Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, А. М. Шойтов, Структурная эквивалентность s -цепочек в случайных дискретных последовательностях, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 4, 7–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:37:21

Структурная эквивалентность s -цепочек в случайных дискретных последовательностях

© 2003 г. В. Г. Михайлов, А. М. Шойтов

В последние годы было опубликовано значительное число работ о структурных свойствах случайных дискретных последовательностей. В них была представлена большая группа результатов о структурно эквивалентных отрезках в таких последовательностях. Нами предлагается обзор постановок задач и полученных решений в этом интересном направлении дискретной теории вероятностей.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 02-01-00266, грантом НШ 1758.2003.1 Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, а также грантом МК 2831.2003.09 Президента Российской Федерации для поддержки научных исследований молодых ученых — кандидатов наук.

1. Введение

Пусть $(a_1, \dots, a_s)$, $(b_1, \dots, b_s)$ — цепочки букв некоторого конечного алфавита A . Под структурой цепочки мы понимаем расположение одинаковых и разных букв в ней. Другими словами, две цепочки $(a_1, \dots, a_s)$ и $(b_1, \dots, b_s)$ обладают одинаковой структурой в том и только том случае, когда

$$a_i = a_j \iff b_i = b_j, \quad 1 \leq i < j \leq s. \quad (1)$$

Это условие эквивалентно условию

$$a_i \neq a_j \iff b_i \neq b_j, \quad 1 \leq i < j \leq s. \quad (2)$$

Цепочки $(a_1, \dots, a_s)$ и $(b_1, \dots, b_s)$ называются эквивалентными, если существует такая подстановка h на множестве букв алфавита A , при которой

$$b_i = h(a_i), \quad i = 1, \dots, s.$$

Очевидно, что эквивалентными являются цепочки с одинаковой структурой и только они.

Существует понятие, относительно которого совпадение цепочек и совпадение лишь их структур являются частными случаями. Это понятие H -связанности или H -совпадения цепочек. Рассмотрим множество всех подстановок элементов алфавита A . Оно является группой относительно умножения подстановок и обозначается $S(A)$ или S_N , где $N = |A|$. Пусть H — некоторое подмножество множества $S(A)$.

Цепочки $(a_1, \dots, a_s)$ и $(b_1, \dots, b_s)$ назовем H -связанными (и будем говорить об H -совпадении этих цепочек и писать $(a_1, \dots, a_s)H(b_1, \dots, b_s)$), если

$$\exists h \in H: b_i = h(a_i), \quad i = 1, \dots, s. \quad (3)$$

Если множество подстановок H является подгруппой группы $S(A)$, то отношение, определяемое на множестве A^s соотношением (3), является отношением эквивалентности. В этом случае H -связанные цепочки принято называть H -эквивалентными (см. [2]).

Понятия эквивалентности и $S(A)$ -эквивалентности цепочек совпадают. При $H = \{e\}$ (то есть в случае, когда H — группа, состоящая из одной тождественной подстановки e) H -эквивалентность означает совпадение цепочек.

Если $H_1 \subseteq H_2 \subseteq S(A)$, то H_1 -связанные цепочки являются и H_2 -связанными. Отсюда следует, что H -связанные цепочки обладают одинаковой структурой.

Наличие в дискретной последовательности большого числа цепочек с одинаковой структурой заметно снижает ее сложность и позволяет добиваться большего сжатия данных при архивации (см., например, [11, 12, 58]). Важную роль при оценке эффективности процедуры сжатия играют величины $\xi_r(H)$, число r -кратных H -повторений s -цепочек в отрезке, и, если множество H является группой подстановок, величины $\mu_r(H)$, число классов H -эквивалентных s -цепочек, представители которых встретились в отрезке последовательности ровно r раз.

Типичная постановка задачи для $\xi_r(H)$ имеет следующий вид. Пусть

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_{n+s-1})$$

— отрезок последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в множестве $A = \{1, 2, \dots, N\}$ с вероятностями $p_1, \dots, p_N$ соответственно. Введем обозначения

$$\begin{aligned} E_{ij}(h) &= \{(h(X_i), \dots, h(X_{i+s-1})) = (X_j, \dots, X_{j+s-1})\}, \\ E_{ij}(H) &= \{(X_i, \dots, X_{i+s-1})H(X_j, \dots, X_{j+s-1})\} = \bigcup_{h \in H} E_{ij}(h). \end{aligned}$$

Каждой паре (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$, сопоставим случайную величину

$$W_{ij}(H) = I(E_{ij}(H))$$

(здесь и далее выражение $I(\cdot)$ обозначает индикатор случайного события или неслучайного множества, указанного в скобках). Тогда число r -кратных наборов H -связанных s -цепочек среди n первых s -цепочек последовательности X выразится формулой

$$\xi_r(H) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} W_{i_1, i_2}(H) \dots W_{i_{r-1}, i_r}(H).$$

Выписать распределение случайной величины $\xi_r(H)$ в сколь-либо общем случае представляется нереальным. Поэтому основное внимание исследователей было привлечено к нахождению предельных распределений случайных величин $\xi_r(H)$ при $n \rightarrow \infty$ и согласованно с n меняющихся параметрах s и $p_1, \dots, p_N$.

Полученные результаты об асимптотических свойствах случайных величин $\xi_r(H)$ и $\mu_r(H)$ можно условно разделить на три группы. Первую группу образуют предельные теоремы для $\xi_r(H)$ при малых множествах H . Теоремы пуассоновского типа в данном

случае являются непосредственными обобщениями аналогичных предельных теорем для числа повторений s -цепочек в последовательности независимых испытаний, полученных А. М. Зубковым и В. Г. Михайловым [15] еще в 1974 году. Здесь в качестве H выступают одноточечные множества и группы типа латинского прямоугольника. Сюда же относится ситуация, когда при переходе к пределу алфавит и распределение букв остаются фиксированными. В последнем случае возможно любопытное явление, названное редукцией, когда значения $\xi_r(H)$ (здесь множество H — группа) в пределе совпадают с величиной $\xi_r(H_\Phi)$, где подгруппа H_Φ группы H может быть много меньше H и даже состоять из одного элемента. В случае фиксированного распределения букв были описаны и условия сходимости распределения $\xi_r(H)$ к нормальному распределению и к распределению типа хи-квадрат. Изложению этих результатов посвящен раздел 2.

Вторую группу составляют предельные теоремы пуассоновского типа для случайных величин $\xi_r(H)$ при больших множествах H . Все они являются, в конечном счете, обобщениями полученной С. М. Буравлевым в девяностые годы предельной теоремы Пуассона для числа пар цепочек с одинаковой структурой в последовательности независимых равновероятных знаков. Работа [9], посвященная доказательству этой теоремы, по сути дела дала старт разработке данного научного направления. Любопытной особенностью поведения случайных величин $\xi_r(H)$ при больших множествах H является возможная сильная зависимость $\xi_r(H_1)$ и $\xi_r(H_2)$ даже при непересекающихся множествах H_1 и H_2 . Изложению этих результатов посвящен третий раздел обзора.

Третью группу составляют результаты, полученные путем сведения задачи об H -эквивалентных цепочках к задачам о конечно-зависимых размещениях частиц по ячейкам. Частным случаем последней является задача о числе $\mu_r(H)$ классов H -эквивалентных s -цепочек, представители которых встретились в отрезке последовательности ровно r раз. Эти результаты изложены в разделе 4.

Ряд результатов, приведенных в обзоре, не укладывается в эту условную схему. Это задачи об H -связанных цепочках из двух или более последовательностей и вопросы об иных формах эквивалентности цепочек. Им посвящены разделы 5 и 6 соответственно.

Следует заметить, что обзор содержит ряд новых результатов, доказательства которых будут опубликованы в ближайшее время.

2. Предельные теоремы при малых множествах H

Изложение результатов о H -эквивалентных и H -связанных цепочках мы начнем с предельной теоремы для числа пар одинаковых цепочек (в наших обозначениях это $\xi_2(H)$ при $H = \{e\}$) в последовательности независимых испытаний, доказанной А. М. Зубковым и В. Г. Михайловым в 1974 году [15]. Эта теорема оказала заметное влияние на первоначальное развитие данного научного направления.

Введем обозначения. Пусть $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ — отрезок последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения из алфавита $A = \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\mathbf{P}\{X_i = k\} = p_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mathcal{P} = (p_1, \dots, p_N), \quad p = \max_{1 \leq k \leq N} p_k.$$

$$P = np^s, \quad \sum_{k=1}^N p_k^r = P_r, \quad r = 2, 3, \dots$$

Здесь s — длина рассматриваемых цепочек.

Теорема 1 ([15]). Пусть $n \rightarrow \infty$, а параметры s , N и вероятности $p_1, \dots, p_N$ меняются так, что

$$\binom{n}{2}(1 - P_2)P_2^s \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (4)$$

$$P_2 \rightarrow \rho \in [0, 1), \quad s^t n p^s \rightarrow 0 \quad (5)$$

для любого фиксированного неотрицательного t .

Тогда распределение случайной величины $\xi_2(\{e\})$ сходится к сложному пуассоновскому распределению с производящей функцией

$$\varphi_{\lambda, \rho}(z) = \exp \left\{ \frac{\lambda(z - 1)}{1 - \rho z} \right\}.$$

Замечание 1. Если $\rho > 0$, то при переходе к пределу совпадения цепочек образуют группы, образование такой группы представляет собой редкое событие, их число имеет в пределе пуассоновское распределение. Количество пар совпавших цепочек в такой группе имеет в пределе геометрическое распределение. Производящая функция $\varphi_{\lambda, \rho}(z)$ отвечает распределению суммы пуассоновского с параметром λ числа независимых случайных величин, каждая из которых имеет геометрическое распределение с параметром ρ . При $\rho = 0$ предельное распределение в теореме 15 оказывается просто пуассоновским.

Этот результат неоднократно обобщался и уточнялся. В [21] он был перенесен на случайные величины $\xi_r = \xi_r(\{e\})$, в [17] была получена оценка скорости сходимости в этой предельной теореме. Современные методы позволяют заменить условие $s^t n p^s \rightarrow 0$ на более слабое условие $s n p^s \rightarrow 0$.

