Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Черепанова, Предельные распределения числа циклов заданной длины в случайной подстановке с известным числом циклов, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 3, 128–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:32:20

Предельные распределения числа циклов заданной длины в случайной подстановке с известным числом циклов

© 2003 г. Е. В. Черепанова

Получено полное описание предельного поведения числа циклов длины r в случайной подстановке степени n , имеющей N циклов, во всех зонах изменения параметров n, N, r . Доказанные в статье результаты существенно обобщают известные результаты о предельном поведении числа таких циклов.

Работа выполнена при поддержке гранта НШ 1758.2003.1 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации.

Пусть $S_{n,N}$ — множество всех различных подстановок степени n , имеющих N циклов. Введем на $S_{n,N}$ равномерное распределение вероятностей и обозначим через μ_r случайную величину, равную числу циклов длины r в подстановке из $S_{n,N}$. В работе [1] получены предельные распределения μ_r при $n, N \rightarrow \infty$ в случаях, когда r фиксировано и $n/N \rightarrow 1$ или $N/\ln n \rightarrow \gamma$, $0 < \gamma < \infty$, а также для всех r при $1 < c \leq n/N \leq c_1 < \infty$, где c, c_1 — произвольные постоянные. В дальнейшем c, C , а также $c_i, C_i, i = 1, 2, \dots$, будут обозначать положительные постоянные, не всегда различные.

В данной статье приводится полное описание предельного поведения μ_r во всех зонах изменения параметров r, n, N . Основным методом получения этих результатов является обобщенная схема размещения [2].

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ и $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ такие, что

$$p_m = \mathbf{P}\{\xi_1 = m\} = \frac{\lambda^m}{-m \ln(1 - \lambda)}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = m\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = m \mid \xi_1 \neq r\}. \quad (2)$$

В [2] показано, что для любого $k = 0, 1, \dots, N$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\xi_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\xi_N = n\}}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\zeta_N &= \xi_1 + \dots + \xi_N, \\ \zeta_{N-k}^{(r)} &= \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)}.\end{aligned}$$

Заметим, что равенство (3) справедливо при любом значении параметра λ распределения (1), $0 < \lambda < 1$. В дальнейшем будем считать, что $\lambda = 1 - 1/n$ при $N/\ln n = O(1)$, а если $N/\ln n \rightarrow \infty$, то λ — решение уравнения

$$-\frac{\lambda}{(1-\lambda)\ln(1-\lambda)} = \frac{n}{N} \quad (4)$$

в интервале $(0, 1)$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено одно из следующих условий:

- (1) $n/N \geq c > 1$, $N/\ln n \rightarrow \infty$, $Np_r \rightarrow \infty$;
- (2) $n/N \rightarrow 1$, $(n-N)^2/N \rightarrow \infty$, $r = 1$;
- (3) $n/N \rightarrow 1$, $(n-N)^3/N^2 \rightarrow \infty$, $r = 2$;
- (4) $n/N \rightarrow 1$, $(n-N)^{r-1}/(rN^{r-2}) \rightarrow \infty$, $r \geq 3$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1))$$

равномерно относительно k , для которых

$$u_r = \frac{k - Np_r}{\sigma_{rr}\sqrt{N}}$$

лежит в любом фиксированном конечном интервале, где

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^2 &= p_r \left(1 - p_r - \frac{(n/N - r)^2 p_r}{\sigma^2} \right), \\ \sigma^2 &= \frac{n}{N} \left(\frac{1}{1-\lambda} - \frac{n}{N} \right).\end{aligned}$$

Замечание 1. В случае, когда $1 < c \leq n/N \leq c_1 < \infty$ и r фиксировано, утверждение теоремы 1 доказано в [1].

Теорема 2. Пусть выполнено одно из следующих условий:

- (1) $n, N, r \rightarrow \infty$ так, что $n/N \geq c > 1$, $N/\ln n \rightarrow \infty$;
- (2) $n \rightarrow \infty$, $N = \gamma \ln n + o(\ln n)$, $0 < \gamma < \infty$;
- (3) $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N \rightarrow 1$, $n - N \rightarrow \infty$, $r \geq 3$.

Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{(Np_r)^k}{k!} e^{-Np_r} (1 + o(1))$$

равномерно относительно целых неотрицательных k , для которых $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Замечание 2. Утверждение при условии (1) теоремы 2 и $n/N \leq c_1 < \infty$, а также при условиях (2), (3) для фиксированных r , получено в [1].

Теорема 3. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$n/N \rightarrow 1, \quad \beta = 4(n - N)^2/3N = O(1).$$

Тогда для любого фиксированного $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = 2N - n + k\} = \frac{\beta^k}{k!} e^{-\beta} + o(1),$$

$$\mathbf{P}\{\mu_2 = n - N - 2k\} = \frac{\beta^k}{k!} e^{-\beta} + o(1).$$

Замечание 3. В случае фиксированной величины $n - N$ справедливость второго утверждения теоремы 3 доказана в [1].

Теорема 4. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$n/N \rightarrow 1, \quad \beta = 4(n - N)^2/(3N) \rightarrow \infty, \quad v = 4(n - N)^3/N^2 = O(1).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_2 = n - N - 2k\} = \frac{\beta^k}{2k!} e^{-\beta} (1 + e^{-v}) + o\left(\frac{\beta^k}{k!} e^{-\beta}\right),$$

$$\mathbf{P}\{\mu_2 = n - N - 2k - 1\} = \frac{\beta^k}{2k!} e^{-\beta} (1 - e^{-v}) + o\left(\frac{\beta^k}{k!} e^{-\beta}\right)$$

равномерно относительно целых k , для которых $(k - \beta)/\sqrt{\beta}$ лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Пусть $[x]$ означает целую часть числа x .

