Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Казимиров, Возникновение гигантской компоненты в случайной подстановке с известным числом циклов, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 3, 145–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:33:47

Возникновение гигантской компоненты в случайной подстановке с известным числом циклов

© 2003 г. Н. И. Казимиров

Найдены условия возникновения гигантского цикла в случайной подстановке с известным числом циклов, получены предельные распределения наибольших длин циклов во всех зонах изменения параметров.

В [1] изучен ряд свойств случайной подстановки множества $X_n = \{1, \dots, n\}$, которая совпадает с любым взаимно однозначным отображением X_n на себя с вероятностью $(n!)^{-1}$. В этой статье рассмотрено предельное поведение наибольших длин циклов случайной подстановки с известным числом циклов. На основании этих результатов найдены условия возникновения гигантского цикла в такой случайной подстановке.

Пусть $\pi_{N,n}$ — случайная подстановка множества X_n , содержащая ровно N циклов и равномерно распределенная на множестве всех подстановок X_n с N циклами (понятно, что $n \geq N$). Обозначим $\eta_1, \dots, \eta_N$ длины циклов случайной подстановки $\pi_{N,n}$, занумерованных одним из $N!$ возможных способов. Тогда, как показано в [1], для любых целых чисел $k_1, \dots, k_N$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad (1)$$

где случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ независимы и имеют распределение логарифмического ряда, то есть

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{x^k}{k \ln(1-x)^{-1}}, \quad 0 < x < 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

Таким образом, для получения предельных распределений длин циклов случайной подстановки $\pi_{N,n}$ можно использовать обобщенную схему размещения [1–3].

В [4] доказано, что с помощью этой же обобщенной схемы размещения можно изучать предельное поведение объемов деревьев в рекурсивном лесе, состоящем из N некорневых деревьев и содержащем n вершин, при равномерном распределении вероятностей на множестве таких лесов. В [4] получено полное описание предельного поведения максимального объема дерева, а значит, и максимальной длины цикла в случайной подстановке $\pi_{N,n}$. Ниже будет получено полное описание предельного поведения p -й по величине компоненты случайной подстановки $\pi_{N,n}$ для любого фиксированного p . Поскольку,

как отмечалось выше, для изучения рекурсивных лесов также используется обобщенная схема размещения (1), все полученные здесь результаты остаются справедливыми для случайных рекурсивных лесов.

Пусть

$$\eta_{(1)} \leq \eta_{(2)} \leq \dots \leq \eta_{(N)}$$

— вариационный ряд случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$. Для целого $r \geq 1$ положим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_j^{(r)} = k\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \leq r\}, \\ \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_j^{(r)} = k\} &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 > r\}, \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

при этом случайные величины $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}, \tilde{\xi}_1^{(r)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ независимы. Пусть также

$$\begin{aligned} \zeta_N &= \xi_1 + \dots + \xi_N, \\ \tilde{\zeta}_N^{(r)} &= \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)}, \\ \tilde{\zeta}_0^{(r)} &= 0. \end{aligned}$$

В [1] доказано равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r\} = \sum_{l=0}^p \binom{N}{l} P_r^l (1 - P_r)^{N-l} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}, \quad (3)$$

где $p = 0, 1, \dots, N-1$, $P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}$. Отсюда видно, что для получения предельных распределений случайных величин $\eta_{(N-p)}$ достаточно найти предельные распределения сумм $\zeta_N, \zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)}$ и асимптотику вероятности P_r .

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\begin{aligned} m &= \mathbf{E}\xi_1, \quad m_r = \mathbf{E}\xi_1^{(r)}, \\ \sigma &= \sqrt{\mathbf{D}\xi_1}, \quad \sigma_r = \sqrt{\mathbf{D}\xi_1^{(r)}}, \quad \mu_4 = \mathbf{E}(\xi_1 - m)^4. \end{aligned}$$

Положим также

$$\varphi(X; t) = \mathbf{E}e^{itX}$$

для любой случайной величины X . Выделим несколько зон изменения параметров:

- (a) $N \rightarrow \infty, n - N$ — постоянная величина,
- (b) $N \rightarrow \infty, n - N \rightarrow \infty, n - N = o(N)$,
- (c) $N \rightarrow \infty, n - N \asymp N$ (здесь и далее знак $\asymp$ означает, что связанные им величины имеют одинаковый порядок [5]),
- (d) $N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow \infty, N/\ln n \rightarrow \infty$,
- (e) $N \rightarrow \infty, N/\ln n \rightarrow \alpha, \alpha > 0$ — положительная постоянная,
- (f) $N/\ln n \rightarrow 0$.