Обращаясь к доказательствам теорем в [15, 21], нетрудно убедиться, что утверждение теоремы 1 справедливо не только для $\xi_2(\{e\})$, но и при любом одноточечном множестве H и любых $r \geq 2$. При этом формулировка теоремы практически не меняется.

Пусть

$$P_r(h) = \sum_{k=1}^N p_k p_{h(k)} \dots p_{h^{r-1}(k)},$$

где h — некоторая подстановка на алфавите A , $h^m(k) = h(h^{m-1}(k))$, $m = 2, \dots, r - 1$.

Теорема 2. Пусть $n \rightarrow \infty$, h — некоторая подстановка на алфавите A , $r \geq 2$ — заданное натуральное число, а параметры s , N и вероятности $p_1, \dots, p_N$ меняются так, что

$$\binom{n}{r}(1 - P_r(h))P_r^s(h) \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (6)$$

$$P_r(h) \rightarrow \delta \in [0, 1), \quad s^t n p^s \rightarrow 0$$

для любого фиксированного неотрицательного t .

Тогда распределение случайной величины $\xi_r(\{h\})$ сходится к сложному пуассоновскому распределению с производящей функцией $\varphi_{\lambda, \delta}(z)$.

В работах [6–10, 38] исследовалось число $\xi_2(H)$ пар H -эквивалентных s -цепочек в случае, когда множество H является набором $\{h_1, \dots, h_k\}$ из k подстановок, для которых строки $(h_i(1), \dots, h_i(N))$, $i = 1, \dots, k$ (будучи выписаны одна под другой) образуют латинский прямоугольник. В этом случае H является группой подстановок, которую называют группой типа латинского прямоугольника или просто латинским прямоугольником.

Из теоремы 2 работы [10] вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $n \rightarrow \infty$, а параметры $k, s, N, p_1, \dots, p_N$ и множество H меняются так, что нижние строки подстановок из H образуют латинский прямоугольник, $s^q n p^s \rightarrow 0$ для любого фиксированного неотрицательного q , $p \leq c < 1$, $p^2 \leq P_2(h_t)$, $t = 1, \dots, m$, $P_2(h_t) \rightarrow \delta_t \in [0, 1)$ равномерно по $t = 1, \dots, k$, подстановки в множестве H упорядочены так, что $\delta = \delta_1 = \dots = \delta_m > \delta_{m+1} \geq \dots \geq \delta_k$ при некотором $1 \leq m \leq k$ и

$$\binom{n}{2} (P(h_t))^s (1 - P(h_t)) \rightarrow \lambda_t, \quad 0 < \lambda_t < \infty, \quad 1 \leq t \leq k.$$

Тогда для любых фиксированных $z < \delta^{-1}$ и $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E} z^{\xi_2(H)} = \prod_{t=1}^m \exp \left\{ \frac{\lambda_t(z-1)}{1-\delta z} \right\} (1 + o(1)).$$

Теорема 3 дает пример ситуации, в которой влияние на предельное распределение может оказывать лишь часть группы H . Это явление мы будем называть редукцией статистики $\xi_2(H)$. Более подробно оно было изучено А. М. Шойтовым в постановке, когда при переходе к пределу алфавит и распределение букв на нем остаются неизменными. Им доказано, что при определенных условиях предельное распределение $\xi_r(H)$ определяется не самой группой H , а ее подгруппой

$$H_\Phi = \{h \in H: p_a = p_{h(a)}, a = 1, \dots, N\},$$

и указаны достаточные условия сходимости к сложному пуассоновскому распределению такому, как и в теореме 1. Статья с изложением этих результатов сдана в печать.

Теорема 4. Пусть параметры N и r и вероятности $p_a > 0$, $a = 1, \dots, N$, фиксированы, а параметры n и s стремятся к бесконечности так, что

$$nP_r^{s/r} = O(1).$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_r(H) = \xi_r(H_\Phi)\} = 1.$$

Особый интерес теорема 4 представляет в случае, когда $H_\Phi = \{e\}$. Он имеет место, например, если все вероятности $p_1, \dots, p_N$ различны. Тогда из теорем 4 и 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть группа H и распределение Φ таковы, что $H_\Phi = \{e\}$, $r \geq 2$ — заданное натуральное число, а параметры s, n стремятся к бесконечности так, что

$$\binom{n}{r} (1 - P_r) P_r^s \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

и выполнено условие (5).

Тогда распределение случайной величины $\xi_r(H)$ сходится к сложному пуассоновскому распределению с производящей функцией $\varphi_{\lambda, r}(z)$.

Теорема 5. Пусть параметры N, r и вероятности $p_a > 0$, $a = 1, \dots, N$, фиксированы, а параметры n и s стремятся к бесконечности так, что

$$\binom{n}{r} P_r^s (1 - P_r) |H_\Phi|^{r-1} \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (7)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} z^{\xi_r(H)} = \exp \left\{ \frac{\lambda(z-1)}{1 - P_r z} \right\}.$$

Замечание 2. Оценки скорости сходимости в теореме 5 были приведены в [41].

Интересным является случай $p_1 = \dots = p_N = 1/N$. Из теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть схема равновероятна, то есть $p_i = 1/N$, $i = 1, \dots, N$, причем N , r фиксированы, а параметры n и s стремятся к бесконечности так, что

$$(1 - N^{-1}) \binom{n}{r} \left(\frac{|H|}{N^s} \right)^{r-1} \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Тогда

$$\mathbf{E} z^{\xi_r(H)} \rightarrow \exp \left\{ \frac{\lambda(z-1)}{1 - N^{1-r} z} \right\}.$$

Для случая $r = 2$ этот результат был получен А. М. Шойтовым в [36].

Очевидно, что при любом множестве H выполнено неравенство

$$\xi_2(H) \leq \sum_{h \in H} \xi_2(\{h\}).$$

Из теоремы 5 можно вывести следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть параметры N , r и вероятности $p_a > 0$, $a = 1, \dots, N$, фиксированы, а параметры n и s стремятся к бесконечности так, что

$$n^r P_r^s = O(1).$$

Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \xi_2(H) = \sum_{h \in H_\Phi} \xi_2(\{h\}) \right\} \rightarrow 1. \quad (8)$$

Замечание 3. Соотношение (8) не связано с видом предельного распределения в теореме 5, а объясняется тем, что в рассматриваемой ситуации H -связанные цепочки достаточно длинны и каждая из них наверняка содержит все N знаков алфавита. Поэтому любая пара H -связанных цепочек однозначно определяет связывающую подстановку $h \in H$.

Наряду с пуассоновским распределением в качестве предельного может выступать и нормальное распределение. В частности, это имеет место в постановке теоремы 5, если вместо (7) предположить, что $n^r (P_r)^s \rightarrow \infty$ достаточно медленно. Один такой вариант достаточных условий асимптотической нормальности был предложен А. М. Шойтовым.

Далее был изучен случай, когда при переходе к пределу неизменными остаются не только алфавит и распределение букв, но и длина рассматриваемых цепочек. Здесь можно воспользоваться тем, что задача о числе пар H -эквивалентных цепочек является частным случаем задачи о повторениях в последовательности конечно-зависимых случайных величин. Аналогичный подход в задаче о повторениях цепочек (то есть при $H = \{e\}$) был использован в работах [22, 23].

Любое отношение эквивалентности ϕ на множестве A^s слов длины s над конечным алфавитом A (s -цепочек) может быть выражено с помощью некоторой функции $F_\phi: A^s \rightarrow Q$, где Q — конечное множество, представляющее некоторой своей частью совокупность классов эквивалентности отношения ϕ . Цепочки $(a_1, \dots, a_s), (b_1, \dots, b_s) \in A^s$ будут эквивалентными тогда и только тогда, когда

$$F_\phi(a_1, \dots, a_s) = F_\phi(b_1, \dots, b_s). \quad (9)$$

Функция F_ϕ и множество Q могут быть выбраны разными способами, лишь бы для эквивалентных цепочек (и только для них) выполнялось соотношение (9).

Эта интерпретация позволяет свести задачу об H -эквивалентных цепочках в последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots$ к задаче о повторениях для $(s-1)$ -зависимых случайных величин

$$Y_i = F(X_i, \dots, X_{i+s-1})$$

при специально подобранной функции F .

В [38] было рассмотрено асимптотическое поведение числа наборов по r попарно H -эквивалентных цепочек в ситуации, когда растет лишь длина последовательности, в которой наблюдаются цепочки. Оказалось, что в этом случае в качестве предельного распределения для $\xi_r(H)$ могут выступать только нормальное распределение и распределение типа хи-квадрат, причем тип предельного распределения определяется значениями вероятностей классов H -эквивалентности.

Пусть $M_s[H]$ — множество классов H -эквивалентности множества A^s , класс эквивалентности с представителем $\bar{a}$ будем обозначать $K(\bar{a})$. Для любого класса K из $M_s[H]$ положим

$$p(K) = \mathbf{P}((X_1, \dots, X_s) \in K)$$

и определим множество

$$N_\Phi(H) = \{s \in \{2, 3, \dots\} : p(K) = |M_s[H]|^{-1}, \forall K \in M_s[H]\}$$

натуральных чисел $s \geq 2$, для которых все классы H -эквивалентных s -цепочек имеют одинаковые вероятности. В [40] установлено, что $\xi_r(H)$ имеет в пределе нормальное распределение для всех $s \notin N_\Phi(H)$ и распределение типа хи-квадрат для всех $s \in N_\Phi(H)$. В частности, справедливы две следующие теоремы.

Пусть

$$\begin{aligned} \pi_s^{(r)}(H, \Phi) &= \sum_{K \in M_s[H]} p^r(K), \\ \Pi_{s,k}^{(r)}(H, \Phi) &= \sum_{(a_1, \dots, a_{s+k}) \in A^{k+s}} p_{a_1} \dots p_{a_{k+s}} p^{r-1}(K(a_1, \dots, a_s)) \\ &\quad \times p^{r-1}(K(a_{1+k}, \dots, a_{s+k})), \quad k = 0, 1, \dots, s-1, \\ \Pi_s^{(r)}(H, \Phi) &= 2 \sum_{k=1}^{s-1} \Pi_{s,k}^{(r)}(H, \Phi) + \Pi_{s,0}^{(r)}(H, \Phi) - (2s-1)(\pi_s^{(r)}(H, \Phi))^2. \end{aligned}$$

Теорема 6. Если $s \notin N_\Phi(H)$, то при $n \rightarrow \infty$ распределение случайной величины

$$(\Pi_s^{(r)}(H, \Phi))^{-1/2} (r-1)! n^{1/2-r} \left(\xi_r(H) - \binom{n}{r} \pi_s^{(r)}(H, \Phi) \right)$$

сходится к стандартному нормальному закону.