Теорема 5. Если

$$N \geq 2, \quad n \rightarrow \infty, \quad N/\ln n \rightarrow 0, \quad r = [\alpha n], \quad 0 < \alpha = \alpha(n) \leq c < 1,$$

и $2r \neq n$ при $N = 2$, то

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 0\} = 1 - (N - 1)p_r \frac{e^\alpha}{1 - \alpha} + o(p_r),$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 1\} = (N - 1)p_r \frac{e^\alpha}{1 - \alpha} + o(p_r).$$

Теорема 6. Пусть

$$N \geq 3, \quad n \rightarrow \infty, \quad N/\ln n \rightarrow 0, \quad m = n - r \geq N - 1, \quad m \rightarrow \infty, \quad m = o(n).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если $N = o(\ln n)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = 0\} &= 1 - \frac{N-1}{m \ln n} \left(\frac{\ln m}{\ln n} \right)^{N-2} (1 + o(1)), \\ \mathbf{P}\{\mu_r = 1\} &= \frac{N-1}{m \ln n} \left(\frac{\ln m}{\ln n} \right)^{N-2} (1 + o(1)); \end{aligned}$$

(2) если $N/\ln m \rightarrow \gamma$, $0 < \gamma < \infty$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = 0\} &= 1 - \frac{1}{m\Gamma(\gamma)} \left(\frac{\ln m}{\ln n} \right)^{N-1} (1 + o(1)), \\ \mathbf{P}\{\mu_r = 1\} &= \frac{1}{m\Gamma(\gamma)} \left(\frac{\ln m}{\ln n} \right)^{N-1} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $\Gamma(\gamma)$ — значение гамма-функции в точке γ ;

(3) если $N/\ln m \rightarrow \infty$, $\alpha = m/N \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = 0\} &= 1 - \frac{1}{x_\alpha^m \sigma_\alpha \sqrt{2\pi N}} \left(-\frac{\ln(1-x_\alpha)}{\ln n} \right)^{N-1} (1 + o(1)), \\ \mathbf{P}\{\mu_r = 1\} &= \frac{1}{x_\alpha^m \sigma_\alpha \sqrt{2\pi N}} \left(-\frac{\ln(1-x_\alpha)}{\ln n} \right)^{N-1} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где

$$x_\alpha = 1 - (\alpha \ln \alpha)^{-1}, \quad \sigma_\alpha = \alpha \sqrt{\ln \alpha};$$

(4) если $N/\ln m \rightarrow \infty$, $1 < c_1 \leq \alpha = m/N \leq c_2 < \infty$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = 0\} &= 1 - \frac{1}{x^m \sigma(x) \sqrt{2\pi N}} \left(-\frac{\ln(1-x)}{\ln n} \right)^{N-1} (1 + o(1)), \\ \mathbf{P}\{\mu_r = 1\} &= \frac{1}{x^m \sigma(x) \sqrt{2\pi N}} \left(-\frac{\ln(1-x)}{\ln n} \right)^{N-1} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где x — решение уравнения

$$-\frac{x}{(1-x) \ln(1-x)} = \frac{m}{N-1} \quad (5)$$

в интервале $(0, 1)$,

$$\sigma^2(x) = -\frac{x \ln(1-x) + x^2}{(1-x)^2 \ln^2(1-x)};$$

(5) если $N/\ln m \rightarrow \infty$, $\alpha = m/N \rightarrow 1$, $m - N + 1 \geq c_3 m^{c_4}$, $c_3 > 0$, $0 < c_4 < 1$, то

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 0\} = 1 - \frac{1}{x^m \sqrt{2\pi(m-N)}} \left(-\frac{\ln(1-x)}{\ln n} \right)^{N-1} (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 1\} = \frac{1}{x^m \sqrt{2\pi(m-N)}} \left(-\frac{\ln(1-x)}{\ln n} \right)^{N-1} (1 + o(1)),$$

где x — решение уравнения (5) в интервале $(0, 1)$;

(6) если $m - \delta\sqrt{m} \leq N - 1 \leq m$, $\delta \rightarrow 0$, то

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 0\} = 1 - \frac{1}{(m - N + 1)! (\ln n)^{N-1}} \left(\frac{N-1}{2} \right)^{m-N+1} (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 1\} = \frac{1}{(m - N + 1)! (\ln n)^{N-1}} \left(\frac{N-1}{2} \right)^{m-N+1} (1 + o(1)).$$

Замечание 4. Утверждение 1 теоремы 6 остается справедливым, если $N = 2$, $m = o(n)$, причем m может быть фиксированным.

Теорема 7. Пусть

$$N \geq 3, \quad m = n - r \geq N - 1,$$

N и m фиксированы, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 0\} = 1 - \frac{1}{(\ln n)^{N-1}} \sum \frac{1}{k_1 \dots k_{N-1}} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^{N-1}}\right),$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 1\} = \frac{1}{(\ln n)^{N-1}} \sum \frac{1}{k_1 \dots k_{N-1}} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^{N-1}}\right),$$

где суммирование проводится по всем натуральным $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$ таким, что $k_1 + \dots + k_{N-1} = m$.