Как видно из (2), распределения сумм $\zeta_N, \zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)}$ зависят от параметра x , который может быть выбран произвольно из интервала $(0, 1)$. Мы будем выбирать его наиболее удобным для получения локальных теорем способом, а именно, так, чтобы математическое ожидание суммы ζ_N было близко к n . Для зоны (а) положим

$$x = \frac{1}{N},$$

для зон (b)–(d) выбираем x так, чтобы удовлетворялось равенство

$$m = \frac{x}{(1-x)\ln(1-x)^{-1}} = \frac{n}{N}, \quad (4)$$

а в зонах (е) и (f) положим

$$x = 1 - \frac{1}{n}.$$

Нетрудно проверить, что при таком выборе параметра x в зоне (е)

$$\mu_4/(\sigma^4 N) \rightarrow \alpha^{-1},$$

в то время как в зонах (а)–(d)

$$\mu_4 = o(\sigma^4 N).$$

В других аналогичных задачах разбиение на зоны тоже производится в зависимости от поведения дробей n/N и $\mu_4/(\sigma^4 N)$ (см., например, [6, 7]).

Говорят [8], что в обобщенной схеме размещения (1) возникает гигантская компонента, если при $n \rightarrow \infty$ случайная величина $\eta_{(N)}$ с вероятностью, стремящейся к 1, имеет порядок n , и случайные величины $\eta_{(N)}$ и $\eta_{(N-1)}$ имеют предельные распределения при различной по порядку нормировке. Как показывают исследования [6, 7, 8], именно при условии

$$\sigma^4 N = O(\mu_4),$$

то есть в последних двух зонах, следует ожидать появления гигантской компоненты.

Из результатов работы [4] ясно, что гигантский цикл возникает в зоне (f) и не возникает в зонах (а)–(d). Таким образом, остался открытым вопрос о его возникновении в зоне (е). Ниже будет показано, что в рассматриваемых случайных подстановках гигантская компонента возникает только в зоне (f).

Теоремы 1–6 содержат результаты о предельном поведении $\eta_{(N-p)}$ при фиксированном p в зонах (а)–(f).

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что $n - N$ — постоянная величина. Тогда для $p = 0, 1, \dots, n - N - 1$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = 2\} \rightarrow 1.$$

Теорема 2. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что

$$n - N \rightarrow \infty, \quad n - N = o(N),$$

параметр x выбран как корень уравнения (4), а r удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} Nx^{r-1}/r &\rightarrow \infty, \\ Nx^r/(r+1) &\rightarrow \gamma, \end{aligned}$$

где γ — неотрицательная постоянная.

Тогда для любого фиксированного $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = r\} &\rightarrow e^{-\gamma} \sum_{l=0}^p \frac{\gamma^l}{l!}, \\ \mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = r+1\} &\rightarrow 1 - e^{-\gamma} \sum_{l=0}^p \frac{\gamma^l}{l!}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что

$$n - N \asymp N,$$

параметр x выбран как корень уравнения (4), а r удовлетворяет соотношению

$$nx^r/r \rightarrow \gamma,$$

где γ — положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $p = 0, 1, 2, \dots$ и любого целого фиксированного h

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r+h\} \sim e^{-\gamma x^h} \sum_{l=0}^p \frac{(\gamma x^h)^l}{l!}.$$

Теорема 4. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что

$$n/N \rightarrow \infty, \quad N/\ln n \rightarrow \infty,$$

параметр x выбран как корень уравнения (4), r удовлетворяет соотношению

$$nx^r/r \rightarrow \gamma,$$

где γ — положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma} \sum_{l=0}^p \frac{\gamma^l}{l!}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} I_0(y, z) &= y^{\alpha-1}, \\ I_s(y, z) &= \int_{X(s, y, z)} \frac{(y - x_1 - \dots - x_s)^{\alpha-1}}{x_1 \dots x_s} dx_1 \dots dx_s, \end{aligned}$$

где

$$X(s, y, z) = \{(x_1, \dots, x_s) : x_k \geq z, y \geq x_1 + \dots + x_s\}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Теорема 5. Пусть $N, n \rightarrow \infty$ так, что

$$N / \ln n \rightarrow \alpha,$$

где α — положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $p = 0, 1, 2, \dots$ и любого фиксированного $z > 0$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq zn\} \rightarrow \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^s}{s!} I_s(1, z) (-1)^{\min\{p, s\}} \binom{s-1}{\min\{p, s\}}.$$

Теорема 6. Пусть $n \rightarrow \infty$ так, что

$$N / \ln n \rightarrow 0,$$

r удовлетворяет соотношению

$$\ln(n/r) \sim \gamma(\ln n)/N,$$

где γ — положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $p = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\gamma^l}{l!},$$

если $N \rightarrow \infty$, и

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r\} \rightarrow \sum_{l=0}^{p-1} \binom{N-1}{l} \frac{\gamma^l}{N^l} \left(1 - \frac{\gamma}{N}\right)^{N-l-1},$$

если N фиксировано и $\gamma < N$.