В [40] также получены условия равновероятности классов H -эквивалентности. В частности, если $p_a \neq 1/N$ для некоторого a из A или H не является группой типа латинского прямоугольника, то множество $N_\Phi(H)$ содержит конечное множество натуральных чисел, причем если выполнено ровно одно из приведенных условий, то $N_\Phi(H) = \emptyset$. Отметим, что если выполнены сразу оба приведенные выше условия, то для $H = S_N$ всегда можно подобрать вектор вероятностей $\mathcal{P}$ так, что по крайней мере $2 \in N_\Phi(H)$. Если же $p_a = 1/N$ для всех a из A и H — группа типа латинского прямоугольника, то $N_\Phi(H)$ состоит из всех натуральных чисел $s \geq 2$, в этом случае $\xi_r(H)$ имеет в пределе распределение типа хи-квадрат для всех $s \in N_\Phi(H)$, вид этого распределения приведен в следующей теореме.

Пусть

$$\xi'_r(H) = (N^s |H|)^{r-1} \xi_r(H), \quad \Delta_m z_m = z_m - z_{m-1}, \quad \Delta_m^2 z_m = z_m - 2z_{m-1} + z_{m-2}.$$

Теорема 7. Если $p_a = 1/N$ для всех a из A и H — группа типа латинского прямоугольника, то

- при $n \rightarrow \infty$ случайные величины $2(r-2)! n^{1-r} \Delta_s^2 \xi'_r(H) + N^{s-2}(N-1)^2/|H|$, $s \geq 3$, асимптотически независимы и распределены по закону хи-квадрат с числом степеней свободы $N^{s-2}(N-1)^2/|H|$;
- при $n \rightarrow \infty$ случайные величины $2(r-2)! n^{1-r} \Delta_s \xi'_r(H) + N^{s-1}(N-1)/|H|$, $s \geq 2$, асимптотически распределены по закону хи-квадрат с $N^{s-1}(N-1)/|H|$ степенями свободы;
- если $|H| \geq 2$ и $s = 2$, то при $n \rightarrow \infty$ случайная величина $2(r-2)! n^{1-r} \xi'_r(H) - 2n/(r(r-1)) + N^2/|H|$ в пределе распределена как сумма $Z_1^2 + (1 - 3(|H|/N)^2)Z_2^2 + (1 + 2|H|/N - 3(|H|/N)^2)Z_3^2$, где случайные величины Z_1^2 , Z_2^2 и Z_3^2 независимы и распределены по закону хи-квадрат с $(N/|H|)^2(|H|-1)$, $(N/|H|)^2 - N/|H|$ и $N/|H|$ степенями свободы соответственно.

Здесь следует обратить внимание на то, что для группы типа латинского прямоугольника величина $|H|$ делит N нацело.

3. Предельные теоремы при больших множествах H

Первый результат здесь был анонсирован С. М. Буравлевым в 1995 г. в тезисах [4] и касался асимптотических свойств числа $\xi_2(S_N)$ пар эквивалентных (то есть имеющих одинаковую структуру) s -цепочек в отрезке $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ рассматриваемой случайной последовательности. Этот результат положил начало исследованиям случайных величин $\xi_r(H)$ для нетривиальных групп подстановок H .

Теорема 8 ([4, 9]). Пусть случайные величины X_i , $i = 1, \dots, n + s - 1$, независимы в совокупности, распределены на множестве A равномерно и

$$sN^{-1} \geq \ln N + 1.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\lambda(s, n) = \frac{\binom{n}{2}}{N^{2s}} \sum_{m=1}^N \sigma(s, m) ((N)_m)^2 < \binom{n}{2} \frac{N!}{N^s},$$

где $\sigma(s, m)$ — числа Стирлинга второго рода; если $n, N, s \rightarrow \infty$ так, что $\lambda(s, n) \rightarrow \lambda > 0$, то

$$\mathbf{P}\{\xi_2(S_N) = k\} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

при этом, если $sN^{-1} - \ln N \rightarrow \infty$, то

$$\lambda(s, n) = \binom{n}{2} N! N^{-s} (1 + o(1)).$$

Подробное доказательство теоремы 8 приведено в [9], где были также получены вытекающие из нее предельные теоремы для случайных величин

$$\tau(s) = \min\{n: \xi_2(S_N) > 0\}, \quad \theta(n) = \max\{s: \xi_2(S_N) > 0\}.$$

В качестве предельных в них выступают те же самые распределения, что и в задаче о повторениях s -цепочек.

За последние годы было предпринято немало попыток обобщения теоремы 8 и ослабления ее условий. На этом пути были получены все приводимые ниже результаты этого раздела.

Естественным направлением исследований стало распространение теоремы 8 на другие группы. Это удалось сделать А. М. Шойтову в [36], где в качестве множества подстановок H была взята произвольная подгруппа симметрической группы S_N . Основной результат, приведенный в [36], может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 9. Пусть схема равновероятна: $p_i = 1/N$, $i = 1, \dots, N$, а параметры n , N и s стремятся к бесконечности так, что

$$sN^{-1} \geq \ln N + 1, \quad \mathbf{E}\xi_2(H) \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (10)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_2(H) = m\} \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Много сил было приложено к ослаблению условия $sN^{-1} \geq \ln N + 1$. Это условие приводит к тому, что s -цепочка случайно и равновероятно выбранных знаков N -буквенного алфавита с гарантированной вероятностью содержит все буквы алфавита. Данное свойство значительно упрощает рассуждения. Лишь совсем недавно В. Г. Михайлову удалось заменить его в теореме для $\xi_2(S_N)$ более слабым условием $sN^{-1} - (1/4) \ln N \rightarrow \infty$. Статья с доказательством этого результата готовится к печати.

Специальное исследование было посвящено применению при доказательстве предельной теоремы Пуассона для случайных величин $\xi_r(H)$ различных вариантов метода Чена–Стейна (см. [46], а также [26, 27]). В работе А. М. Шойтова [40] был рассмотрен случай произвольного натурального $r \geq 2$ и были построены оценки для расстояния по вариации между распределением случайной величины $\xi_r(H)$ и специально подобранным распределением Пуассона.

Расстояние по вариации между распределениями F и G обозначим через $\rho(F, G)$. Для распределений, сосредоточенных на $\{0, 1, \dots\}$, оно выражается формулой

$$\rho(F, G) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |F\{k\} - G\{k\}|.$$

Пусть

$$(A)_s = \{(a_1, \dots, a_s) \in A^s : a_i \neq a_j, \text{ если } (i \neq j)\}.$$

Обозначим через $M_s(H)$ множество классов H -эквивалентности на множестве A^s . Положим

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \binom{n}{r} \frac{1}{N^{rs}} \sum_{m=1}^N \sigma(s, m) \sum_{x \in M_m(H)} |x|^s, \\ (H) &= \frac{|H|}{N^s}, \quad \lambda(r) = \binom{n}{r} \Delta(H)^{r-1}, \\ \psi &= (2s)^{r-1} n \Delta(H) e^{n \Delta(H)/s}, \quad \Psi = (4s)^{2r-1} n \Delta(H) e^{n \Delta(H)}. \end{aligned}$$

Теорема 10. Пусть случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_{n+s-1}$ распределены на множестве $\{1, \dots, N\}$ равномерно. Если выполнено условие

$$sN^{-1} \geq \ln N + 1,$$

то $\lambda_r < \lambda(r)$, а расстояние по вариации между распределением случайной величины $\xi_r(H)$ и распределением Пуассона с параметром λ_r не превосходит

$$\begin{aligned} &(\Psi + \lambda_r(3\psi + (2s)^r(n\Delta(H))^{r-1}) + 12\lambda(r)N^{-1}) \\ &\quad \times (\lambda_r^{-1}(1 - e^{-\lambda_r}) + \psi \min\{1, (\min\{\lambda_r, |\lambda_r - \psi|\})^{-2}\}). \end{aligned}$$

Из этого утверждения вытекает следующая теорема.

Теорема 11. Пусть случайные величины X_t , $t = 1, \dots, n + s - 1$, распределены на $\{1, \dots, N\}$ равномерно и параметры $n, s \rightarrow \infty$ так, что

$$sN^{-1} - \ln N \rightarrow \infty, \quad (4s)^{2r-1} n \Delta(H) \rightarrow 0$$

и существует конечный или бесконечный предел $\lambda = \lim \lambda_r$.

Если $\lambda < \infty$, то распределение случайной величины $\xi_r(H)$ сходится к закону Пуассона с параметром λ .

Если $\lambda(r)N^{-1} \rightarrow 0$ и $\lambda = \infty$, то распределение случайной величины $(\xi_r(H) - \lambda_r)\lambda_r^{-1/2}$ сходится к стандартному нормальному закону.

Первая попытка перенесения теоремы 8 на случай неравновероятной последовательности X_t была предпринята в [9]. Теорема 3 этой работы описывает достаточные условия выполнения предельной теоремы Пуассона для $\xi_2(S_N)$ в ситуации, когда

$$(N \max_k \mathbf{P}\{X_t = k\})^s \rightarrow 1.$$

Для полиномиальных последовательностей, существенно отличных от равновероятной, условия асимптотической пуассоновости случайной величины $\xi_2(S_N)$ указаны в приводимой ниже теореме 13. Они естественным образом переносятся на величины $\xi_2(H)$ с произвольным множеством H . В этом случае множитель $N!$ в условии (17) теоремы 13 заменяется на $|H|$.

Исследования в этом направлении велись также в рамках задачи о H -связанных цепочках в паре последовательностей (см. раздел 5).

Укажем одно любопытное свойство, которым обладают случайные величины $\xi_r(H)$ при многих больших множествах H . Для таких множеств наблюдается сильная взаимная зависимость (вплоть до совпадения) случайных величин $\xi_r(H_1)$ и $\xi_r(H_2)$ даже при непересекающихся множествах H_1 и H_2 .