Теорема 8. Если

$$N = 2, \quad n \rightarrow \infty, \quad 2r = n,$$

то

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 0\} = 1 - p_r \sqrt{e} + o(p_r),$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 2\} = p_r \sqrt{e} + o(p_r).$$

Введем обозначения

$$m_r = \mathbf{M}\xi_1^{(r)},$$

$$\sigma_r^2 = \mathbf{D}\xi_1^{(r)},$$

$$\varphi(t) = \mathbf{M}\exp\{it\xi_1\},$$

$$\varphi_r(t) = \mathbf{M}\exp\{it\xi_1^{(r)}\},$$

$$\psi_s^{(r)}(t) = \mathbf{M}\exp\left\{it\left(\frac{\xi_s^{(r)} - sm_r}{\sigma_r\sqrt{s}}\right)\right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$m_r = \frac{1}{1 - p_r} \left(-\frac{\lambda}{(1 - \lambda) \ln(1 - \lambda)} - r p_r \right), \quad (6)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{1 - p_r} \left(-\frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2 \ln(1 - \lambda)} - r^2 p_r \right) - m_r^2, \quad (7)$$

$$\varphi(t) = \frac{\ln(1 - \lambda e^{it})}{\ln(1 - \lambda)}, \quad (8)$$

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{1 - p_r} (\varphi(t) - p_r e^{itr}), \quad (9)$$

$$\psi_s^{(r)}(t) = \exp \left\{ -\frac{it s m_r}{\sigma_r \sqrt{s}} \right\} \varphi_r^s \left(\frac{t}{\sigma_r \sqrt{s}} \right). \quad (10)$$

Ниже приводятся вспомогательные утверждения (леммы 1–4), а затем с их помощью будут доказаны теоремы 1–8.

Лемма 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$,

$$s = N(1 - p_r)(1 + o(1)),$$

и выполнено одно из следующих условий:

- (1) $n/N \geq c > 1$, $N/\ln n \rightarrow \infty$;
- (2) $n/N \rightarrow 1$, $(n - N)^2/N \rightarrow \infty$, $r = 1, 2$;
- (3) $n/N \rightarrow 1$, $n - N \rightarrow \infty$, $r \geq 3$.

Тогда последовательность распределений сумм $(\zeta_s^{(r)} - s m_r)/\sigma_r \sqrt{s}$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Если выполнено условие (1) леммы и, кроме того, $n/N \leq C_1 < \infty$, то решение уравнения (4) находится в интервале вида $0 < C_2 \leq \lambda \leq C_3 < 1$, и для любого r справедлива оценка

$$\sigma_r^2 \geq C_4 > 0, \quad (11)$$

а если $n/N \rightarrow \infty$, то, как отмечено в [3], уравнение (4) приближенно удовлетворяется при

$$\lambda = 1 - \left(\frac{n}{N} \ln \frac{n}{N} \right)^{-1}, \quad (12)$$

и из (6), (7) получаем, что при таком выборе λ для всех r

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{n}{N} \right)^2 \ln \frac{n}{N} (1 + o(1)). \quad (13)$$

При достаточно малых t имеет место равенство

$$\varphi_r(t) = 1 + i m_r t - \frac{\sigma_r^2 + m_r^2}{2} t^2 + \frac{\varphi_r'''(\delta)}{6} t^3, \quad (14)$$

где $0 < \delta < |t|$ и

$$|\varphi_r'''(\delta)| \leq \mathbf{M}(\xi_1^{(r)})^3 = \frac{1}{1-p_r} \left(\frac{1+\lambda}{(1-\lambda)^2} \frac{n}{N} - r^3 p_r \right).$$

Отсюда и из (10), (11), (13) следует, как легко проверить, что при любом фиксированном t справедливо соотношение

$$\psi_s^{(r)}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}. \quad (15)$$

Таким образом, при выполнении условия (1) лемма доказана.

Пусть $n/N \rightarrow 1$. Из (4) получаем, что

$$\lambda = 2 \left(\frac{n-N}{N} \right) - \frac{10}{3} \left(\frac{n-N}{N} \right)^2 + \frac{16}{9} \left(\frac{n-N}{N} \right)^3 + o \left(\left(\frac{n-N}{N} \right)^3 \right). \quad (16)$$

Учитывая (1), (6), (7), (16), несложно показать, что

$$\begin{aligned} 1 - p_1 &= \left(\frac{n-N}{N} \right) (1 + o(1)), & 1 - p_r &\rightarrow 1, \quad r \geq 2, \\ \sigma_1^2 &= \frac{4}{3} \left(\frac{n-N}{N} \right) (1 + o(1)), \\ \sigma_2^2 &= \frac{16}{3} \left(\frac{n-N}{N} \right)^2 (1 + o(1)), \\ \sigma_r^2 &= \left(\frac{n-N}{N} \right) (1 + o(1)), & r &\geq 3. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (8), (9), можно найти, что при выполнении условий леммы (2), (3) и при $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{2it} \left(1 + \frac{it}{1-p_1} \left(\frac{n}{N} \lambda + 2p_1 - 2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{t^2}{2(1-p_1)} \left(\frac{n}{N(1-\lambda)} - (3\lambda + 1) \frac{n}{N} - 4p_1 + 4 \right) + O(\lambda t^3) \right), \\ \varphi_r(t) &= e^{it} \left(1 + \frac{it}{1-p_r} \left(\frac{n}{N} - 1 - (r-1)p_r \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{t^2}{2(1-p_r)} \left(\frac{n}{N(1-\lambda)} - 2 \frac{n}{N} + 1 - (r-1)^2 p_r \right) + O(t^3 \lambda^{2+\text{sign}(2-r)}) \right), \quad r \geq 2. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (6), (7), (10), (16)–(18) следует, что при всех $r \geq 1$ и любом фиксированном t справедливо соотношение (15), что и завершает доказательство леммы.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того, $(n-N)^3/N^2 \rightarrow \infty$ при $r = 2$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\zeta_s^{(r)} = l\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi s}} e^{-z^2/2} (1 + o(1))$$

равномерно по l , для которых $z = (l - sm_r)/(\sigma_r \sqrt{s})$ лежит в любом фиксированном конечном интервале.

