Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Нагаев, Предельные теоремы и проверка гипотез относительно цепей Маркова, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 4, 35–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm215>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:09:12

Предельные теоремы и проверка гипотез относительно цепей Маркова

© 2003 г. А. В. Нагаев

Рассматриваются оптимальные критерии для различения двух цепей Маркова, имеющих общее фазовое пространство $\mathcal{S}$, которое предполагается конечным. Риски этих критериев выражаются через вероятности больших уклонений для сумм случайных величин, заданных на состояниях новой цепи Маркова, которая имеет в качестве фазового пространства $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Рассматриваются как простые, так и сложные альтернативы. При этом устанавливаются точные или, иначе, сильные асимптотические формулы.

1. Введение

Пусть $x_n, n = 0, 1, \dots$, — цепь Маркова на конечном фазовом пространстве $\mathcal{S} = \{1, \dots, d\}$. В дальнейшем всюду предполагается, что цепь однородна, неприводима и эргодична. Обозначим через $P = \|p_{rq}\|_{r,q=1}^d$ и $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)^T$, соответственно, стохастическую матрицу, управляющую эволюцией цепи, и отвечающее ей стационарное распределение. Таким образом, $P^T \pi = \pi$. Хорошо известно (см., например, теорему 8.5.2 в [1]), что в наших предположениях P необходимо является примитивной, то есть существует целое $n_0 \geq 1$, такое, что матрица P^{n_0} положительна.

Рассмотрим две простые гипотезы

$$H_i: P = P^{(i)} = \|p_{rq}(i)\|_{r,q=1}^d, \quad i = 1, 2.$$

Стоит подчеркнуть, что рассматриваемые гипотезы не являются сближающимися. Задача состоит в том, как проверить их, основываясь на наблюдаемом отрезке траектории цепи. Определим на цепочках $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ меры $\mathbf{P}_{x_0}^{(i)}$ следующим образом:

$$\mathbf{P}_{x_0}^{(i)}(x^{(n)}) = p_{x_0, x_1}(i) \dots p_{x_{n-1}, x_n}(i), \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, что меры $\mathbf{P}_{x_0}^{(i)}$ могут быть продолжены на σ -алгебру борелевских подмножеств $\mathcal{S}^\infty$.

Рассмотрим отношение правдоподобия

$$r(x^{(n)}) = \frac{d\mathbf{P}_{x_0}^{(1)}}{d\mathbf{P}_{x_0}^{(2)}}(x^{(n)}) = \prod_{m=1}^n \frac{p_{x_{m-1}, x_m}(1)}{p_{x_{m-1}, x_m}(2)}. \quad (1)$$

Хорошо известно, что все оптимальные критерии основываются на $r(x^{(n)})$. К сожалению, различая марковские цепи, имеющие конечное фазовое пространство, мы не можем предположить подобно [2], что для всех $r > 0$

$$\mathbf{P}_{x_0}^{(i)}(r(x^{(n)}) = r) = 0, \quad i = 1, 2.$$

При обеих гипотезах распределение $r(x^{(n)})$ существенно дискретно. Это означает, что все наилучшие тесты, являются, строго говоря, рандомизованными. Чтобы обойти некоторые неудобства, связанные с употреблением рандомизованных критериев, можно перейти к нерандомизованным тестам, которые асимптотически неотличимы от наилучших. Точнее, изучать тесты вида

$$d_r(x^{(n)}) = \begin{cases} H_1, & \text{если } r(x^{(n)}) \geq r, \\ H_2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

Конкретный выбор критического уровня r зависит от того, как мы понимаем оптимальность критерия.

В рамках подхода Неймана–Пирсона критический уровень $r = r_{NP}^{(n)}$ выбирается в виде

$$r_{NP}^{(n)} = \sup(r : \mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(r(x^{(n)}) < r) \leq \alpha), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Риск Неймана–Пирсона имеет вид

$$R_{NP}^{(n)} = \mathbf{P}_{x_0}^{(2)}(r(x^{(n)}) \geq r_{NP}^{(n)}).$$

Следуя байесовскому подходу, критический уровень $r = r_B$ выбирают в виде

$$r_B = \frac{\Pi_2 l_{21}}{\Pi_1 l_{12}},$$

где Π_1, Π_2 — априорные вероятности гипотез, а l_{12}, l_{21} — потери от принятия ошибочных решений. Выбирая единицу измерения потерь надлежащим образом, получаем следующую формулу для байесовского риска:

$$R_B^{(n)} = \mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(r(x^{(n)}) < r_B) + r_B \mathbf{P}_{x_0}^{(2)}(r(x^{(n)}) \geq r_B).$$

Подчеркнем, что Π_1, Π_2 и l_{12}, l_{21} фиксированы.