Нам понадобится понятие m -транзитивного множества подстановок, которое вполне аналогично понятию m -транзитивной группы. Множество H назовем m -транзитивным, если для любых двух наборов $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_m$ из попарно различных элементов множества A найдется подстановка $h \in H$, для которой $y_i = h(x_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Из этого определения следует, что для любого $(N - r)$ -транзитивного множества H все S_N -эквивалентные цепочки, содержащие не более $N - r$ различных букв, H -связаны.

Последнее свойство приводит к следующему интересному явлению в случайных последовательностях знаков алфавита A .

Пусть, как и раньше, $\xi_2(H)$ обозначает число пар H -связанных цепочек в последовательности знаков $X_1, \dots, X_{n+s-1}$, выбранных случайно и независимо из алфавита A . При определенных условиях для подавляющего большинства пар S_N -эквивалентных цепочек в цепочках присутствуют не все буквы алфавита. Поэтому числа $\xi_2(H)$ для любых $(N - r)$ -транзитивных множеств H с малыми значениями параметра r приблизительно одинаковы и близки к $\xi_2(S_N)$. А именно, при определенном способе согласованном изменении параметров n и s , объема N алфавита, распределения случайных величин X_i и изменении самого множества H имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi_2(H) = \xi_2(S_N)\} \rightarrow 1. \quad (11)$$

При этом множество H может существенно отличаться от множества всех подстановок S_N . Например, при определенных условиях

$$\mathbf{P}\{\xi_2(A_N) = \xi_2(S_N \setminus A_N) = \xi_2(S_N)\} \rightarrow 1 \quad (12)$$

(A_N и $S_N \setminus A_N$ — множества четных и нечетных подстановок соответственно).

Если же в подавляющем большинстве S_N -эквивалентных пар цепочки содержат все буквы алфавита, то для любого подмножества $H \subset S_N$ (опять речь идет о согласованном изменении параметров, распределения и множества H)

$$\mathbf{P}\{\xi_2(H) + \xi_2(S_N \setminus H) = \xi_2(S_N)\} \rightarrow 1. \quad (13)$$

В частности,

$$\mathbf{P}\{\xi_2(A_N) + \xi_2(S_N \setminus A_N) = \xi_2(S_N)\} \rightarrow 1. \quad (14)$$

Несомненный интерес представляет поведение совместного распределения случайных величин $\xi_2(S_N)$, $\xi_2(H)$ и $\xi_2(S_N \setminus H)$ в промежуточной ситуации, когда пары S_N -эквивалентных цепочек, содержащих как все, так и не все буквы алфавита каждая, встречаются в последовательности X_i в существенном количестве.

Определим величины

$$\lambda_r(H) = \binom{n - 2s + 1}{2} \mathbf{P}\{E_{1,2s+1}(H) \cap \{|\{X_1, \dots, X_s\}| = N - r\}\},$$

$$\Lambda_{-1}(H) = 0, \quad \Lambda_r(H) = \lambda_0(H) + \dots + \lambda_r(H), \quad r = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Теорема 12. Пусть $n \rightarrow \infty$, $s \leq n/2$, параметры N , s , $p_1, \dots, p_N$ и множество $H \subseteq S_N$ меняются так, что

$$s|H|P \rightarrow 0.$$

Если при этом

$$\Lambda_{N-1}(H) - \Lambda_1(H) \rightarrow 0,$$

то для любого $H' \subset H$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi_2(H') + \xi_2(H \setminus H') = \xi_2(H)\} \rightarrow 1. \quad (15)$$

Если же $H' \subseteq H \subseteq S_N$ является $(N-r)$ -транзитивным для некоторого фиксированного натурального числа r и

$$\Lambda_{r-1}(H) \rightarrow 0,$$

то

$$\mathbf{P}\{\xi_2(H') = \xi_2(H)\} \rightarrow 1. \quad (16)$$

Здесь следует заметить, что

$$\mathbf{P}\{\xi_2(H') + \xi_2(H \setminus H') \geq \xi_2(H)\} = 1.$$

В случае $H = S_N$, $H' = A_N$ теорема 12 принимает следующий вид.

Следствие 4. Пусть $n \rightarrow \infty$, $s \leq n/2$, а параметры N и s меняются так, что выполнено условие

$$snN!N^{-s} \rightarrow 0.$$

Если при этом

$$\Lambda_{N-1}(S_N) - \Lambda_1(S_N) \rightarrow 0,$$

то

$$\mathbf{P}\{\xi_2(A_N) + \xi_2(S_N \setminus A_N) = \xi_2(S_N)\} \rightarrow 1.$$

Если же

$$\Lambda_1(S_N) \rightarrow 0,$$

то

$$\mathbf{P}\{\xi_2(A_N) = \xi_2(S_N \setminus A_N) = \xi_2(S_N)\} \rightarrow 1.$$

Это утверждение можно дополнить теоремой, описывающей поведение суммы $\xi_2(A_N) + \xi_2(S_N \setminus A_N)$. Положим

$$D_0 = \mathbf{P}\{E_{1,2s+1}(H)\},$$

$$D_k = \mathbf{P}\{E_{1,2s+1}(H)E_{1+k,2s+k+1}(H)\}, \quad k = 1, \dots, s-1,$$

$$D = D_1 + \dots + D_{s-1}.$$

Заметим, что

$$\Lambda_{N-1}(H) = \binom{n-2s+1}{2} D_0.$$

Теорема 13. Пусть $n \rightarrow \infty$, $s \leq n/2$, $H = S_N$, параметры N , s , $p_1, \dots, p_N$ меняются так, что выполнено условие

$$n^2(D + sN!PD_0) \rightarrow 0. \quad (17)$$

Тогда распределение случайного вектора $(\xi_2(S_N), \xi_2(A_N) + \xi_2(S_N \setminus A_N))$ сближается (в смысле сходимости к нулю расстояния по вариации) с распределением случайного вектора $(\pi_1 + \pi_2, \pi_1 + 2\pi_2)$, где π_1 и π_2 — независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметрами $\Lambda_1(S_N)$ и $\Lambda_{N-1}(S_N) - \Lambda_1(S_N)$ соответственно.

Для равновероятной последовательности можно указать явные выражения для параметров предельного распределения в этом утверждении.

Теорема 14. Пусть случайные величины X_t , $t = 1, \dots, n + s - 1$, распределены на алфавите A равновероятно: $p_k = 1/N$, $k \in A$, а параметры N , s , n меняются так, что $n \rightarrow \infty$, $s \leq n/2$ и выполнены условия

$$\frac{n^2 N!}{2N^s} \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad Ne^{-s/N} \rightarrow \gamma, \quad 0 < \gamma < \infty.$$

Тогда выполнено заключение теоремы 13, причем

$$\Lambda_{N-1}(S_N) \rightarrow \lambda \psi(\gamma) e^{-\gamma}, \quad \Lambda_1(S_N) \rightarrow \lambda(1 + \gamma) e^{-\gamma},$$

где

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^2}.$$

4. Схема размещения на классах эквивалентности

В этом разделе рассматривается класс разделимых статистик, определенных на классах H -эквивалентных цепочек. В этот класс входят, например, величины $\xi_r(H)$ и $\mu_r(H)$. Ниже приведены формулы, выражающие разделимые статистики через статистики $\xi_r(H)$ и родственные им величины, а также результаты о предельном поведении величин $\xi_r(H)$ и $\mu_r(H)$, полученные как следствия аналогичных свойств схем конечно-зависимого размещения частиц по ячейкам.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных на $\{1, \dots, N\}$ случайных величин. Пусть H — некоторая группа подстановок на множестве $\{1, \dots, N\}$.

Отношение H -эквивалентности индуцирует разбиение множества $\{1, \dots, N\}^s$ на классы эквивалентных цепочек

$$\{1, \dots, N\}^s = K_1 \cup \dots \cup K_{|M_s(H)|}, \quad (18)$$

где $|M_s(H)|$ — число классов эквивалентности.

Пусть

$$v_i(H) = \sum_{j=1}^n I\{(X_j, \dots, X_{j+s-1}) \in K_i\}, \quad i = 1, \dots, |M_s(H)|. \quad (19)$$

Величина $v_i(H)$ — это число цепочек в последовательности $X_1, \dots, X_{n+s-1}$, принадлежащих классу K_i

Будем считать, что j -я s -цепочка $(X_j, \dots, X_{j+s-1})$ помещается в ячейку K_i , если $(X_j, \dots, X_{j+s-1}) \in K_i$. Определим разделимую статистику формулой

$$L = \sum_{i=1}^{|M_s(H)|} f_i(v_i(H)), \quad (20)$$

где $f_1(v), \dots, f_{|M_s(H)|}(v)$ — набор функций целочисленного аргумента, удовлетворяющих условию $f_i(0) = 0, i = 1, \dots, |M_s(H)|$. Определение (20) аналогично традиционному определению разделимой статистики на частотах цепочек (см., например, [25]) и совпадает с ним при $H = \{e\}$.

Напомним, что понятие разделимой статистики было введено Ю. И. Медведевым в [20]. О свойствах разделимых статистик в равновероятной и полиномиальной схемах размещения см. [3].

В [25] был предложен эффективный метод исследования разделимых статистик на частотах цепочек. Результаты, полученные в [25] с помощью этого метода, были успешно использованы для описания условий асимптотической нормальности статистик $\mu_r(\{e\})$ (см. [33, 35, 59]). Некоторые фрагменты рассуждений работы [25] очевидным образом распространяются на наш случай.