В [4] показано, что в зоне (а) имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = 2\} \rightarrow 1.$$

Отсюда легко видеть, что и для $p = 1, \dots, n - N - 1$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = 2\} \rightarrow 1.$$

Тем самым, теорема 1 доказана.

Рассмотрим зоны (а)–(d). По теоремам 4.2.9, 4.2.7, 4.2.5 из [1] и лемме 15 работы [4] при условии, что $N P_r \rightarrow \gamma$, где γ — положительная постоянная, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_N = k\} &= \frac{1 + o(1)}{\sigma \sqrt{2\pi N}} e^{-u^2/2}, \\ \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = k\} &= \frac{1 + o(1)}{\sigma_r \sqrt{2\pi N}} e^{-u_r^2/2} \end{aligned} \quad (5)$$

равномерно относительно целых k , для которых

$$u = \frac{k - n}{\sigma\sqrt{N}},$$

$$u_r = \frac{k - Nm_r}{\sigma_r\sqrt{N}}$$

лежат в произвольных фиксированных конечных интервалах. Второе из соотношений в (5) сохраняет силу в зоне (b) при $r \geq 2$, если $NP_{r-1} \rightarrow \infty$, $NP_r \rightarrow \gamma$, где постоянная $\gamma \geq 0$. Кроме того, в этом случае указанное соотношение сохраняет силу для суммы $\xi_N^{(r+1)}$, а при $r \geq 3$ и для $\xi_N^{(r-1)}$.

Из лемм 3–5 работы [4] следует, что если r в зонах (b)–(d) выбрано так, как указано в условиях теорем 2–4, то $NP_r \rightarrow \gamma$. Таким образом, в условиях теорем 2–4 справедливы соотношения (5). Кроме того, с помощью найденных в [4] соотношений легко установить, что $\sigma_r \sim \sigma$, $m_r \sim m$.

Найдем асимптотику $\xi_{N-l}^{(r)} + \tilde{\xi}_l^{(r)}$ при любом фиксированном l .

Лемма 1. В условиях теорем 2–4 при любых фиксированных t и l выполняется соотношение

$$\varphi\left(\frac{\xi_{N-l}^{(r)} + \tilde{\xi}_l^{(r)} - Nm_r}{\sigma_r\sqrt{N}}; t\right) \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\varphi\left(\frac{\xi_{N-l}^{(r)} + \tilde{\xi}_l^{(r)} - Nm_r}{\sigma_r\sqrt{N}}; t\right) = \varphi\left(\frac{\xi_N^{(r)} - Nm_r}{\sigma_r\sqrt{N}}; t\right) \frac{\varphi(\tilde{\xi}_l^{(r)}; t/(\sigma_r\sqrt{N}))}{\varphi(\xi_l^{(r)}; t/(\sigma_r\sqrt{N}))}.$$

Пользуясь найденными в [4] оценками моментов $\xi_1^{(r)}$, легко показать, что $m_r/(\sigma_r\sqrt{N}) \rightarrow 0$. Отсюда и из представления $\varphi(\xi_1^{(r)}; u) = 1 + O(mu)$ следует, что $\varphi(\xi_l^{(r)}; t/(\sigma_r\sqrt{N})) \rightarrow 1$.

Нетрудно показать также, что $E\tilde{\xi}_1^{(r)} \asymp r$. Действительно,

$$E\tilde{\xi}_1^{(r)} = \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} x^k}{\sum_{k=r+1}^{\infty} x^k/k} = \frac{x^{r+1}}{P_r(1-x)\ln(1-x)^{-1}} = \frac{x^r m}{P_r} = \frac{nx^r}{NP_r}.$$

В зоне (b) $n \sim N$ и в силу формулы (7) в [4]

$$NP_r \sim \frac{Nx^r}{r+1},$$

откуда получаем, что $E\tilde{\xi}_1^{(r)} \sim r+1$. Поскольку в условиях теоремы 3 справедливы соотношения $n \asymp N$ и $Nx^r \asymp r$, при $NP_r \rightarrow \gamma > 0$ получим, что $E\tilde{\xi}_1^{(r)} \asymp r$. В условиях теоремы 4 справедливы соотношения $nx^r/r \rightarrow \gamma$ и $NP_r \rightarrow \gamma$, откуда получаем, что $E\tilde{\xi}_1^{(r)} \sim r$.