Доказательство. По формуле обращения, вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_s^{(r)} = l\}$ можно представить в виде

$$\mathbf{P}\{\zeta_s^{(r)} = l\} = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sqrt{s}} \int_{-\pi\sigma_r\sqrt{s}}^{\pi\sigma_r\sqrt{s}} e^{-izt} \psi_s^{(r)}(t) dt.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} e^{-t^2/2} dt,$$

получаем, что

$$R = \sqrt{2\pi}(\sigma_r\sqrt{2\pi s}\mathbf{P}\{\zeta_s^{(r)} = l\} - e^{-z^2/2}) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|t| \leq A} e^{-izt} (\psi_s^{(r)}(t) - e^{-t^2/2}) dt, \\ I_2 &= \int_{A < |t| \leq \varepsilon\sigma_r\sqrt{s}} e^{-izt} \psi_s^{(r)}(t) dt, \\ I_3 &= \int_{\varepsilon\sigma_r\sqrt{s} < |t| \leq \pi\sigma_r\sqrt{s}} e^{-izt} \psi_s^{(r)}(t) dt, \\ I_4 &= - \int_{|t| \geq A} e^{-izt-t^2/2} dt, \end{aligned}$$

положительные постоянные A, ε будут выбраны позднее. Для доказательства леммы достаточно показать, что разность R можно сделать сколь угодно малой при больших n, N .

В силу леммы 1 равномерно в любом конечном интервале справедливо соотношение (15), следовательно, $I_1 \rightarrow 0$ для каждого фиксированного $A > 0$.

Поскольку

$$|I_4| \leq \int_{|t| \geq A} e^{-t^2/2} dt,$$

выбором достаточно большого A интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым.

Оценим I_2 . Если

$$1 < c \leq n/N \leq C_1 < \infty,$$

то для $|t| \leq \varepsilon$ при достаточно малом ε из (10) и (14) получаем, что

$$|\psi_s^{(r)}(t)| \leq e^{-t^2/4} \quad (19)$$

для любого r . Тогда

$$|I_2| \leq \int_{A < |t| \leq \varepsilon\sigma_r\sqrt{s}} e^{-t^2/4} dt \leq 2 \int_A^\infty e^{-t^2/4} dt \quad (20)$$

и интеграл I_2 можно сделать сколь угодно малым, выбрав A достаточно большим.

Пусть $n/N \rightarrow \infty, N/\ln n \rightarrow \infty$. Представим I_2 в виде суммы

$$I_2 = I'_2 + I''_2 + I'''_2,$$

где областями интегрирования интегралов I_2' , I_2'' , I_2''' соответственно являются

$$\begin{aligned} S_1 &= \{A < |t| \leq \varepsilon \sqrt{N/\ln n}\}, \\ S_2 &= \{\varepsilon \sqrt{N/\ln n} < |t| \leq \min\{N/\ln n, \varepsilon \sigma_r \sqrt{s}\}\}, \\ S_3 &= \{\min\{N/\ln n, \varepsilon \sigma_r \sqrt{s}\} < |t| \leq \varepsilon \sigma_r \sqrt{s}\}, \end{aligned}$$

при этом, если $N/\ln n \geq \varepsilon \sigma_r \sqrt{s}$, то область S_3 пуста. Для $t \in S_1$ при достаточно малом ε из (10) и (14) получаем, что для всех r имеет место оценка (19) и, по аналогии с (20), интеграл I_2' можно сделать сколь угодно малым.

Функцию $\psi_s^{(r)}(t)$ можно представить в виде

$$\psi_s^{(r)}(t) = \exp \left\{ -\frac{it s m_r}{\sigma_r \sqrt{s}} \right\} \varphi^s \left(\frac{t}{\sigma_r \sqrt{s}} \right) \left(1 + \frac{p_r}{1 - p_r} \left(1 - \frac{e^{itr/\sigma_r \sqrt{s}}}{\varphi(t/\sigma_r \sqrt{s})} \right) \right)^s. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что если $|t| < \varepsilon$ и ε достаточно мало, то для любого r справедливы соотношения

$$1 + \frac{p_r}{1 - p_r} \left(1 - \frac{e^{itr}}{\varphi(t)} \right) = 1 + o \left(\frac{1}{\ln(1 - \lambda)} \right), \quad (22)$$

$$\frac{\ln |1 - \lambda e^{it}|}{\ln(1 - \lambda)} = 1 + \frac{\ln(1 + \lambda(t/(1 - \lambda))^2 + o((1/(1 - \lambda))^2))}{2 \ln(1 - \lambda)}. \quad (23)$$

Если $t \in S_2$, то из (12), (13) и (23) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{|t|}{(1 - \lambda) \sigma_r \sqrt{s}} &\geq C_2, \\ \frac{\ln |1 - \lambda e^{it/\sigma_r \sqrt{s}}|}{\ln(1 - \lambda)} &\leq 1 + \frac{C_3}{\ln(1 - \lambda)}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и (12), (21), (22) несложно получить, что для всех r

$$|\psi_s^{(r)}(t)| \leq \exp\{-C_4 N/\ln n\}.$$

Тогда

$$|I_2''| \leq C_5 \frac{N}{\ln n} \exp\{-C_4 N/\ln n\}$$

и, очевидно, $I_2'' \rightarrow 0$ при $N/\ln n \rightarrow \infty$.