По аналогии с событиями $E_{i,j}(H)$ введем события

$$E_{i_1, \dots, i_r}(H) = \{\exists h_2, \dots, h_r \in H : h_{1+k}(x_{i_1+j}) = x_{i_k+j}, j = 0, 1, \dots, s-1\}.$$

Очевидно, что

$$E_{i_1, \dots, i_r}(H) = E_{i_1, i_2}(H) \dots E_{i_{r-1}, i_r}(H) = \bigcap_{1 \leq k < l \leq r} E_{i_k, i_l}(H).$$

Кроме этого, положим

$$E_{i_1, \dots, i_r}(j, H) = E_{i_1, \dots, i_r}(H) \{(X_{i_1}, \dots, X_{i_1+s-1}) \in K_j\}.$$

Используя принцип включения–исключения, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 15. Разделимая статистика L , определенная формулой (20), представляется в виде

$$L = \sum_{r=1}^n \zeta_r(H),$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_r(H) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{j=1}^{|M_s(H)|} C_j(r) I\{E_{i_1, \dots, i_r}(j, H)\}, \\ C_j(r) &= \sum_{l=1}^r (-1)^{r-l} \binom{r}{l} f_j(l). \end{aligned} \quad (21)$$

Из теоремы 15 следует, что при условии

$$f_1(k) = \dots = f_{|M_s(H)|}(k) = f(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (22)$$

(в этом случае статистику L принято называть симметрической разделимой статистикой)

$$L = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{l=1}^r (-1)^{r-l} \binom{r}{l} f(l) \right) \xi_r(H). \quad (23)$$

В частности, разделимой статистикой является число $\mu_r(H)$ классов эквивалентных цепочек, чьи представители встретились в последовательности $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ ровно по r раз для каждого класса. Оно выражается формулой

$$\mu_r(H) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \xi_k(H). \quad (24)$$

Воспользуемся тождеством (24) и результатами раздела 3 о предельном поведении случайных величин $\xi_r(H)$ для описания свойств случайных величин $\mu_r(H)$. Как и раньше, обозначим через $M_s(H)$ множество классов H -эквивалентности на множестве A^s и положим

$$\lambda_r = \binom{n}{r} \frac{1}{N^{rs}} \sum_{m=1}^N \sigma(s, m) \sum_{x \in M_s(H)} |x|^s, \\ \Delta(H) = \frac{|H|}{N^s}.$$

Из теоремы 11 и тождества (24) вытекает следующее утверждение.

Теорема 16. Пусть случайные величины X_t , $t = 1, \dots, n + s - 1$, распределены на $\{1, \dots, N\}$ равномерно и параметры n, s стремятся к бесконечности так, что

$$sN^{-1} - \ln N \rightarrow \infty, \quad (4s)^{2r+1} n \Delta(H) \rightarrow 0,$$

и существует конечный предел $\lambda = \lim \lambda_1$.

Тогда распределение случайной величины $\mu_r(H)$ сходится к закону Пуассона с параметром λ .

При изучении случайных величин $\xi_r(H)$ и $\mu_r(H)$ для относительно малых множеств H можно воспользоваться результатами работы [24]. В ней изучались асимптотические свойства статистик ξ_r и μ_r в конечно-зависимых схемах случайного размещения частиц по ячейкам. На этом пути В. Г. Михайловым были получены следующие результаты.

Рассмотрим класс групп подстановок, определяемый неравенством

$$|\{h \in H : h(a_i) = b_i, i = 1, \dots, d\}| \leq 1 \quad (25)$$

для любых наборов $(a_1, \dots, a_d)$, $(b_1, \dots, b_d)$ попарно различных элементов множества A . Здесь d , $1 \leq d < s$, — параметр класса групп. При $d = 1$ получаем группы обладающие свойством

$$|\{h \in H : h(a) = b\}| \leq 1 \quad \forall a, b \in A. \quad (26)$$

Нетрудно заметить, что это будут группы типа латинского прямоугольника.

Число подстановок в любой группе со свойством (25) удовлетворяет условию $|H| \leq |A|^d$, и при больших значениях $|A|$ в нее входит лишь незначительная часть из общего числа $|A|!$ подстановок.

Нам понадобится вспомогательное отношение эквивалентности, которое мы введем следующим образом. Разобьем множество A^s всех s -цепочек на множества

$$A_0^s = \{(a_1, \dots, a_s) \in A^s : \text{все элементы } a_1, \dots, a_d \text{ различны}\}$$

и $A_1^s = A^s \setminus A_0^s$. Любой класс H -эквивалентности целиком лежит либо в A_0^s , либо в A_1^s . Поэтому можно построить следующее разбиение множества A^s на классы эквивалентности. На множестве A_0^s в качестве классов эквивалентности отношения $\phi(d, H)$ возьмем классы отношения H -эквивалентности. На множестве A_1^s в качестве классов эквивалентности отношения $\phi(d, H)$ возьмем сами цепочки. Цепочки, принадлежащие одному классу $\phi(d, H)$ -эквивалентности, будем называть (d, H) -эквивалентными.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения из конечного множества A ,

$$\mathbf{P}\{X_i = a\} = p_{i,a}, \quad a \in A, \quad p = \max_{i \geq 1, a \in A} p_{i,a}.$$

Пусть H — группа подстановок на множестве A . Обозначим через $\xi_r(H)$ число r -наборов H -эквивалентных s -цепочек в последовательности $X_1, X_2, \dots, X_{n+s-1}$. Через $\mu_r(H)$ обозначим число классов $\phi(H)$ -эквивалентности, представители которых встретились среди s -цепочек последовательности $X_1, X_2, \dots, X_{n+s-1}$ ровно по r раз.

Аналогичным образом для отношения $\Phi(d, H)$ -эквивалентности определим величины $\xi_r(d, H)$ и $\mu_r(d, H)$.

Теорема 17. Пусть $r \geq 2$ фиксировано, а параметры n, s, d , алфавит A , группа H и распределения случайных величин $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ меняются так, что группа H удовлетворяет соотношению (25) и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_r(d, H) &\rightarrow \infty, & \ln s &= o(\ln \mathbf{E}\xi_r(d, H)), \\ sp + s|H|p^{s-d+1} + s|H|np^s &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда функция распределения случайной величины $(\xi_r(d, H) - \mathbf{E}\xi_r(d, H))(\mathbf{D}\xi_r(d, H))^{-1/2}$ сходится к $\Phi(x)$.

Теорема 18. Пусть $r \geq 2$ фиксировано, а параметры n, s, d , алфавит A , группа H и распределения случайных величин $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ меняются так, что группа H удовлетворяет соотношению (25) и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mu_r(d, H) &\rightarrow \infty, & \ln s &= o(\ln \mathbf{E}\mu_r(d, H)), \\ s^{r+1}(p + |H|p^{s-d+1} + |H|np^s) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда функция распределения случайной величины $(\mu_r(d, H) - \mathbf{E}\mu_r(d, H))(\mathbf{D}\mu_r(d, H))^{-1/2}$ сходится к $\Phi(x)$.

Нетрудно заметить, что при $d = 1$ (то есть для групп типа латинского прямоугольника) отношения $\phi(d, H)$ -эквивалентности и $\phi(H)$ -эквивалентности совпадают. Поэтому из теорем 17 и 18 вытекают следующие утверждения.

Следствие 5. Пусть $r \geq 2$ фиксировано, параметры n, s , алфавит A , группа H удовлетворяют соотношению (26) и вместе с распределением случайных величин $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ меняется так, что

$$\mathbf{E}\xi_r(H) \rightarrow \infty, \quad \ln s = o(\ln \mathbf{E}\xi_r(H)), \quad s(p + |H|np^s) \rightarrow 0.$$

Тогда функция распределения случайной величины $(\xi_r(H) - \mathbf{E}\xi_r(H))(\mathbf{D}\xi_r(H))^{-1/2}$ сходится к $\Phi(x)$.

Следствие 6. Пусть $r \geq 2$ фиксировано, параметры n, s , алфавит A , группа H удовлетворяют соотношению (26) и вместе с распределением случайных величин $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ меняется так, что

$$\mathbf{E}\mu_r(H) \rightarrow \infty, \quad \ln s = o(\ln \mathbf{E}\mu_r(H)), \quad s^{r+1}(p + |H|np^s) \rightarrow 0. \quad (27)$$

Тогда функция распределения случайной величины $(\mu_r(H) - \mathbf{E}\mu_r(H))(\mathbf{D}\mu_r(H))^{-1/2}$ сходится к $\Phi(x)$.

Замечание 4. Пусть группа H является латинским прямоугольником, случайные величины $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ распределены на множестве A равномерно: $p_a = 1/|A|, a = 1, \dots, |A|$, и выполнены условия (27). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_r(H) &= \binom{n}{r} (|H||A|^{-s})^{r-1} (1 + o(1)), \\ \mathbf{E}\mu_r(H) &= \binom{n}{r} (|H||A|^{-s})^{r-1} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Если при этом s фиксировано, то условия следствий 5 и 6 принимают вид

$$n, |A| \rightarrow \infty, \quad \binom{n}{r} (|H||A|^{-s})^{r-1} \rightarrow \infty, \quad n|H||A|^{-s} \rightarrow 0.$$

Перейдем к изучению величин $\xi_r(H)$ в случае, когда $d \geq 2$. Будем считать, что параметры s, d при переходе к пределу остаются неизменными, а вероятности исходов пропорциональны друг другу:

$$0 < c_1 \leq |A|p_{i,a} \leq c_2 < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, \quad a \in A, \quad (28)$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные. Такую полиномиальную схему будем называть меняющейся регулярно или просто регулярной полиномиальной схемой.

Теорема 19. Пусть параметры $r \geq 2, s, d \geq 2$ остаются неизменными, параметр n , алфавит A и распределения случайных величин $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ меняются так, что выполнено условие регулярности (28), группа H , изменяясь, удовлетворяет соотношению (25) и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_r(H) &\rightarrow \infty, \quad |A|^{-2}\mathbf{E}\xi_r(H) \rightarrow 0, \\ |H||A|^{-s}(n + |A|^{d-1}) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда функция распределения случайной величины $(\xi_r(H) - \mathbf{E}\xi_r(H))(\mathbf{D}\xi_r(d, H))^{-1/2}$ сходится к $\Phi(x)$.

Свойства зависимых схем размещения изучались в [13, 14]. Идеи и результаты этих работ также могут оказаться полезными при изучении свойств H -эквивалентных цепочек.

5. Связанные цепочки из разных последовательностей

В отличие от рассмотренных выше задач, в этом разделе нас будут интересовать пары эквивалентных и H -эквивалентных цепочек в случае, когда одна цепочка расположена в одной последовательности, а вторая — в другой. Эта постановка хороша тем, что в ней естественно рассматривать и случай, когда распределение величин одной последовательности отличается от распределения величин в другой, а это существенно расширяет круг содержательных задач.