Наконец, следуя принципу минимакса, выбираем критический уровень $r = r_{MM}^{(n)}$ в виде

$$r_{MM}^{(n)} = \sup(r : \mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(r(x^{(n)}) < r) \leq \mathbf{P}_{x_0}^{(2)}(r(x^{(n)}) \geq r)).$$

Такой тест характеризуется риском, вычисляемым по формуле

$$R_{MM}^{(n)} = \mathbf{P}_{x_0}^{(2)}(r(x^{(n)}) \geq r_{MM}^{(n)}).$$

Заметим, что в наших обозначениях не отражена зависимость критических уровней и рисков от x_0 .

Нашей основной целью является нахождение асимптотических формул для $R_{NP}^{(n)}, R_B^{(n)}$ и $R_{MM}^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$. Иными словами, речь идет о точной или, иначе, сильной асимптотике

рисков, в отличие от так называемой грубой или, иначе, слабой асимптотики, связанной с асимптотическим поведением $\ln R_{NP}^{(n)}$, $\ln R_B^{(n)}$ и $\ln R_{MM}^{(n)}$.

Грубая асимптотика байесовского риска хорошо известна. Например, в [3] она устанавливается в предположении, что конечномерные распределения, отвечающие конкурирующим цепям, взаимно абсолютно непрерывны. Случай же частичной сингулярности конечномерных распределений изучен в [4].

Приводимые ниже результаты частично известны по работам автора [5–7]. Здесь они приводятся в новом изложении, в котором учтены огрехи, допущенные в упомянутых работах. Вместе с новыми результатами они составляют в определенном смысле законченное исследование в рамках обозначенной области.

Расположение материала в работе следующее. Во втором разделе дается небольшой обзор необходимых фактов из теории суммирования случайных величин, заданных на состояниях цепи Маркова. Помимо этого, приводится доказательство одной теоремы о больших отклонениях порядка $O(\sqrt{n})$. В третьем разделе осуществляется сведение задачи к проблеме больших отклонений для сумм случайных величин, заданных на состояниях марковской цепи. Четвертый и пятый разделы посвящены, соответственно, проверке простых и сложных гипотез. Заключительные замечания составляют содержание последнего шестого раздела.

2. Предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на последовательных состояниях марковской цепи

2.1. Некоторые следствия из классических предельных теорем

Рассмотрим цепь Маркова, которая выходит из состояния x_0 и управляется примитивной матрицей переходных вероятностей P . Каждая функция f , определенная на $\mathcal{S} = \{1, \dots, d\}$, задает последовательность случайных величин $f(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Будем предполагать, что случайные величины $f(x_k)$ нерешетчатые. Это означает, что множество $\{f(1), \dots, f(d)\}$ не может быть вложено ни в одно множество вида $\{a + kh, k \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим суммы

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем обозначения

$$a = \mathbf{E}_\pi f(x_k) = \sum_{r=1}^d f(r)\pi_r, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\mathbf{E}_\pi$ означает математическое ожидание относительно стационарного распределения рассматриваемой цепи. Элементы матрицы P^n будем обозначать $p_{ij}^{(n)}$. Предположим также, что

$$\sigma^2 = \sum_{r=1}^d \bar{f}^2(r)\pi_r + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r,q=1}^d \bar{f}(r)\bar{f}(q)\pi_r p_{rq}^{(n)} > 0,$$

где $\bar{f}(r) = f(r) - a$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\text{Var}_{x_0} \zeta_n^2 = n\sigma^2(1 + o(1)),$$

и при этом имеет место следующее асимптотическое разложение в центральной предельной теореме (см., например, [8]):

$$\sup_z \left| \mathbf{P}_{x_0} \left(\frac{\zeta_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < z \right) - \Phi(z) + n^{-1/2} Q(z) \right| = o(1). \quad (3)$$