Докажем, что $r = o(\sigma\sqrt{N})$. Для этого оценим $NP_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}}$, где ε — положительная постоянная. Поскольку $m = o(\sigma\sqrt{N})$,

$$NP_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}} \leq N\mathbf{P}\{|\xi_1 - m| \geq \varepsilon\sigma\sqrt{N}/2\} = O(\mu_4/(\sigma^4 N)).$$

Как уже отмечалось выше, в зонах (b)–(d) $\mu_4 = o(\sigma^4 N)$. Поэтому $NP_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}} \rightarrow 0$ при любом $\varepsilon > 0$. В то же время $NP_r \rightarrow \gamma$, что, как было отмечено ранее, вытекает из условий теорем 2–4. Следовательно, $r = o(\sigma\sqrt{N})$ при $\gamma > 0$. При $\gamma = 0$ воспользуемся следующим условием $NP_{r-1} \rightarrow \infty$ теоремы 2. Отсюда следует, что $r - 1 = o(\sigma\sqrt{N})$, а значит, $r = o(\sigma\sqrt{N})$.

Отсюда и из представления

$$\varphi(\tilde{\xi}_1^{(r)}; t/(\sigma_r\sqrt{N})) = 1 + O(\mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)}/(\sigma_r\sqrt{N}))$$

с помощью соотношения $\sigma_r \sim \sigma$ находим, что

$$\varphi(\tilde{\xi}_l^{(r)}; t/(\sigma_r\sqrt{N})) \rightarrow 1.$$

Теперь, используя (5), получаем утверждение леммы.

Локальную сходимость $\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\xi}_l^{(r)}$ к нормальному закону легко доказать, следуя доказательству леммы 15 в [4] и используя оценку

$$|\varphi(\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\xi}_l^{(r)}; u)| \leq |\varphi(\zeta_{N-l}^{(r)}; u)|,$$

справедливую, поскольку величина $N - l$ удовлетворяет тем же условиям, что и величина N . Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. В условиях теорем 2–4 для любого фиксированного $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\xi}_l^{(r)} = k\} = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi N}} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)) \quad (6)$$

равномерно по всем k таким, что u_r лежит в любом конечном фиксированном интервале.

Теперь, используя соотношения (5) и (6) при $k = n$, учитывая, что согласно [4] $(n - Nm_r)^2 = o(N\sigma_r^2)$ и $\sigma \sim \sigma_r$, и используя формулу (3), получаем, что

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r\} \sim \sum_{l=0}^p \binom{N}{l} P_r^l (1 - P_r)^{N-l} \quad (7)$$

Далее, при $N \rightarrow \infty$ и фиксированном l

$$\binom{N}{l} = \frac{N!}{(N-l)!l!} \sim \frac{N^l}{l!}. \quad (8)$$

Поскольку в условиях теоремы 2 $x \rightarrow 0$, кроме соотношения $NP_r \rightarrow \gamma$ также справедливы соотношения $NP_{r-1} \rightarrow \infty$ и $NP_{r+1} \rightarrow 0$. Отсюда легко найти, что в условиях теоремы 2

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r - 1\} \rightarrow 0,$$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r\} \rightarrow e^{-\gamma} \sum_{l=0}^p \gamma^l / l!,$$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq r + 1\} \rightarrow 1,$$

откуда следует утверждение теоремы 2.

В условиях теоремы 3 $NP_{r+h} \sim \gamma x^h$ при любом целом фиксированном h , что доказано в [4]. Отсюда следует утверждение теоремы 3.

Наконец, теорема 4 следует из соотношений (7), (8) и $NP_r \rightarrow \gamma$.

Рассмотрим зону (е). Полагая $x = 1 - 1/n$, $r = zn$, где постоянная $z \in (0; 1)$, и применяя лемму 6 из [4], находим, что $NP_r \rightarrow E(z, 0)$, где

$$E(z, t) = \alpha \int_z^\infty y^{-1} e^{-y(1-it)} dy.$$

Далее, по теореме 4.2.1 из [1] распределение случайной величины ζ_N/n сходится к гамма-распределению с параметрами $(\alpha, 1)$, то есть для целых yn

$$n\mathbf{P}\{\zeta_N = yn\} \rightarrow \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} \quad (9)$$

равномерно по y в любом положительном конечном фиксированном интервале.