Итак, пусть $X = (X_1, \dots, X_m)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ — две последовательности независимых одинаково (внутри каждой последовательности) распределенных случайных величин, принимающих значения в множестве $\{1, 2, \dots\}$,

$$p_k = \mathbf{P}\{X_1 = k\}, \quad q_k = \mathbf{P}\{Y_1 = k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ p = \max_k p_k, \quad q = \max_k q_k, \quad P = mp^s, \quad Q = nq^s.$$

Пусть задан конечный набор H взаимно однозначных отображений $h: \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$. Введем обозначения

$$E_{i,j}(h) = \{(h(X_i), \dots, h(X_{i+s-1})) = (Y_j, \dots, Y_{j+s-1})\}, \\ E_{i,j}(H) = \bigcup_{h \in H} E_{i,j}(h).$$

Число пар H -связанных цепочек из последовательностей X и Y выражается формулой

$$N(H) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I(E_{i,j}(H))$$

(здесь и далее выражение $I(\cdot)$ обозначает индикатор случайного события или неслучайного множества). В этом определении считается, что

$$X_{m+i} = X_i, \quad Y_{n+i} = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Это предположение позволяет отчасти упростить выкладки, но не влияет на вид предельного распределения.

Введем обозначение

$$D_k = \mathbf{P}\{E_{1,1}(H)E_{1+k,1+k}(H)\}, \quad k = 0, 1, \dots, s-1.$$

В частности,

$$\mathbf{P}\{E_{1,1}(H)\} = D_0 = \mathbf{P}\{E_{1,1}(H)E_{1,1}(H)\}.$$

Пусть

$$D = D_1 + \dots + D_{s-1}.$$

Распределение Пуассона с параметром λ будем обозначать $\text{Po}(\lambda)$. Через $\mathcal{L}(W)$ будем обозначать распределение случайной величины W .

Приводимая далее теорема получена в [31].

Теорема 20. Пусть параметры схемы $m, n \rightarrow \infty$, а $p_k, q_k, k = 1, 2, \dots$, меняются так, что

$$\mathbf{E}N(H) = mnD_0 \rightarrow \lambda < \infty, \quad (29)$$

$$mnD + s|H|(P + Q) \rightarrow 0. \quad (30)$$

Тогда

$$\mathcal{L}(N(H)) \rightarrow \text{Po}(\lambda).$$

Замечание 5. Доказательство теоремы 20 проводится с помощью локального варианта метода Чена–Стейна. Этот метод позволяет получить явную оценку расстояния по вариации между распределением величины $N(H)$ и пуассоновским распределением с параметром $\mathbf{E}N(H)$ (см. теорему 22 ниже). Из этой оценки кроме условий асимптотической пуассоновости можно также получить достаточные условия асимптотический нормальности величины $N(H)$ (см. теорему 24 ниже).

Замечание 6. Многими авторами (см. [29, 43–45, 47–57]) исследовалась случайная величина $N(\{e\})$ — число точных совпадений s -цепочек — и некоторые связанные с ней случайные величины. При $H = \{e\}$ условие (30) (с учетом других условий теоремы) принимает вид $s(P + Q) \rightarrow 0$.

Теорема 20 позволяет исследовать число пар H -эквивалентных цепочек как при малых, так и больших множествах H .

Пусть распределения $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ сосредоточены на множестве $\{1, \dots, N\}$, причем распределение $\{q_k\}$ на нем равновероятно: $q_1 = \dots = q_N = 1/N$. Тогда

$$D_k \leq \frac{|H|}{N^{s+k}}, \quad k = 0, 1, \dots, s-1, \quad D < \frac{|H|}{N^s(N-1)}.$$

Если при этом множество H удовлетворяет условию (26) (то есть H — множество типа латинского прямоугольника), то

$$D_k = |H|N^{-s-k}, \quad k = 0, 1, \dots, s-1. \quad (31)$$

Используя эти свойства, из теоремы 20 нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 21. Пусть элементы последовательностей X и Y распределены на множестве $\{1, \dots, N\}$ равновероятно: $p_k = q_k = 1/N, k = 1, \dots, N$, а множество H удовлетворяет условию (26). Пусть $n \rightarrow \infty$, а остальные параметры схемы меняются так, что

$$\frac{\ln m}{n} + \frac{\ln n}{m} = O(1) \quad (32)$$

и выполняется условие (29).

Тогда распределение случайной величины $N(H)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Условие (32) гарантирует определенного рода соразмерность длин последовательностей X и Y .

Приведем оценки скорости сходимости, полученные в работе [31]. Обозначим через $\rho(F, G)$ расстояние по вариации между распределениями F и G .

Теорема 22. Пусть $m, n \geq 2s - 1$. Тогда

$$\rho(\mathcal{L}(N(H)), \text{Po}(mnD_0)) \leq (1 - e^{-mnD_0})(2mnD(mnD_0)^{-1} + 2(2s - 1)|H|(P + Q) + (2s - 1)^2(mnD_0)^{-1}|H|^2PQ).$$

Обозначим через W набор случайных величин $\{I(E_{i,j}(H))\}_\Gamma$ на множестве

$$\Gamma = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Пусть $\pi = \{\pi_{i,j}\}_\Gamma$ — набор независимых случайных величин, имеющих распределения Пуассона с параметрами

$$\mathbf{E}\pi_{i,j} = \mathbf{P}\{E_{i,j}(H)\}.$$

Теорема 23. Пусть $m, n \geq 2s - 1$. Тогда

$$\rho(\mathcal{L}(W), \mathcal{L}(\pi)) \leq 2mnD + 2(2s - 1)mnD_0|H|(P + Q) + (2s - 1)^2|H|^2PQ.$$

Из теоремы 23 следуют теорема 20 и следующая теорема 24.

Теорема 24. Пусть параметры схемы $m, n \rightarrow \infty$, а $p_k, q_k, k = 1, \dots, N$, меняются так, что

$$\mathbf{E}N(H) = mnD_0 \rightarrow \infty, \quad (33)$$

$$DD_0^{-1} + s|H|(P + Q) \rightarrow 0. \quad (34)$$

Тогда функция распределения случайной величины $(mnD_0)^{-1/2}(N(H) - mnD_0)$ сходится к стандартной нормальной функции распределения.

Как недавно показал В. Г. Михайлов, в случае, когда равновероятными являются обе последовательности, условия сходимости распределения величины $N(S_N)$ к распределению Пуассона выглядят следующим образом.

Теорема 25. Пусть элементы последовательностей X и Y независимы и распределены на множестве $\{1, \dots, N\}$ равновероятно. Если $m, n, N, s \rightarrow \infty$ так, что величины n и t имеют один порядок роста и выполнены условие (29) и условие

$$\frac{s}{N} - \frac{1}{4} \ln N \rightarrow \infty, \quad (35)$$

то

$$\mathcal{L}(N(S_N)) \rightarrow \text{Po}(\lambda).$$

Приведем теперь результаты исследования асимптотических свойств вероятностей $\mathbf{P}\{E_{i,j}(S_N)\}$.

Рассмотрим две последовательности независимых одинаково распределенных внутри каждой последовательности случайных величин $X_1, \dots, X_s$ и $Y_1, \dots, Y_s$ со значениями в множестве $\{1, \dots, N\}$. Нас будет интересовать вопрос о величине вероятности события

$$E(s, N) = \{\exists \sigma \in S_N: Y_k = \sigma(X_k), k = 1, \dots, s\}, \quad (36)$$

где S_N — множество всех подстановок на $\{1, \dots, N\}$.

Теорема 26. Пусть $\mu(s)$ — число различных значений, принятых величинами $X_1, \dots, X_s$,

$$\mathbf{P}\{Y_i = k\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, n. \quad (37)$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{E(s, N)\} = N^{-s} \mathbf{E}((N)_{\mu(s)}). \quad (38)$$

Соотношение (38) обобщает использованное в [9] равенство

$$\mathbf{P}\{E_{1,1}(S_N)\} = N^{-2s} \sum_{m=1}^{\min\{s, N\}} \sigma(s, m) ((N)_m)^2 \quad (39)$$

для полностью равновероятного случая.

Связь между равенствами (38) и (39) становится прозрачной, если вспомнить, что в равновероятной полиномиальной схеме с s испытаниями и N исходами

$$\mathbf{P}\{\mu(s) = m\} = \sigma(s, m) (N)_m N^{-s}, \quad m = 1, \dots, s.$$

Напомним, что числа Стирлинга второго рода $\sigma(s, m)$ определяются как коэффициенты в системе тождеств

$$x^k = \sum_{m=0}^k \sigma(k, m) (x)_m, \quad k = 0, 1, \dots$$

Замечание 7. Аналогичным равенству (38) образом можно выразить вероятность события

$$F(s, N) = \{X_i = X_j \implies Y_i = Y_j, \quad 1 \leq i < j \leq s\}.$$

В этом случае вместо (38) получаем равенство

$$\mathbf{P}\{F(s, N)\} = N^{-s} \mathbf{E}(N^{\mu(s)}).$$

То же самое можно сказать про вероятности событий более сложного вида. Пусть помимо последовательности $X_1, \dots, X_n$ заданы $r + t$ независимых последовательностей $Y_1^u, \dots, Y_n^u$, $u = 1, \dots, r + t$, независимых случайных величин, распределенных на множестве $\{1, \dots, N\}$ равновероятно. Пусть

$$E^t(s, N) = \{X_i = X_j \iff Y_i^t = Y_j^t, \quad 1 \leq i < j \leq s\},$$

$$F^t(s, N) = \{X_i = X_j \implies Y_i^t = Y_j^t, \quad 1 \leq i < j \leq s\}.$$

Тогда для вероятности события

$$E^r F^t(s, N) = E^1(s, N) \dots E^r(s, N) F^{r+1}(s, N) \dots F^{r+t}(s, N)$$

выполнено равенство

$$\mathbf{P}\{E^r F^t(s, N)\} = N^{-(r+t)s} \mathbf{E}((N_{\mu(s)})^r N^{t\mu(s)}).$$

Важным следствием теоремы 26 является система неравенств

$$\mathbf{P}\{\mu(s) = s\} \leq \frac{N^s}{(N)_s} \mathbf{P}\{E(s, N)\} \leq \mathbf{P}\{\mu(s) = s\} + \frac{1}{N-s}. \quad (40)$$

В равновероятном случае из нее получаем систему неравенств

$$\left(\frac{(N)_s}{N^s}\right)^2 \leq \mathbf{P}\{E(s, N)\} \leq \frac{(N)_s}{N^s} \left(\frac{(N)_s}{N^s} + \frac{1}{N-s}\right).$$

Поэтому при $s/N \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{E(s, N)\} = \left(\frac{(N)_s}{N^s}\right)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{N-s}\right)\right).$$

Благодаря цепочке неравенств (40) удастся исследовать асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{E(s, N)\}$ и при условии (37). Так, (40), предельная теорема Пуассона и оценки точности пуассоновской аппроксимации для числа пустых ячеек в полиномиальной схеме размещения (см. [1], с. 118–119, и [16]), а также экстремальный характер распределения числа занятых ячеек в равновероятной схеме размещения (см. [18]) дают следующий результат.