Здесь $\Phi(z)$ — функция распределения стандартного нормального закона,

$$Q(z) = \lambda(x^2 - 1)\Phi'(z), \quad \lambda = \mu_3/(6\sigma^3),$$

а

$$\begin{aligned} \mu_3 = & \sum_{r=1}^d \bar{f}^3(r) \pi_r + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r,q=1}^d \bar{f}^2(r) \bar{f}(q) \pi_r p_{rq}^{(n)} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r,q=1}^d \bar{f}(r) \bar{f}^2(q) \pi_r p_{rq}^{(n)} \\ & + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r,q,l=1}^d \bar{f}(r) \bar{f}(q) \bar{f}(l) \pi_r p_{rq}^{(m)} p_{ql}^{(n)}. \end{aligned}$$

Из (3) следует, что квантиль

$$z_{n,\alpha} = \sup\{z: \mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n < z) \leq \alpha\}$$

допускает представление

$$z_{n,\alpha} = na + u_\alpha \sigma n^{1/2} + \lambda \sigma (u_\alpha^2 - 1) + o(1). \quad (4)$$

Рассмотрим меры

$$\mu_n(A) = \sigma \sqrt{2\pi n} \mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n - na \in A), \quad A \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}.$$

Поскольку случайные величины ζ_n нерешетчатые, справедлива следующая форма локальной предельной теоремы (см. теорему 5.4 в [9]): для любой непрерывной функции $g(u)$, имеющей компактный носитель, при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_z \left| \int g(u - z) \mu_n(du) - \exp\left(-\frac{z^2}{2n\sigma^2}\right) \int g(u) du \right| \rightarrow 0. \quad (5)$$

В частности, μ_n слабо сходится к мере Лебега. Кроме того, из (5) следует, что

$$\sup_z \mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n = z) = o(n^{-1/2}). \quad (6)$$

Легко проверить, что (см. лемму 2.11 в [9])

$$\sup_z \mathbf{P}_{x_0}(z \leq \zeta_n < z + 1) \leq cn^{-1/2}. \quad (7)$$

Нам потребуется несколько иная версия локальной предельной теоремы (5). Введем обозначение

$$\mu_n^{(q)}(A) = \sigma \sqrt{2\pi n} \mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n - na \in A, x_n = q), \quad A \in \mathfrak{B}_{\mathbf{R}}.$$

В [10] показано, что $\mu_n^{(q)}$ слабо сходится к произведению мер $\lambda \times \pi$. Это означает, что для любой непрерывной функции $g(u)$, имеющей компактный носитель, при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_z \left| \int g(u - z) \mu_n^{(q)}(du) - \pi_q \exp\left(-\frac{z^2}{2n\sigma^2}\right) \int g(u) du \right| \rightarrow 0. \quad (8)$$

2.2. Сопряженная цепь Маркова

Следуя Шевчаку (см. [10]), рассмотрим примитивную матрицу $Q(s)$ с элементами

$$q_{rq}(s) = e^{sf(q)} p_{rq}, \quad 1 \leq r, q \leq d, \quad s \in \mathbf{R}. \quad (9)$$

По теореме Перрона–Фробениуса (см., например, теорему 8.2.11 в [1]) максимальное собственное значение $Q(s)$, называемое также спектральным радиусом, является простым, а отвечающие ему левый и правый собственные векторы имеют только положительные компоненты. Обозначим эти характеристики, соответственно, $\rho(s)$, $u(s)$ и $v(s)$.

Определим элементы сопряженной матрицы переходных вероятностей $P(s)$ следующим образом:

$$p_{rq}(s) = \frac{e^{sf(q)} p_{rq} v_q(s)}{\sum_{k=1}^d e^{sf(k)} p_{rk} v_k(s)} = \frac{e^{sf(q)} p_{rq} v_q(s)}{\rho(s) v_r(s)}.$$

Очевидно, матрица $P(s)$ стохастична. При этом $P(0) = P$. Пусть $\pi(s)$ является стационарным распределением, отвечающим $P(s)$. Оно может быть выражено через компоненты собственных векторов $u(s)$ и $v(s)$ следующим образом:

$$\pi_i(s) = \frac{u_i(s) v_i(s)}{\langle u(s), v(s) \rangle}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (10)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Пусть $\mathbf{P}_{x_0}^{(s)}$ и $\mathbf{E}_{x_0}^{(s)}$ обозначают, соответственно, вероятностную меру на σ -алгебре борелевских подмножеств $\mathcal{S}^\infty$, порожденную парой $P(s)$, x_0 , и математическое ожидание по этой мере.