Найдем предельное распределение $\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)}$.

Лемма 3. Пусть $r = zn$, величина $z \in (0; 1)$, $x = 1 - n^{-1}$. Тогда в зоне (е) при любых фиксированных t и l

$$\varphi(\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)}; t/n) \rightarrow \frac{\exp\{E(z, 0) - E(z, t)\} E(z, t)^l}{(1-it)^\alpha E(z, 0)^l}.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\varphi(\zeta_{N-p}^{(r)} + \tilde{\zeta}_p^{(r)}; t/n) = \varphi(\zeta_N^{(r)}; t/n) \frac{\varphi(\tilde{\zeta}_p^{(r)}; t/n)}{\varphi(\zeta_p^{(r)}; t/n)}.$$

Используя оценки моментов $\xi_1^{(r)}$, полученные в [4], нетрудно показать, что $m_r = o(n)$. Отсюда следует, что $\varphi(\zeta_1^{(r)}; t/n) \rightarrow 1$.

При доказательстве леммы 1.8.8 в [2] показано, что

$$\sum_{s=r+1}^{\infty} s^{-1} x^s e^{its/n} \rightarrow E(z, t)/\alpha.$$

Отсюда получаем, что

$$\varphi(\tilde{\xi}_1^{(r)}; t/n) = \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{x^s e^{its/n}}{s P_r \ln(1-x)^{-1}} \sim \frac{E(z, t)}{P_r \alpha \ln n} \rightarrow \frac{E(z, t)}{E(z, 0)},$$

где мы воспользовались условием $N \sim \alpha \ln n$ и тем, что $NP_r \rightarrow E(z, 0)$, как отмечалось выше.

В лемме 16 из [4] приведено асимптотическое выражение для $\varphi(\zeta_N^{(r)}; t/n)$, равное $\exp\{E(z, 0) - E(z, t)\}(1-it)^{-\alpha}$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $r = zn$, величина $z \in (0; 1)$, $x = 1 - n^{-1}$. Тогда в зоне (е) при любом фиксированном l для целых yn

$$n\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)} = yn\} \rightarrow \frac{\alpha^l e^{E(z,0)-y}}{\Gamma(\alpha)E(z,0)^l} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^s}{s!} I_{s+l}(y, z). \quad (10)$$

равномерно по y в любом конечном фиксированном интервале положительной полуоси.

Доказательство. Как показано в [4], характеристической функции

$$\exp\{E(z, 0) - E(z, t)\}(1 - it)^{-\alpha}$$

соответствует плотность

$$g(y) = \frac{e^{E(z,0)-y}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^s}{s!} I_s(y, z), \quad y > 0,$$

а характеристической функции $E(z, t)/E(z, 0)$ соответствует плотность

$$\alpha y^{-1} E(z, 0)^{-1} e^{-y}, \quad y > z.$$

Пользуясь формулой свертки, нетрудно найти, что характеристической функции

$$\frac{\exp\{E(z, 0) - E(z, t)\}E(z, t)^l}{(1 - it)^\alpha E(z, 0)^l}$$

соответствует плотность

$$G(y) = \frac{\alpha^l e^{E(z,0)-y}}{\Gamma(\alpha)E(z,0)^l} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^s}{s!} I_{s+l}(y, z), \quad y > 0.$$

По формуле обращения находим, что

$$2\pi n\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)} = yn\} - 2\pi nG(y) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-ity} \left(\varphi(\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)}; t/n) - \frac{\exp\{E(z, 0) - E(z, t)\}E(z, t)^l}{(1 - it)^\alpha E(z, 0)^l} \right) dt,$$

$$I_2 = \int_{A < |t| \leq \varepsilon n} e^{-ity} \varphi(\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)}; t/n) dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon n < |t| \leq \pi n} e^{-ity} \varphi(\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)}; t/n) dt,$$

$$I_4 = - \int_{A < |t|} e^{-ity} \frac{\exp\{E(z, 0) - E(z, t)\}E(z, t)^l}{(1 - it)^\alpha E(z, 0)^l} dt,$$

где A и ε — некоторые положительные постоянные. Для доказательства леммы необходимо показать, что каждый из перечисленных интегралов может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно больших N, n, A и достаточно малого ε .