Положим

$$P_r = \sum_{k=1}^N p_k^r, \quad p = \max_k p_k.$$

Теорема 27. Пусть случайные величины $X_1, \dots, X_s$ имеют произвольное полиномиальное распределение, а для $Y_1, \dots, Y_s$ выполнено условие (37).

Тогда, если $s^2 P_2 \rightarrow 0$, то

$$\mathbf{P}\{E(s, N)\} = 1 + O(s^2 P_2);$$

если $sp(1 + s^2 P_2) \rightarrow 0$, то

$$\mathbf{P}\{E(s, N)\} = \exp \left\{ -\frac{s^2}{2} \left(P_2 + \frac{1}{N} \right) \right\} \left(1 + O(sp(1 + s^2 P_2)) \right).$$

Замечание 8. Для случая, когда знаки цепочек X и Y распределены равновероятно, можно указать простую рекуррентную процедуру вычисления $\mathbf{P}\{E(s, N)\}$. Пусть

$$z_1(1) = 1, \quad z_2(1) = \dots = z_N(1) = 0, \quad z_1(s) = z_1(s-1)N^{-2}$$

при $s = 2, \dots, N$ и

$$z_k(s) = z_{k-1}(s-1) \left(1 - \frac{k-1}{N} \right)^2 + z_k(s-1) \frac{k}{N^2}, \quad k = 2, \dots, N.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{E(s, N)\} = z_1(N) + \dots + z_N(N).$$

6. Перестановочная эквивалентность

Пусть s — натуральное число и G — подгруппа симметрической группы подстановок S_s . Два вектора (s -цепочки) $\bar{a} = (a_1, \dots, a_s)$ и $\bar{b} = (b_1, \dots, b_s)$ из A^s будем называть перестановочно эквивалентными относительно группы G (G -эквивалентными в соответствии с [2]), если существует такая подстановка g из G , что $a_{g(j)} = b_j$ для всех $j = 1, \dots, s$. В этом случае будем писать $\bar{a}G\bar{b}$. В частности, запись $\bar{a}\{e\}\bar{b}$, где e — единичная подстановка, означает, что $\bar{a} = \bar{b}$.

Если $G_1 \subseteq G_2 \subseteq S_s$, то из $\bar{a}G_1\bar{b}$ следует, что $\bar{a}G_2\bar{b}$ и $\bar{a}S_s\bar{b}$. Последнее соотношение эквивалентно условию, что для каждого знака алфавита частоты его появления в цепочках $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаковы. Поэтому таким же свойством обладают G -эквивалентные s -цепочки при любой группе G .

Рассмотрим следующую задачу. Имеются две последовательности $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ и $Y_1, \dots, Y_n$ знаков алфавита A . Требуется проверить гипотезу о том, что последовательность $Y_1, \dots, Y_n$ получена по правилу

$$Y_t = f(X_t, \dots, X_{t+s-1}), \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

с некоторой (неизвестной) функцией $f(x_1, \dots, x_s): A^s \rightarrow A$. В этом случае применим критерий совпадений, состоящий в проверке свойства

$$\{(X_i, \dots, X_{i+s-1}) = (X_j, \dots, X_{j+s-1})\} \implies Y_i = Y_j \quad (41)$$

для всех пар $1 \leq i < j \leq n$.

Если заранее известно, что функция g обладает свойством

$$f(x_1, \dots, x_s) = f(x_{g(1)}, \dots, x_{g(s)})$$

при всех $x_1, \dots, x_s \in A$ и $g \in G$, где G — некоторая группа подстановок на множестве $\{1, 2, \dots, s\}$, то правило (41) можно заметить правилом

$$\{(X_i, \dots, X_{i+s-1})G(X_j, \dots, X_{j+s-1})\} \implies Y_i = Y_j. \quad (42)$$

Выигрыш состоит в том, что событие, указанное в левой части соотношения (42), встречается в случайной последовательности гораздо чаще, чем совпадение двух s -цепочек.

Критерии, использующие правила (41) и (42), удобны тем, что они не могут отвергнуть гипотезу наличия функциональной зависимости (во втором случае — функциональной зависимости указанного выше вида), если она верна. Поэтому они характеризуются лишь вероятностью ошибочного принятия гипотезы о зависимости.

Эта вероятность в значительной степени определяется распределением случайной величины

$$\zeta_2(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} I\{(X_i, \dots, X_{i+s-1})G(X_j, \dots, X_{j+s-1})\}, \quad (43)$$

равной числу пар G -эквивалентных s -цепочек в последовательности X .

Оказалось, что случайная величина $\zeta_2(G)$ обладает весьма любопытными асимптотическими свойствами. А. М. Шойтов показал [37], что при определенных условиях значение случайной величины $\zeta_2(G)$ совпадает в пределе с числом событий $\{X_i = X_{i+s}\}$. Его результат можно сформулировать следующим образом.

Обозначим через T циклический сдвиг на один шаг (в любую сторону) на множестве $\{1, 2, \dots, s\}$. Как и раньше, через $\mathcal{L}(W)$ будем обозначать распределение случайной величины W . Распределение Пуассона с параметром λ будем обозначать $Po(\lambda)$, а функцию распределения нормального закона — $\Phi(x)$. Пусть еще

$$P_r = \sum_{a \in A} p_a^r.$$

Теорема 28. Пусть $n \rightarrow \infty$, а параметры s , N , вектор вероятностей $\mathcal{P}$ и группа G меняются так, что $T \in G$, $s \geq 3$, $sP_2 < e^c$ для некоторой постоянной $c < 1$.

Тогда если $nP_2 = O(1)$, то

$$\mathbf{P} \left\{ \zeta_2(G) = \sum_{i=1}^{n-1} I\{X_i = X_{i+s}\} \right\} \rightarrow 1,$$

а распределение случайной величины $\zeta_2(G)$ сближается с распределением Пуассона с параметром nP_2 :

$$d(\mathcal{L}(\zeta_2(G)), Po(nP_2)) = O(P_3 P_2^{-1});$$

если $nP_2 \rightarrow \infty$ и $n^3 P_2^7 \rightarrow 0$ (при $s \geq 4$), $n^3 P_2^5 \rightarrow 0$ (при $s = 3$), то для любого фиксированного $x \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\zeta_2(G) - nP_2}{\sqrt{nP_2}} \leq x \right\} \rightarrow \Phi(x).$$

Замечание 9. При доказательстве теоремы 28 показывается, что решающий вклад в поведение случайной величины $\zeta_2(G)$ (см. формулу (43)) вносят слагаемые вида

$$I\{(X_i, \dots, X_{i+s-1})G(X_{i+1}, \dots, X_{i+s})\}. \quad (44)$$

Нетрудно проверить, что при условии $T \in G$ эти слагаемые имеют смысл $I\{X_i = X_{i+s}\}$. В итоге оказывается, что в рассмотренном случае главный член асимптотики случайной величины $\zeta_2(G)$ не зависит от группы G .

Замечание 10. Из суммы (43) можно исключить слагаемые при $j-i \leq s-1$, относящиеся к перекрывающимся цепочкам. Тогда основной вклад в асимптотическое поведение величины $\zeta_2(G)$ будут вносить члены, зависящие от вида группы G . Но и в этом случае, как показывает приводимая ниже теорема 29, доказанная недавно А. М. Шойтовым, наблюдаются характерные особенности той же самой природы в асимптотическом поведении $\zeta_2(G)$.

Замечание 11. Теорема 28 описывает практически весь диапазон изменения параметров схемы X , кроме вырожденного случая $s \leq 2$ и случая $sP_2 > e$, для которого возможна сходимость распределения случайной величины $\zeta_2(G)$ к закону Пуассона. В случае $s = 2$ можно доказать, что предельным распределением для $\zeta_2(G)$ будет распределение Пуассона с параметром 2λ .

Рассмотрим случайную величину

$$\zeta'_2(G) = \sum_{1 \leq i_1 < i_1+n \leq i_2 \leq N} I((X_{i_1}, \dots, X_{i_1+n-1})G(X_{i_2}, \dots, X_{i_2+n-1})),$$

равную числу пар неперекрывающихся G -эквивалентных s -цепочек в последовательности X . Пусть

$$\lambda(n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \binom{n}{2} \frac{s}{N^s}.$$

Обозначим через $T(s)$ группу всех циклических сдвигов на множестве $\{1, 2, \dots, s\}$.

Теорема 29. Пусть случайные величины $X_1, \dots, X_{n+s-1}$ распределены независимо и равномерно на A , а параметры схемы меняются так, что $n, s \rightarrow \infty$ и $\lambda(n) \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. Тогда

(а) если $N \rightarrow \infty$, то

$$\mathcal{L}(\zeta'_2(T(s))) \rightarrow \pi(\lambda);$$

(б) если параметр N остается неизменным, то распределение случайной величины $\zeta'_2(T(s))$ сходится к распределению суммы $u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_\pi v_\pi$, где случайные величины π , u_k и v_k , $k = 1, 2, \dots$, независимы, величина π распределена по закону Пуассона с параметром λ , а величины u_k и v_k , $k = 1, 2, \dots$, имеют геометрическое распределение с вероятностью успеха $1 - N^{-1}$.

