamma-1)^{-1} + (2B_2 + 1/6)\gamma^{-1}}{2\ln n} + O(1/(\ln n)^2) \right), \quad (49)$$

где значение B_2 вычисляется аналогично (46) с заменой $\varphi_1(z_0)$ на $\varphi_2(z_0)$ и производных $\varphi_1'(z_0)$, $\varphi_1''(z_0)$ на $\varphi_2'(z_0)$, $\varphi_2''(z_0)$. В результате получаем, что

$$B_2 = -1/12 - \gamma(\gamma-1)^{-2} + O(1/\ln n). \quad (50)$$

Подставляя (50) в (49), получаем (48). Теорема 4 доказана.

Список литературы

1. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ*. ИЛ, Москва, 1963.
2. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Наука, Москва, 2000.
3. Good I. J., An asymptotic formula for the differences of the powers at zero. *Ann. Math. Statist.* (1961) **32**, №1, 249–256.
4. Тимашёв А. Н., Об асимптотических разложениях для чисел Стирлинга 1-го и 2-го рода. *Дискретная математика* (1998) **10**, №3, 148–159.
5. Гончаров В. Л., Из области комбинаторики. *Изв. АН СССР, сер. матем.* (1944) **8**, №1, 3–48.
6. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
7. Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
8. Сачков В. Н., *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.
9. Тимашёв А. Н., Об асимптотических разложениях в локальных предельных теоремах в равновероятных схемах размещения частиц по различным ячейкам. *Дискретная математика* (2000) **12**, №1, 60–69.
10. Евграфов М. А., *Асимптотические оценки и целые функции*. Физматлит, Москва, 1962.
11. Олвер Ф., *Введение в асимптотические методы и специальные функции*. Наука, Москва, 1978.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*. Наука, Москва, 1973.
13. Павлов Ю. Л., О случайных отображениях с ограничениями на число циклов. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова* (1986) **177**, 131–142.
14. Павлов А. И., Локальные теоремы для числа компонент в случайных подстановках и отображениях. *Теория вероятностей и ее применения* (1988) **33**, №1, 196–200.
15. Волынец Л. М., Оценка скорости сходимости к предельному распределению для числа циклов в случайной подстановке. В кн.: *Вероятностные задачи дискретной математики*. МИЭМ, Москва, 1987, с. 40–46.
16. Тимашёв А. Н., Случайные разбиения множеств с известным числом блоков. *Дискретная математика* (2003) **15**, №2, 138–148.

Статья поступила 23.01.2003.