Предложение 1. Для любых измеримых функций $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ и $h: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathbf{R}$ и любого $s \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E}_{x_0} g(\zeta_n) h(x^{(n)}) = v_{x_0}(s) \rho^n(s) \mathbf{E}_{x_0}^{(s)} g(\zeta_n) e^{-s\zeta_n} h(x^{(n)}) (v_{x_n}(s))^{-1}.$$

Доказательство. Утверждение следует немедленно из очевидного соотношения

$$\mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n \in A, x^{(n)} \in B) = v_{x_0}(s) \rho^n(s) \sum_{x^{(n)} \in (\zeta_n \in A) \cap B} p_{x_0, x_1}(s) \dots p_{x_{n-1}, x_n}(s) e^{-s\zeta_n} (v_{x_n}(s))^{-1},$$

где $A \in \mathfrak{B}_{\mathbf{R}}$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathcal{S}^n}$.

Предложение доказано.

Доказанное предложение устанавливает так называемое преобразование Крамера. В частности, если

$$g(t) = \mathbf{1}_{[nz, \infty)}(t), \quad h(x^{(n)}) \equiv 1,$$

то из предложения следует, что для любого $s > 0$

$$\mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n \geq nz) \leq \Sigma_n(s) \rho^n(s) e^{-nsz}, \quad (11)$$

где

$$\Sigma_n(s) = v_{x_0}(s) \sum_{q=1}^d p_{x_0, q}^{(n)}(s) (v_q(s))^{-1}.$$

Ввиду (10) для любого фиксированного s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n(s) = v_{x_0}(s) \sum_{q=1}^d u_q(s) / \langle u(s), v(s) \rangle.$$

Если же

$$g(t) = \mathbf{1}_{[nz, \infty)}(t), \quad h(x^{(n)}) = \mathbf{1}_A(x^{(n)}),$$

то для любого $s > 0$

$$\mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n \geq nz; x^{(n)} \in A) \leq \rho^n(s) e^{-nsz} \frac{v_{x_0}(s)}{\min_q v_q(s)} \mathbf{P}_{x_0}^{(s)}(A). \quad (12)$$

Стоит заметить, что для любого фиксированного $s_0 > 0$

$$\min_{|s| \leq s_0} \min_q v_q(s) > 0.$$

Неравенства Маркова–Крамера (12) и (11) интересны сами по себе.

Заметим, что $\rho(s)$ обладает многими свойствами производящей функции. Введем обозначения

$$M(s) = \frac{d}{ds} \log \rho(s)$$

и

$$\sigma^2(s) = \sum_{r=1}^d f_s^2(r) \pi_r(s) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r, q=1}^d f_s(r) f_s(q) \pi_r(s) p_{rq}^{(n)}(s),$$

где $f_s(\cdot) = f(\cdot) - M(s)$.

По лемме 4 в [10]

$$M(s) = \mathbf{E}_{\pi(s)} f(x_k) = \sum_{r=1}^d f(r) \pi_r(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При этом $\sigma^2(s) = M'(s) > 0$ для всех s , то есть $M(s)$ строго возрастает. Это означает, что

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} M(s) &= f^+ = \max_{1 \leq r \leq d} f(r), \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} M(s) &= f^- = \min_{1 \leq r \leq d} f(r).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$M(0) = \mathbf{E}_\pi f(x_k) = a, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Пусть $s(t)$ является единственным корнем уравнения

$$M(s) = t, \quad f^- < t < f^+.$$

Рассмотрим так называемую функцию уклонений

$$\alpha(t) = \min_s \rho(s) e^{-st} = \rho(s(t)) e^{-ts(t)}, \quad t \in (f^-, f^+),$$

которая строго растет в $(f^-, 0)$ и строго убывает в $(0, f^+)$. Очевидно, $\alpha(0) = 1$.