По лемме 3 первый интеграл стремится к нулю при любом фиксированном A . Для оценки интегралов I_2 и I_3 заметим, что

$$|\varphi(\xi_{N-p}^{(r)} + \tilde{\xi}_p^{(r)}; t/n)| \leq |\varphi(\xi_{N-p}^{(r)}; t/n)|.$$

Величина $N - l$ удовлетворяет тем же условиям, что и величина N , поэтому здесь применимы те же рассуждения, что и в лемме 17 в [4], позволяющие свести оценку интегралов I_2, I_3 к оценкам одноименных интегралов, найденным при доказательстве теоремы 4.2.1 в [1].

Для оценки I_4 проведем интегрирование по частям. Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} E(z, t) = \frac{i\alpha}{1 - it} e^{z(it-1)},$$

находим, что

$$\begin{aligned} \int_A^\infty e^{-ity} \frac{\exp\{E(z, 0) - E(z, t)\} E(z, t)^l}{(1 - it)^\alpha E(z, 0)^l} dt &= \frac{e^{E(z, 0)}}{E(z, 0)^l} \left(- \frac{e^{-ity} e^{-E(z, t)} E(z, t)^l}{iy(1 - it)^\alpha} \Big|_A^\infty \right. \\ &\quad \left. + i\alpha \int_A^\infty e^{-ity - E(z, t)} E(z, t)^{l-1} \frac{(l - E(z, t))e^{z(it-1)} + E(z, t)}{(1 - it)^{\alpha+1}} dt \right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$|I_4| \leq \frac{c}{y} \left(\frac{1}{(1 + A^2)^{\alpha/2}} + \int_A^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)^{(\alpha+1)/2}} \right),$$

где c — некоторая положительная постоянная. Поэтому интеграл I_4 может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно большого A . Лемма доказана.

Теперь, из формулы (3), полагая $r = zn$ и используя (9) и (10) при $y = 1$, а также соотношение (8), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leq zn\} &\sim \sum_{l=0}^p \binom{N}{l} P_r^l (1 - P_r)^{N-l} \frac{\alpha^l e^{E(z, 0)}}{E(z, 0)^l} \sum_{s=0}^\infty \frac{(-\alpha)^s}{s!} I_{s+l}(1, z) \\ &\sim \sum_{l=0}^p \frac{(\alpha N P_r)^l e^{-N P_r + E(z, 0)}}{l! E(z, 0)^l} \sum_{s=l}^\infty \frac{(-\alpha)^{s-l} s!}{(s-l)! s!} I_s(1, z) \\ &\rightarrow \sum_{s=0}^\infty \frac{(-\alpha)^s}{s!} I_s(1, z) \sum_{l=0}^{\min\{p, s\}} (-1)^l \binom{s}{l}. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно упростить по формуле (5.14) из [5] и получить утверждение теоремы 5.

Рассмотрим зону (f).

Лемма 5. Пусть выполнены условия зоны (f), $x = 1 - n^{-1}$, r выбрано так, что

$$\ln(n/r) \sim \gamma(\ln n)/N,$$

где γ — положительная постоянная. Тогда для любого целого положительного l

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_l^{(r)} = h\} = \frac{Nle^{-h/n}}{h\gamma \ln n}(1 + o(1))$$

равномерно по целым h таким, что $0 < c_1 \leq h/n \leq c_2 < \infty$, где c_1, c_2 — некоторые постоянные.

Доказательство. Докажем это утверждение по индукции. Пусть $l = 1$. Заменяя суммирование интегрированием, нетрудно получить, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \sim \int_{r(1-x)}^{\infty} e^{-u} u^{-1} du \sim -\ln(r(1-x)) = \ln\left(\frac{n}{r}\right) \sim \gamma \frac{\ln n}{N}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = h\} = \frac{x^h}{h \sum_{k=r+1}^{\infty} x^k/k} \sim \frac{Ne^{-h/n}}{h\gamma \ln n}.$$

Предположим, что утверждение леммы справедливо для $l = L - 1$, докажем его для $l = L$. Пусть $\varepsilon \in (0; 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_L^{(r)} = h\} &= \sum_{0 < j < \varepsilon h} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} = j\} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = h - j\} \\ &+ \sum_{\varepsilon h \leq j \leq h} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} = j\} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = h - j\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим первую сумму. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = h - j\} \sim \frac{Ne^{(j-h)/n}}{(h-j)\gamma \ln n}.$$

Отсюда следует, что равномерно по $j \in (0; \varepsilon h)$ величина

$$N^{-1} e^{h/n} h\gamma (\ln n) \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = h - j\}$$

может быть сделана сколь угодно близкой к 1 выбором достаточно малого ε . Следовательно,

$$\frac{e^{h/n} h\gamma \ln n}{N \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} < \varepsilon h\}} \sum_{0 < j < \varepsilon h} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} = j\} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = h - j\}$$

может быть сделано сколь угодно близким к 1 выбором достаточно малого ε .