Если $t \in S_3$, то, учитывая (12), (13), нетрудно видеть, что

$$|t|/(1 - \lambda) \sigma_r \sqrt{s} \geq C_6 \sqrt{N/\ln n} \rightarrow \infty,$$

и из (8), (23) следует, что

$$\varphi \left(\frac{t}{\sigma_r \sqrt{s}} \right) = 1 + \frac{\ln(|t|/(1 - \lambda) \sigma_r \sqrt{s})}{\ln(1 - \lambda)} + i \frac{\arg(1 - \lambda e^{it/\sigma_r \sqrt{s}})}{\ln(1 - \lambda)} + o \left(\frac{1}{\ln(1 - \lambda)} \right).$$

Отсюда и из (21), (22) находим, что

$$\begin{aligned} |\psi_s^{(r)}(t)| &\leq \left(1 + C_7 \frac{\ln(|t|/(1-\lambda)\sigma_r\sqrt{s})}{\ln(1-\lambda)}\right)^{s/2} \\ &\leq \left(\frac{|t|}{(1-\lambda)\sigma_r\sqrt{s}}\right)^{C_8 s / \ln(1-\lambda)} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |I_2''| &\leq 2 \int_{N/\ln n}^{\varepsilon\sigma_r\sqrt{s}} \left(\frac{t}{(1-\lambda)\sigma_r\sqrt{s}}\right)^{C_8 s / \ln(1-\lambda)} dt \\ &= 2(1-\lambda)\sigma_r\sqrt{s} \int_{N/(1-\lambda)\sigma_r\sqrt{s}\ln n}^{\varepsilon/(1-\lambda)} y^{C_8 s / \ln(1-\lambda)} dy, \end{aligned}$$

и, используя (12), (13) и соотношение $N/\ln n \rightarrow \infty$, получаем, что $I_2''' \rightarrow 0$.

Таким образом, если выполнено условие (1) леммы 1, то интеграл I_2 можно сделать сколь угодно малым при достаточно больших n, N, A и малом ε .

При выполнении условий (2), (3) леммы 1 из соотношений (10), (16)–(18) получаем, что для всех $r \geq 1$ в области интегрирования I_2 при достаточно малом ε справедливо неравенство (19). Следовательно, верно (20), и интеграл I_2 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A .

Остается оценить I_3 . Пусть $1 < c \leq n/N \leq C_1 < \infty$. Поскольку максимальный шаг распределения $\xi_1^{(r)}$ равен 1 и $\varphi_r(t)$ непрерывно зависит от параметра λ , $0 < C_9 \leq \lambda \leq C_{10} < 1$, при фиксированных r и $\varepsilon < |t| \leq \pi$ выполняется неравенство

$$|\varphi_r(t)| \leq e^{-C_{11}}. \quad (24)$$

Аналогично, для характеристической функции $\varphi(t)$ случайной величины ξ_1 справедлива оценка вида (24). Если $r \rightarrow \infty$, то $p_r \rightarrow 0$ и, используя (9) и оценку для $\varphi(t)$, находим, что при $\varepsilon < |t| \leq \pi$

$$|\varphi_r(t)| \leq |\varphi(t)| \left| 1 + \frac{p_r}{1-p_r} \left(1 - \frac{e^{itr}}{\varphi(t)}\right) \right| \leq e^{-C_{11}}.$$

Поскольку $\sigma_r \leq C_{12}$, получаем, что

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{\varepsilon\sigma_r\sqrt{s} < |t| \leq \pi\sigma_r\sqrt{s}} \left| \varphi_r\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{s}}\right) \right|^s dt \\ &\leq 2 \int_{\varepsilon\sigma_r\sqrt{s}}^{\pi\sigma_r\sqrt{s}} e^{-C_{11}s} dt \leq C_{13}\sigma_r\sqrt{s} e^{-C_{11}s} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пусть $n/N \rightarrow \infty$. Функцию $\varphi(t)$ представим в виде (см. [3])

$$\varphi(t) = \frac{\ln(1-\lambda-it) + \ln(1+f_1(t)+f_2(t))}{\ln(1-\lambda)},$$

где

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1+it-e^{it}}{1-\lambda-it}, & |f_1(t)| &\leq |t|/\sqrt{2}, \\ f_2(t) &= \frac{(1-\lambda)(e^{it}-1)}{1-\lambda-it}, & |f_2(t)| &\leq \sqrt{2}(1-\lambda). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, а также (1), (9), (12), несложно показать, что при $\varepsilon < |t| \leq \pi$ справедливо неравенство (24). Отсюда и из (10), (13) находим, что

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{\varepsilon\sigma_r\sqrt{s} < |t| \leq \pi\sigma_r\sqrt{s}} e^{-C_{11}s} dt \leq C_{14}\sigma_r\sqrt{s} e^{-C_{11}s} \\ &\leq C_{15}\sqrt{\frac{\ln n}{N}} \exp\left\{-C_{16}N\left(1 - \frac{\ln n}{C_{16}N}\right)\right\}, \end{aligned}$$

и $I_3 \rightarrow 0$, если $N/\ln n \rightarrow \infty$.