Легко проверить, что асимптотические формулы (3)–(5) и (8) так же, как и соотношения (6) и (7), остаются в силе при замене $\mathbf{P}_{x_0}$ на $\mathbf{P}_{x_0}^{(s)}$. Более того, они выполняются равномерно по $|s| \leq s_0$. Рассмотрим последовательность мер

$$\mu_{n,s}^{(q)}(A) = \sigma(s) \sqrt{2\pi n} \mathbf{P}_{x_0}^{(s)}(\zeta_n - nM(s) \in A, x_n = q), \quad n = 1, 2, \dots, \quad q \in \mathcal{S},$$

и класс $\mathcal{G}$ равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций. Дополнительно предположим, что функции, образующие класс $\mathcal{G}$, равномерно интегрируемы относительно $\mu_{n,s}^{(q)}$, $|s| \leq s_0$. Такой класс определяется тройкой $(L, \omega(t), \Delta(t))$, где

$$\begin{aligned}\sup_u |g(u)| &\leq L; & \sup_u |g(u+t) - g(u)| &\leq \omega(t); \\ \sup_{|s| \leq s_0} \int_{|u| \geq t} |g(u)| \mu_{n,s}^{(q)}(du) &\leq \Delta(t),\end{aligned}$$

причем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = 0.$$

Будем обозначать этот класс $\mathcal{G}(L, \omega(t), \Delta(t))$.

Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{G}(L, \omega(t), \Delta(t))$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \sup_{|s| \leq s_0} \sup_z \left| \int g(u-z) \mu_{n,s}^{(q)}(du) - \pi_q \exp\left(-\frac{z^2}{2n\sigma^2(s)}\right) \int g(u) du \right| \rightarrow 0. \quad (14)$$

2.3. Одна теорема о больших уклонениях

Следующая теорема является модификацией теоремы 1 в [10]. Она играет ключевую роль в наших дальнейших рассуждениях.

Теорема 1. Если случайные величины $f(x_k)$ нерешетчатые, то для t таких, что $a < t' \leq t \leq t'' < f^+$, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n \geq nt) = A(t)n^{-1/2}\alpha^n(t)(1 + \omega_n(t)),$$

где

$$A(t) = A(t, x_0) = \frac{v_{x_0}(s(t))}{s(t)\sigma(s(t))\sqrt{2\pi}},$$

а

$$\sup_{t' \leq t \leq t''} |\omega_n(t)| = o(1).$$

В частности, для каждого $t_0 \in [t', t'']$ и любых t_1 и t_2

$$\mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n \geq nt_0 + n^{1/2}t_1 + t_2) = An^{-1/2}e^{-n^{1/2}t_1s(t_0)}\alpha^n(t_0)(1 + o(1)),$$

где

$$A = A(x_0, t_0, t_1, t_2) = v_{x_0}(s(t_0))e^{-t_2s(t_0)} \frac{1}{\sigma(s(t_0))} \varphi(t_1/\sigma(s(t_0))).$$

Доказательство. С учетом мер $\mu_{n,s}^{(q)}(A)$ из предложения 1 получаем, что

$$\mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n \geq nt, x_n = q) = \frac{v_{x_0}(s)e^{-nsM(s)}\rho^n(s)}{\sigma(s)\sqrt{2\pi n}} \int_{u \geq n(t-M(s))} e^{-su} \mu_{n,s}^{(q)}(du).$$

Положим $t = M(s)$. Очевидно, что при $a < t' \leq t \leq t'' < f^+$ справедливы неравенства $0 < s' \leq s(t) \leq s'' < \infty$.

Введем обозначение

$$g^{(s)}(u) = e^{-su} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(u), \quad 0 < s' \leq s \leq s'' < \infty.$$

Определим для $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{G}_{\pm}(\varepsilon) = \{g(u) : g(u) = g_{\pm}^{(s)}(u), \quad 0 < s' \leq s \leq s'' < \infty\},$$

где

$$g_+^{(s)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{если } u \leq -\varepsilon, \\ 1 + u/\varepsilon, & \text{если } -\varepsilon \leq u \leq 0, \\ e^{-su}, & \text{если } u \geq 0, \end{cases}$$

а

$$g_-^{(s)}(u) = \min(e^{-su}, u/\varepsilon) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(u).$$