Ясно, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} < \varepsilon h\} = 1 - \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} \geq \varepsilon h\}.$$

Оценивая математическое ожидание $\tilde{\xi}_1^{(r)}$, находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)} &= \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} x^k}{\sum_{k=r+1}^{\infty} x^k/k} \sim \frac{x^{r+1}}{(1-x) \ln(n/r)} \\ &\sim \frac{Nn}{\gamma \ln n}, \end{aligned}$$

и применяя неравенство Чебышева, получаем оценку

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} \geq \varepsilon h\} \leq \frac{(L-1)\mathbf{E}\tilde{\xi}_1^{(r)}}{\varepsilon h} \asymp \frac{N}{\ln n} = o(1).$$

Следовательно, $\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} < \varepsilon h\} \rightarrow 1$ при любом фиксированном ε . Таким образом, выражение

$$N^{-1}e^{h/n}h\gamma(\ln n) \sum_{0 < j < \varepsilon h} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} = j\}\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = h - j\}$$

может быть сделано сколь угодно близким к 1 выбором достаточно малого ε и достаточно большого n .

Оценим вторую сумму в (11). Для этого используем предположение индукции об асимптотике вероятности $\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} = j\}$, поскольку $j \asymp n$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon h \leq j \leq h} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} = j\}\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = h - j\} &\sim \sum_{\varepsilon h \leq j < h-r} \frac{N(L-1)e^{-j/n}}{j\gamma \ln n} \frac{Ne^{(j-h)/n}}{(h-j)\gamma \ln n} \\ &= \frac{N^2(L-1)e^{-h/n}}{\gamma^2(\ln n)^2} \sum_{\varepsilon h \leq j < h-r} \frac{1}{j(h-j)} \\ &= \frac{N^2(L-1)e^{-h/n}}{\gamma^2(\ln n)^2} \sum_{r < j \leq (1-\varepsilon)h} \frac{1}{j(h-j)}. \end{aligned}$$

Заменяя суммирование интегрированием, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{r < j \leq (1-\varepsilon)h} \frac{1}{j(h-j)} &\sim \int_r^{(1-\varepsilon)h} \frac{dy}{y(h-y)} = \frac{1}{h} \left(\ln \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{h}{r} - 1 \right) \right) \\ &\sim \frac{1}{h} \ln \frac{n}{r} \sim \frac{\gamma \ln n}{hN}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{\varepsilon n \leq j \leq h} \mathbf{P}\{\tilde{\xi}_{L-1}^{(r)} = j\}\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_1^{(r)} = h - j\} \sim \frac{N(L-1)e^{-h/n}}{h\gamma \ln n}.$$

Используя найденные асимптотики обеих сумм из (11), получаем, что величина $N^{-1}e^{h/n}h\gamma(\ln n)\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_L^{(r)} = h\}$ может быть сделана сколь угодно близкой к L выбором достаточно малого ε и достаточно большого n . Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 6. Пусть выполнены условия зоны (f) и $N \rightarrow \infty$, $x = 1 - n^{-1}$, r выбрано так, что

$$\ln(n/r) \sim \gamma(\ln n)/N,$$

где γ — положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $l = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\xi}_l^{(r)} = n\} = \frac{Nle^{-1}}{n\gamma \ln n} (1 + o(1)).$$

Утверждение остается справедливым и при фиксированном N , если $\gamma < N$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)} = n\} &= \sum_{0 < j < \varepsilon n} \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} = j\} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_l^{(r)} = n - j\} \\ &+ \sum_{\varepsilon n \leq j \leq n} \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} = j\} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_l^{(r)} = n - j\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим первую сумму в этом равенстве. Поскольку $n - j \asymp n$ равномерно по $j \in (0; \varepsilon n)$, используя лемму 5, получаем, что

$$\mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_l^{(r)} = n - j\} = \frac{Nle^{(j-n)/n}}{(n-j)\gamma \ln n} (1 + o(1)).$$

Отсюда следует, что величина

$$(Nl)^{-1} e \gamma n (\ln n) \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_l^{(r)} = n - j\} \quad (13)$$

может быть сделана сколь угодно близкой к 1 выбором достаточно малого ε и достаточно большого n равномерно по $j \in (0; \varepsilon n)$. Используя неравенство Чебышева, нетрудно показать, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} \geq \varepsilon n\} \rightarrow 0.$$