При выполнении условий (2), (3) леммы 1, $r \neq 2$ и $\varepsilon\sigma_r\sqrt{s} < |t| \leq \pi\sigma_r\sqrt{s}$ из (8), (9) получаем, что

$$\begin{aligned} \left|\varphi_1\left(\frac{t}{\sigma_1\sqrt{s}}\right)\right|^s &= \left|1 + \frac{2}{3}\lambda(e^{it/\sigma_1\sqrt{s}} - 1) + o(\lambda)\right|^s \leq e^{-C_{17}\lambda s}, \\ \left|\varphi_r\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{s}}\right)\right|^s &= \left|1 + \frac{\lambda}{2}(e^{it/\sigma_r\sqrt{s}} - 1) + o(\lambda)\right|^s \leq e^{-C_{17}\lambda s}, \quad r \geq 3. \end{aligned}$$

Отсюда и из (16), (17) следует, что $I_3 \rightarrow 0$ при $n, N \rightarrow \infty$. Если $r = 2$, то из (8), (9) находим, что при $\varepsilon < |t| \leq \pi$

$$\begin{aligned} |\varphi_2(t)|^2 &= \left|1 + \frac{\lambda^2}{3}e^{2it} + \frac{\lambda^3}{4}e^{3it} + O(\lambda^4)\right| \left(1 - \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{2} + O(\lambda^4)\right) \\ &= 1 - \frac{2}{3}\lambda^2(1 - \cos 2t) - \frac{\lambda^3}{2}(1 - \cos 3t) + O(\lambda^4). \end{aligned} \quad (25)$$

Интеграл I_3 представим в виде суммы $I_3 = I'_3 + I''_3$, где областями интегрирования интегралов I'_3 , I''_3 соответственно являются

$$\{\varepsilon\sigma_2\sqrt{s} < |t| \leq (\pi - \varepsilon)\sigma_2\sqrt{s}\}, \quad \{(\pi - \varepsilon)\sigma_2\sqrt{s} < |t| \leq \pi\sigma_2\sqrt{s}\}.$$

Из (25) следует, что если $\varepsilon < |t| \leq \pi - \varepsilon$, то

$$|\varphi_2(t)| \leq e^{-C_{18}\lambda^2},$$

а при $\pi - \varepsilon < |t| \leq \pi$

$$\begin{aligned} |\varphi_2(t)| &\leq \left(1 - \frac{2}{3}\lambda^2(1 - \cos 2t) - 2C_{19}\lambda^3\right)^{1/2} \\ &\leq \exp\{-C_{20}\lambda^2(t - \pi)^2 - C_{19}\lambda^3\}. \end{aligned}$$

Используя эти неравенства и (10), несложно получить, что

$$\begin{aligned} |I'_3| &\leq C_{21}\sigma_2\sqrt{s}e^{-C_{18}\lambda^2s}, \\ |I''_3| &\leq \sigma_2\sqrt{s}e^{-C_{19}\lambda^3s} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-C_{20}\lambda^2st^2} dt \\ &= \frac{\sigma_2}{\lambda}e^{-C_{19}\lambda^3s} \int_{-\varepsilon\lambda\sqrt{s}}^{\varepsilon\lambda\sqrt{s}} e^{-C_{20}u^2} du. \end{aligned}$$

Отсюда, из (16), (17) и соотношения $(n - N)^3/N^2 \rightarrow \infty$ следует, что $I_3 \rightarrow 0$ при $n, N \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Повторяя доказательства теорем 4.2.1 и 4.2.3 из книги [3], можно показать, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть

$$n \rightarrow \infty, \quad N = \gamma \ln n + o(\ln n), \quad 0 < \gamma < \infty, \quad s = N(1 - p_r)(1 + o(1)).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_s^{(r)} = l\} = \frac{1}{n\Gamma(\gamma)} z^{\gamma-1} e^{-z} (1 + o(1))$$

равномерно относительно l , для которых $z = l/n$ лежит в любом фиксированном интервале вида $0 < z_1 \leq z \leq z_2$, где z_1, z_2 — постоянные.

Лемма 4. Пусть

$$n \rightarrow \infty, \quad N/\ln n \rightarrow 0, \quad l = [\beta n], \quad 0 < \varepsilon \leq \beta \leq 1.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_N = l\} = Np_l(1 + o(1)) = \frac{Ne^{-\beta}}{\beta n \ln n} (1 + o(1)).$$

Теперь докажем теоремы 1–8.

Пусть выполнены условия теоремы 1 или 2. Если $(k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1 - p_r)}$ лежит в конечном фиксированном интервале, то, как легко видеть,

$$s = N - k = N(1 - p_r)(1 + o(1))$$

при $Np_r(1 - p_r) \rightarrow \infty$ или $p_r \rightarrow 0$. Следовательно, в условиях теорем 1, 2 справедливы леммы 1–3. Используя для оценки $\mathbf{P}\{\xi_N = n\}$ теоремы 4.2.1, 4.2.5, 4.2.7, 4.2.9 из [3], утверждение теоремы 1 получаем из (3), леммы 2, соотношения $Np_r(1 - p_r) \rightarrow \infty$ и нормального приближения биномиальных вероятностей, а утверждение теоремы 2 — из (3), лемм 2, 3, соотношения $p_r \rightarrow 0$ и пуассоновского приближения биномиальных вероятностей.