Очевидно, что

$$g_-^{(s)}(u) \leq g^{(s)}(u) \leq g_+^{(s)}(u), \quad \int (g_+^{(s)}(u) - g_-^{(s)}(u)) du \leq \varepsilon. \quad (15)$$

Легко видеть, что

$$\sup_{g \in \mathcal{G}_+(\varepsilon) \cup \mathcal{G}_-(\varepsilon)} \sup_u |g(u)| \leq 1,$$

а

$$\sup_{g \in \mathcal{G}_+(\varepsilon) \cup \mathcal{G}_-(\varepsilon)} \sup_u |g(u+t) - g(u)| \leq (s'' + 1/\varepsilon)t = \omega_\varepsilon(t).$$

Далее, для $t > 0$

$$\int_{u>t} e^{-su} \mu_{n,s}^{(q)}(du) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{t+j \leq u < t+j+1} e^{-su} \mu_{n,s}^{(q)}(du) \leq \sup_u \mu_{n,s}^{(q)}([u, u+1)) e^{-st} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-sj}.$$

Из сопряженного варианта соотношения (7) следует, что

$$\sup_{s' \leq s \leq s''} \sup_u \mu_{n,s}^{(q)}([u, u+1)) < cn^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$\int_{u>t} e^{-su} \mu_{n,s}^{(q)}(du) \leq K e^{-s't},$$

где K зависит от s' и s'' . Полагая

$$\Delta_0(t) = \min(1, K e^{-s't}), \quad t > 0,$$

закключаем, что

$$\mathcal{G}_+(\varepsilon) \cup \mathcal{G}_-(\varepsilon) \subset \mathcal{G}(1, \omega_\varepsilon(t), \Delta_0(t)).$$

Из (14) и (15) следует, что для любого $\eta > 0$ существует $n_0(\eta)$ такое, что при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \int g^{(s)}(u-z) \mu_{n,s}^{(q)}(du) &\leq \int g_+^{(s)}(u-z) \mu_{n,s}^{(q)}(du) \leq \pi_q \exp\left(-\frac{z^2}{2n\sigma^2(s)}\right) \int g_+^{(s)}(u) du + \eta \\ &\leq \pi_q \exp\left(-\frac{z^2}{2n\sigma^2(s)}\right) \int g^{(s)}(u) du + \varepsilon + \eta, \\ \int g^{(s)}(u-z) \mu_{n,s}^{(q)}(du) &\geq \int g_-^{(s)}(u-z) \mu_{n,s}^{(q)}(du) \geq \pi_q \exp\left(-\frac{z^2}{2n\sigma^2(s)}\right) \int g_-^{(s)}(u) du - \eta \\ &\geq \pi_q \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2(s)}\right) \int g^{(s)}(u) du - \varepsilon - \eta. \end{aligned}$$

Заметим, что все неравенства выполняются равномерно по $s, s' \leq s \leq s''$.

Поскольку ε и η произвольны, приходим к заключению, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{s' \leq s \leq s''} \sup_z \left| \int g^{(s)}(u-z) \mu_{n,s}^{(q)}(du) - \pi_q \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2(s)}\right) \int g^{(s)}(u-z) du \right| \rightarrow 0. \quad (16)$$

Чтобы теперь прийти к основному утверждению теоремы, остается положить $z = 0$ и $t = M(s)$.

При

$$t = nt_0 + n^{1/2}t_1 + t_2, \quad t_0 \in [z', z'']$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n \geq nt_0 + n^{1/2}t_1 + t_2, x_n = q) \\ = \frac{v_{x_0}(s)e^{-nsM(s)}\rho^n(s)}{\sigma(s)\sqrt{2\pi n}} \int_{u \geq n(t_0 + n^{-1/2}t_1 + t_2n^{-1} - M(s))} g^{(s)}(u)\mu_{n,s}^{(q)}(du). \end{aligned}$$

Положим $M(s) = t_0$ и обозначим для краткости $s_0 = s(t_0)$, $\sigma_0 = \sigma(s_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n \geq nt_0 + n^{1/2}t_1 + t_2, x_n = q) &= \frac{v_{x_0}(s_0)\alpha^n(t_0)}{\sigma_0\sqrt{2\pi n}} \int_{u \geq n^{1/2}t_1 + t_2} g^{(s_0)}(u)\mu_{n,s_0}^{(q)}(du) \\ &= \frac{v_{x_0}(s_0)\alpha^n(t_0) \exp(-s_0t_1n^{1/2} - s_0t_2)}{\sigma_0\sqrt{2\pi n}} \int g^{(s_0)}(u + n^{1/2}t_1 + t_2)\mu_{n,s_0}^{(q)}(du). \end{aligned}$$

Ввиду (16) приходим к второму утверждению теоремы. Теорема доказана полностью.