Замечание 12. Причина возникновения в пределе такого экзотического распределения состоит в следующем. При неизменном числе исходов события вида (44) группируются в отрезки периодических (с периодом длины s) последовательностей. Число событий вида (44) в таком отрезке имеет в пределе геометрическое распределение. Число отрезков является суммой редких событий и имеет в пределе распределение Пуассона. События из одного отрезка периодичности не вносят вклада в сумму (43), если только отрезок не слишком длинный (вероятность такого события пренебрежимо мала), поскольку они перекрываются. Но пары $T(s)$ -эквивалентных цепочек по одной из двух разных отрезков периодичности уже будут подсчитаны. Они дадут вклад, равный произведению числа цепочек в каждом из отрезков. Так возникает предельное распределение в п. (б) теоремы 29.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
2. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
3. Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Дискретные задачи теории вероятностей. *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика*. (1984) **22**, 3–60.
4. Буравлев С. М., Пуассоновское предельное распределение числа отрезков, связанных подстановками из симметрической группы, в последовательности независимых равновероятных испытаний. В кн.: *Вторая Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов*. ТВП, Москва, 1995, с. 28–30.
5. Буравлев С. М., Некоторые алгоритмы подсчета статистик, зависящих от числа пар отрезков последовательности, связанных подстановками. *Обзор прикладной и промышленной математики* (1997) **4**, №3, 331–333.
6. Буравлев С. М., Предельные теоремы для случайных величин от числа пар отрезков, связанных подстановками из латинского прямоугольника. В кн.: *Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов*. ТВП, Москва, 1996, с. 37–40.

7. Буравлев С. М., Локальная асимптотическая нормальность числа пар отрезков последовательности, связанных подстановками из латинского прямоугольника. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1998) 5, №2, 205–207.
8. Буравлев С. М., Уточнение одного предельного распределения. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1999) 6, №1, 127–128.
9. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок в последовательности независимых испытаний. *Дискретная математика* (1999) 11, №1, 53–75.
10. Буравлев С. М., Повторения с точностью до перестановок, образующих латинский прямоугольник. *Дискретная математика* (2000) 12, №1, 24–46.
11. Гусев В. Д., Немытикова Л. А., Сложностные характеристики генетических текстов. В кн.: *Труды 4-й Всероссийской конф. «Распознавание образов и анализ изображений»*, ч. 1. 1998, Новосибирск, с. 83–87.
12. Гусев В. Д., Немытикова Л. А., Учет проявлений повторности, симметрии и изоморфизма в символьных последовательностях: алгоритмические аспекты. *Вычислительные системы* (2001) 167, 11–33.
13. Зубков А. М., Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения. *Матем. сб.* (1979) 109 (151), №4 (8), 491–532.
14. Зубков А. М., Оценки для сумм конечно-зависимых индикаторов и для момента первого наступления редкого события. *Труды МИАН* (1986) 177, 33–46.
15. Зубков А. М., Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) 19, №1, 173–181.
16. Зубков А. М., Михайлов В. Г., Оценка точности пуассоновской аппроксимации в задаче о размещении частиц по ячейкам. *Теория вероятностей и ее применения* (1978) 23, №4, 819–824.
17. Зубков А. М., Михайлов В. Г., О повторениях s -цепочек в последовательности независимых величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1979) 24, №2, 267–279.
18. Зубков А. М., Попов Н. Н., Отношение частичного порядка, порожденное распределениями числа занятых ячеек. *Матем. заметки* (1982) 32, №1, 97–102.
19. Колчин В. Ф., Чистяков В. П., Предельные распределения числа непоявившихся s -цепочек в полиномиальной схеме. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) 19, №4, 855–864.
20. Медведев Ю. И., Некоторые теоремы об асимптотическом распределении статистики χ^2 . *Докл. АН СССР* (1970) 192, №5, 987–989.
21. Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с многократными длинными повторениями в последовательности независимых испытаний. *Теория вероятностей и ее применения* (1974) 19, №1, 182–187.
22. Михайлов В. Г., Центральная предельная теорема для числа неполных длинных повторений. *Теория вероятностей и ее применения* (1975) 20, №4, 880–884.
23. Михайлов В. Г., Центральная предельная теорема для неоднородных U -статистик от конечно зависимых случайных величин. *Матем. сб.* (1975) 98 (140), №4 (12), 624–634.
24. Михайлов В. Г., Асимптотическая нормальность в схеме конечно-зависимого размещения частиц по ячейкам. *Матем. сб.* (1982) 119, №4, 509–520.
25. Михайлов В. Г., Асимптотическая нормальность разделимых статистик от частот m -цепочек. *Дискретная математика* (1989) 1, №4, 92–103.
26. Михайлов В. Г., Явные оценки в предельных теоремах для сумм случайных индикаторов. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1994) 1, №4, 580–617.

27. Михайлов В. Г., Оценка точности сложной пуассоновской аппроксимации по методу Стейна-Чена. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1996) 3, №4, 530–548.
28. Михайлов В. Г., Некоторые неравенства для функции распределения числа появившихся s -цепочек. *Труды по дискретной математике* (1997) 1, 221–226.
29. Михайлов В. Г., Оценка точности сложной пуассоновской аппроксимации для распределения числа совпадающих цепочек. *Теория вероятностей и ее применения* (2001) 46, №4, 713–723.
30. Михайлов В. Г., Неравенства для среднего числа повторений m -цепочек и для среднего числа появившихся m -цепочек из заданного класса. *Труды по дискретной математике* (2000) 3, 147–154.
31. Михайлов В. Г., Об асимптотических свойствах распределения числа пар H -связанных цепочек. *Дискретная математика* (2002) 14, №3, 122–129.
32. Тимашёв А. Н., О вероятности совпадения векторов частот исходов независимых полиномиальных схем. В кн.: *Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Тезисы докладов*. ТВП, Москва, 1996, 156–157.
33. Тихомирова М. И., Об асимптотической нормальности числа появившихся s -цепочек. *Дискретная математика* (1992) 4, №2, 122–129.
34. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., Об асимптотике моментов числа появившихся s -цепочек. *Дискретная математика* (1997) 9, №1, 12–29.
35. Тихомирова М. И., Чистяков В. П., О статистических критериях отсутствующих s -грамм. *Труды по дискретной математике* (1997) 1, 265–278.
36. Шойтов А. М., Предельные распределения числа наборов H -эквивалентных отрезков в равновероятной полиномиальной схеме серий. *Дискретная математика* (2002) 14, №1, 82–98.
37. Шойтов А. М., Повторения значений функции от отрезков последовательности независимых испытаний. *Дискретная математика* (2000) 12, №3, 49–59.
38. Шойтов А. М., Предельные распределения числа наборов H -эквивалентных отрезков в последовательности независимых испытаний. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1999) 6, №1, 218–220.
39. Шойтов А. М., Связь отрезков отношением H -эквивалентности в схеме серий. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1999) 6, №1, 220–221.
40. Шойтов А. М., Верхняя оценка расстояния по вариации между распределением случайной величины, равной числу наборов H -эквивалентных отрезков в равновероятной схеме серий, и распределением Пуассона. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (2000) 7, №2, 546–547.
41. Шойтов А. М. О скорости сходимости числа наборов H -эквивалентных отрезков в равновероятной схеме серий к сложному распределению Пуассона. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (2001) 8, №1, 381–381.
42. Шойтов А. М., Сложное распределение Пуассона числа наборов H -эквивалентных отрезков в последовательности независимых испытаний. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (2001) 8, №2, 816–816.
43. Arratia R., Gordon L., Waterman M. S., An extreme value theory for sequence matching. *Ann. Statist.* (1986) 14, №3, 971–993.
44. Arratia R., Waterman M. S., Critical phenomena in sequence matching. *Ann. Probab.* (1985) 13, №4, 1236–1249.
45. Arratia R., Gordon L., Waterman M. S., The Erdős–Rényi law in distribution, for coin tossing and sequence matching. *Ann. Statist.* (1990) 18, №2, 539–570.
46. Barbour A. D., Holst L., Janson S., *Poisson approximation*. Oxford University Press, Oxford, 1992.

47. Benczur A., Katai I., On the number of occurrences of sequence patterns. *Acta Math. Hung.* (1986) 47, №3-4, 371–382.
48. Biggins J. D., A note on repeated sequences in Markov chains. *Adv. Appl. Probab.* (1987) 19, №3, 739–742.
49. Chrysaphinou O., Papastavridis S., A limit theorem on the number of overlapping appearances of a pattern in a sequence of independent trials. *Probab. Theory Relat. Fields* (1988) 79, 129–143.
50. Chrysaphinou O., Papastavridis S., A limit theorem on the number of non-overlapping occurrences of a pattern in a sequence of independent trials. *J. Appl. Probab.* (1988) 25, №2, 428–431.
51. Chrysaphinou O., Papastavridis S., The occurrence of sequence patterns in repeated dependent experiments. *Теория вероятностей и ее применения* (1990) 35, №1, 167–173.
52. Dembo A., Karlin S., Zeitouni O., Critical phenomena for sequence matching with scoring. *Ann. Probab.* (1994) 22, №4, 1993–2021.
53. Dembo A., Karlin S., Zeitouni O., Limit distribution of maximal non-aligned two-sequence segmental score. *Ann. Probab.* (1994) 22, №4, 2022–2039.
54. Gordon L., Schilling M. F., Waterman M., An extreme value theory for sequence matching. *Probab. Theory Relat. Fields* (1986) 72, 279–287.
55. Karlin S., Ost F., Count of long aligned word matches among random letter sequences. *Adv. Appl. Probab.* (1987) 19, №2, 293–351.
56. Karlin S., Ost F., Maximal length of common words among random letter sequences. *Ann. Probab.* (1988) 16, №3, 535–563.
57. Karlin E. D., The first repetition of a pattern in a symmetric Bernoulli sequence. *J. Appl. Probab.* (1983) 20, 413–418.
58. Lempel A., Ziv J., On the complexity of finite sequences. *IEEE Trans. Inf. Theory* (1976) 22, №1, 75–81.
59. Rukhin A. L., Distribution of the number of words with a prescribed frequency and tests of randomness. *Adv. Appl. Prob.* (2002) 34, 775–797.

Статья поступила 15.09.2003.