Доказательство теоремы 3. В статье [4] изучалось предельное поведение максимального объема дерева в случайном рекурсивном лесе, состоящем из N деревьев и n вершин, при $n, N \rightarrow \infty$, было показано, что распределения объемов деревьев в таком лесе совпадают с распределениями длин циклов в подстановке из $S_{n,N}$. Из теоремы 1 этой статьи следует, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = 2\} = e^{-\beta} + o(1),$$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = 3\} = 1 - e^{-\beta} + o(1),$$

где $\eta_{(N)}$ — максимальная длина цикла в подстановке из $S_{n,N}$. Учитывая эти равенства, получаем, что

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = m_1\} = \sum \mathbf{P}\{\mu_1 = m_1, \mu_2 = m_2, \mu_3 = m_3, \mu_i = 0, i \geq 4\} + o(1),$$

где суммирование проводится по всем целым неотрицательным m_2, m_3 таким, что

$$m_2 + m_3 = N - m_1, \quad 2m_2 + 3m_3 = n - m_1. \quad (26)$$

Положив

$$m_1 = 2N - n + k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

из (26) находим, что

$$m_2 = n - N - 2k, \quad m_3 = k.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\mu_1 = 2N - n + k\} = \mathbf{P}\{\mu_3 = k\} + o(1),$$

$$\mathbf{P}\{\mu_2 = n - N - 2k\} = \mathbf{P}\{\mu_3 = k\} + o(1).$$

Отсюда, из теоремы 2 и соотношения

$$Np_3 = \beta(1 + o(1))$$

получаем утверждение теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}\{\mu_2 = m_2\} = \sum \mathbf{P}\{\mu_1 = m_1, \mu_2 = m_2, \mu_3 = m_3, \mu_4 = m_4, \mu_i = 0, i \geq 5\} + R, \quad (27)$$

где

$$R \leq \mathbf{P}\left\{\sum_{i \geq 5} i \mu_i \geq 5\right\},$$

а суммирование проводится по всем целым неотрицательным m_1, m_3, m_4 таким, что

$$m_1 + m_3 + m_4 = N - m_2, \quad m_1 + 3m_3 + 4m_4 = n - 2m_2. \quad (28)$$

Используя теорему 2 и неравенство Чебышева, получаем оценку

$$R \leq C_1(n - N)^4 / N^3.$$

Отсюда, как несложно проверить, следует, что при выполнении условий теоремы

$$R = o\left(\frac{\beta^k}{k!} e^{-\beta}\right). \quad (29)$$

Поскольку (см., например, [1]) число подстановок в $S_{n,N}$ равно $|s(n, N)|$, где $s(n, N)$ — числа Стирлинга первого рода, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_1 = m_1, \mu_2 = m_2, \mu_3 = m_3, \mu_4 = m_4, \mu_i = 0, i \geq 5\} \\ = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3! m_4! 2^{m_2} 3^{m_3} 4^{m_4} |s(n, N)|}. \end{aligned} \quad (30)$$

Положив

$$m_2 = n - N - 2k, \quad m_4 = 2m, \quad m \geq 0,$$

из (28) находим, что

$$m_1 = 2N - n + k + m, \quad m_3 = k - 3m, \quad m \leq k/3.$$

Тогда из (27), (29), (30) следует, что

$$\mathbf{P}\{\mu_2 = n - N - 2k\} = ZS + o\left(\frac{\beta^k}{k!}e^{-\beta}\right), \quad (31)$$

где

$$Z = \left(\frac{4}{3}\right)^k \frac{n!}{k! (2N - n + k)! (n - N - 2k)! 2^{n-N} |s(n, N)|},$$

$$S = \sum_{m=0}^{[k/3]} \left(\frac{27}{16}\right)^m \frac{k! (2N - n + k)!}{(2N - n + k + m)! (k - 3m)! (2m)!}.$$

Известно [5], что

$$|s(n, N)| = n! \mathbf{P}\{v_n = N\}, \quad (32)$$

где v_n — случайная величина, равная числу циклов в случайной подстановке степени n . Из теоремы 4.2.10 [3] и соотношений (16), (32) получаем, что

$$|s(n, N)| = \frac{n! (-\ln(1 - \lambda))^N}{N! \lambda^n \sqrt{2\pi(n - N)}} (1 + o(1))$$

$$= \frac{n! \exp\{n - N - 5\beta/8 - 2v/9\}}{N! \lambda^{n-N} \sqrt{2\pi(n - N)}} (1 + o(1)). \quad (33)$$

Используя формулу Стирлинга и равенства (16), (33), можно показать, что

$$Z = \frac{\beta^k}{k!} e^{-\beta} e^{-v/2} (1 + o(1)). \quad (34)$$

Представим S в виде суммы $S = S_1 + S_2$, где суммирование по m в S_1 и S_2 осуществляется в пределах $0 \leq m \leq A$ и $A < m \leq [k/3]$, соответственно, а положительная постоянная A будет выбрана позднее. Несложно показать, что

$$S_1 = \sum_{m=0}^A \left(\sqrt{\frac{27k^3}{16N}}\right)^{2m} \frac{1}{(2m)!} (1 + o(1)) = \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{27k^3}{16N}}\right) + \delta,$$

где величина δ может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно больших A , n , N . Легко видеть, что при выполнении условий теоремы

$$27k^3/16N = v^2/4(1 + o(1)).$$

Следовательно,

$$S_1 = \text{ch}(v/2)(1 + o(1)). \quad (35)$$

Ясно, что сумму S_2 можно сделать сколь угодно малой, выбрав A, n, N достаточно большими. Отсюда и из (31), (34), (35) следует первое утверждение теоремы 4. Второе утверждение доказывается аналогично с использованием (27)–(30), (33) при

$$m_2 = n - N - 2k - 1, \quad m_4 = 2m + 1, \quad m \geq 0.$$

Доказательство теорем 5–7. Вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \neq r, i = 1, \dots, N\}$ представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_N = n, \xi_i \neq r, i = 1, \dots, N\} &= \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} - Np_r \mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = n - r\} \\ &+ \binom{N}{2} p_r^2 \mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = n - 2r\} - \dots \\ &+ N(-p_r)^{N-1} \mathbf{P}\{\xi_1 = n - (N-1)r\} + (-p_r)^N \delta_1, \end{aligned}$$