Действительно,

$$m_r = \sum_{k=1}^r x^k / \sum_{k=1}^r x^k / k.$$

Из соотношений $N/\ln n \rightarrow 0$ и $\ln(n/r) \sim \gamma(\ln n)/N$ следует, как легко видеть, что $r = o(n)$, откуда следует, что $x^k \rightarrow 1$ при $k = \{1, \dots, r\}$. В то же время $\ln n - \ln r = o(\ln n)$ при $N \rightarrow \infty$, а при фиксированном N справедливо соотношение $(\ln r)/\ln n \sim 1 - \gamma/N$. В обоих случаях получаем, что $\ln r \asymp \ln n$. Таким образом,

$$m_r \sim \frac{r}{\ln r} \asymp \frac{r}{\ln n} = o(n).$$

Отсюда следует, что $\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} \geq \varepsilon n\} \rightarrow 0$ или $\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} < \varepsilon n\} \rightarrow 1$. Используя найденную оценку выражения (13), получаем, что величина

$$(Nl)^{-1} e \gamma n (\ln n) \sum_{0 < j < \varepsilon n} \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} = j\} \mathbf{P}\{\tilde{\zeta}_l^{(r)} = n - j\}$$

может быть сделана сколь угодно близкой к 1 выбором достаточно малого ε и достаточно большого n .

Перейдем к оценке второй суммы. Для этого воспользуемся тем, что, как следует из результатов статьи [4], $\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow 0$ при $r = o(n)$. Отсюда и из (3) следует, что

$$(1 - P_r)^N \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} / \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \rightarrow 0.$$

Нетрудно показать, что при выбранных x и r справедливо соотношение $NP_r \rightarrow \gamma$, поскольку

$$P_r = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{x^k}{k \ln n} \sim \frac{\ln(n/r)}{\ln n} \sim \frac{\gamma}{N}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} = n\} = o(\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}).$$

Заметим, что условия зоны (f) позволяют вместо n взять величину εn , а вместо N взять $N - l$. Приведенное выше соотношение при этом останется в силе. Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} = j\} = o(\mathbf{P}\{\zeta_N = n\})$$

при $\varepsilon n \leq j \leq n$. Отсюда следует, что вторая сумма в (12) бесконечно мала в сравнении с $\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}$. Из леммы 12 статьи [4] следует, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \sim Ne^{-1}/(n \ln n).$$

Поэтому вторая сумма в (12) бесконечно мала по сравнению с первой.

Отсюда получаем, что величина

$$(Nl)^{-1} \varepsilon \gamma n (\ln n) \mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)} = n\}$$

может быть сделана сколь угодно близкой к 1 выбором достаточно малого ε и достаточно большого n , откуда следует утверждение леммы.

Из доказанной леммы, используя упомянутые в ней соотношения

$$NP_r \rightarrow \gamma,$$

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} \sim (Ne^{-1})/(n \ln n),$$

а также формулу (3), соотношение (8) и то, что при выбранном r

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} \rightarrow 0,$$

получаем утверждение теоремы 6.

В зонах (b)–(d), как мы видели при доказательстве леммы 1, имеет место соотношение

$$r = o(\sigma \sqrt{N})$$

при выбранном r . Кроме того, в [7] показано, что если для суммы ζ_N выполняется интегральная сходимост к нормальному закону, то

$$\sigma \sqrt{N} = o(Nm).$$

Поскольку в зонах (b)–(d) $n = Nm$, получаем, что

$$r = o(n).$$

В зоне (e), как видно из теоремы 5, наибольшие циклы имеют порядок n .

Таким образом, в зонах (a)–(e) гигантский цикл не возникает. Напротив, в зоне (f), как видно из теоремы 6, второй по величине цикл имеет порядок $o(n)$. В статье [4] доказано, что

$$\eta_{(N)} \sim n$$

в этой зоне. Таким образом, мы можем утверждать, что гигантский цикл возникает только в зоне (f).

Список литературы

1. Колчин В. Ф., *Случайные графы*, Наука, Москва, 2000.
2. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
3. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
4. Павлов Ю. Л., Лосева Е. А., Предельные распределения максимального объема дерева в случайном рекурсивном лесе. *Дискретная математика* (2002) **14**, №1, 60–74.
5. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика*. Мир, Москва, 1998.
6. Чеплюкова И. А., Возникновение гигантского дерева в случайном лесе. *Дискретная математика* (1998) **10**, №1, 111–126.
7. Казимиров Н. И., О некоторых условиях отсутствия гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2002) **14**, №2, 107–118.
8. Колчин В. Ф., О существовании гигантской компоненты в схемах размещения частиц. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2000) **7**, №1, 112–113.

Статья поступила 08.04.2003.