где $\delta_1 = 1$, если $n - Nr = 0$, и $\delta_1 = 0$, если $n - Nr \neq 0$. Тогда из (2), (3) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 0\} = 1 - Np_r \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = n - r\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} + R_0, \quad (36)$$

где

$$R_0 = \binom{N}{2} p_r^2 \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = n - 2r\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} - \binom{N}{3} p_r^3 \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-3} = n - 3r\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} + \dots + \frac{(-p_r)^N \delta_1}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

при этом, как несложно показать,

$$0 \leq R_0 \leq \binom{N}{2} p_r^2 \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = n - 2r\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}. \quad (37)$$

Аналогично, из (2), (3) находим, что

$$\mathbf{P}\{\mu_r = 1\} = Np_r \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = n - r\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} - R_1, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= Np_r \left((N-1)p_r \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = n - 2r\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \right. \\ &\quad \left. - \binom{N-1}{2} p_r^2 \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-3} = n - 3r\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} + \dots + \frac{(-p_r)^{N-1} \delta_1}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \right), \\ 0 \leq R_1 &\leq 2 \binom{N}{2} p_r^2 \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = n - 2r\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Пусть выполнены условия теоремы 5. Если $N = 2$ или $n - 2r < N - 2$, тогда $R_0 = R_1 = 0$. При $n - 2r \geq N - 2$ и $n - 2r \geq \varepsilon n$, $\varepsilon > 0$, используя (1) и лемму 4, получаем, что

$$\binom{N}{2} p_r^2 \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = n - 2r\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} = o(Np_r). \quad (40)$$

Если же $n - 2r \geq N - 2$ и $n - 2r = o(n)$, то $r/n \rightarrow 1/2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_{N-2} = n - 2r\} &\leq (N - 2) \sum_{l \geq (n-2r)/(N-2)} \mathbf{P}\{\zeta_{N-3} = n - 2r - l\} p_l \\ &\leq \frac{N(N - 2)}{(n - 2r) \ln n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и также справедливо соотношение (40). Утверждение теоремы 5 следует из (1), (36)–(40) и леммы 4.

Пусть теперь $m = n - r \geq N - 1 \geq 2$, $m \rightarrow \infty$, $m = o(n)$. С помощью (1) и леммы 4, получаем, что

$$\begin{aligned} N p_r \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-1} = m\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} &= \frac{N p_r}{N p_n} \sum_{k_1 + \dots + k_{N-1} = m} \frac{\lambda^m}{k_1 \dots k_{N-1} (-\ln(1 - \lambda))^{N-1}} (1 + o(1)) \\ &= \frac{(N - 1)! |s(m, N - 1)|}{(\ln n)^{N-1} m!} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (41)$$

В [5] показано, что если $N = o(\ln m)$, то

$$|s(m, N - 1)| = \frac{(m - 1)!}{(N - 2)!} (\ln m + C)^{N-2} (1 + o(1)),$$

где C — постоянная Эйлера, а при условии $m - \delta\sqrt{m} \leq N - 1 \leq m$, $\delta \rightarrow 0$,

$$|s(m, N - 1)| = \binom{m}{N - 1} \left(\frac{N - 1}{2}\right)^{m-N+1} (1 + o(1)).$$

Учитывая, что $R_0 = R_1 = 0$, отсюда и из (36), (38), (41) получаем утверждения (1) и (6) теоремы 6, а утверждения (2)–(5) следуют из (32), (36), (38), (41) и теорем 4.2.2, 4.2.6, 4.2.8, 4.2.10 книги [3].

Если $N = 2$, $m = n - r = o(n)$, то из (2), (3) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_r = 0\} &= 1 - \frac{2 p_r p_m}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 = n\}}, \\ \mathbf{P}\{\mu_r = 1\} &= \frac{2 p_r p_m}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 = n\}}. \end{aligned}$$

Отсюда, из (1) и леммы 4 следует, в соответствии с замечанием 3, что утверждение (1) теоремы 6 остается справедливым, если $N = 2$, $m = o(n)$.

Очевидно, что при выполнении условий теоремы 7 $R_0 = R_1 = 0$. Используя лемму 4 для оценки $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$, а также (1), из (36), (38) получаем утверждение теоремы 7.

Для доказательства теоремы 8 заметим, что из определения обобщенной схемы размещения (см. (8.1.1) в [2]) и (2), (3) следуют равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_{n/2} = 0\} &= \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 = n, \xi_1, \xi_2 \neq n/2\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 = n\}} = 1 - \frac{p_{n/2}^2}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 = n\}}, \\ \mathbf{P}\{\mu_{n/2} = 2\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = \xi_2 = n/2 \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{p_{n/2}^2}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 = n\}}. \end{aligned}$$

Отсюда, из (1) и леммы 4 получаем утверждение теоремы 8.

Список литературы

1. Тимашёв А. Н., О распределении числа циклов заданной длины в классе подстановок с известным числом циклов. *Дискретная математика* (2001) **13**, №4, 60–72.
2. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
3. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Наука, Москва, 2000.
4. Павлов Ю. Л., Лосева Е. А., Предельные распределения максимального объема дерева в случайном рекурсивном лесе. *Дискретная математика* (2002) **14**, №1, 60–74.
5. Сачков В. Н., *Комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1977.

Статья поступила 17.04.2003.