В частности, из теоремы следует, что

$$\sup_{t' \leq t \leq t''} \mathbf{P}_{x_0}(\zeta_n = nt) = o(n^{-1/2}\alpha^n(t)). \quad (17)$$

3. Отношение правдоподобия как сумма случайных величин, заданных на состояниях цепи Маркова

Пусть A — неотрицательная примитивная $d \times d$ матрица с элементами a_{rq} , $r, q = 1, \dots, d$. Через ρ , u и v обозначим, соответственно, спектральный радиус, левый и правый собственные векторы этой матрицы. Согласно теореме 8.5.1 в [1] ρ является простым собственным значением, а все компоненты u и v строго положительны. Выберем их таким образом, чтобы $\langle u, 1 \rangle = \langle v, 1 \rangle = 1$, где $1 = (1, \dots, 1)^T$. Рассмотрим $d^2 \times d^2$ матрицу $\hat{A}$ с элементами

$$\hat{a}_{jk} = \delta_{q_j, r_k} a_{r_k, q_k}, \quad j, k = 1, \dots, d^2, \quad (18)$$

где r_j , q_j , r_k и q_k определяются из уравнений

$$j = (r_j - 1)d + q_j, \quad k = (r_k - 1)d + q_k, \quad (19)$$

тогда как δ_{rq} — символ Кронекера. Через $\hat{\rho}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$ обозначим, соответственно, спектральный радиус, левый и правый собственные векторы $\hat{A}$, предполагая, что $\langle \hat{u}, 1 \rangle_1 = \langle \hat{v}, 1 \rangle_1 = 1$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ означает скалярное произведение в $\mathbf{R}^{d^2}$.

Рассмотрим вектор $a = (a_1, \dots, a_d)$ с компонентами

$$a_r = \sum_{q=1}^d a_{rq}, \quad r = 1, \dots, d.$$

Лемма 1. Если A и $\hat{A}$ связаны соотношением (18), то

$$\hat{\rho} = \rho, \quad \hat{u}_j = (\langle u, a \rangle)^{-1} u_{r_j} a_{r_j, q_j}, \quad \hat{v}_j = d^{-1} v_{q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, d^2.$$

В частности, если A стохастична, то $\hat{u}_j = u_{r_j} a_{r_j, q_j}$.

Доказательство. Поскольку строки $\hat{A}$ с номерами $r, d+r, \dots, d(d-1)+r$ идентичны, получаем, что

$$a_{11}\hat{v}_1 + \dots + a_{1d}\hat{v}_d = \hat{\rho}\hat{v}_1,$$

...

$$a_{d1}\hat{v}_1 + \dots + a_{dd}\hat{v}_d = \hat{\rho}\hat{v}_d,$$

и

$$\hat{v}_q = \hat{v}_{d+q} = \dots = \hat{v}_{d(d-1)+q}, \quad q = 1, 2, \dots, d.$$

Полагая $x_i = \hat{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, d$, $x = (x_1, \dots, x_d)^T$, получаем, что $Ax = \hat{\rho}x$, то есть $\hat{\rho}$ является собственным значением A , отвечающим собственному вектору x , имеющему положительные компоненты. Заметим, что матрица $\hat{A}$ также примитивна. Из следствия 8.1.30 в [1] следует, что $\rho = \hat{\rho}$. Это означает, что

$$\hat{v}_q = \hat{v}_{d+q} = \dots = \hat{v}_{d(d-1)+q} = \lambda v_q, \quad \lambda > 0, \quad q = 1, 2, \dots, d.$$

Поскольку $\langle \hat{v}, 1 \rangle_1 = \langle v, 1 \rangle = 1$, делаем вывод, что $\hat{v}_j = d^{-1}v_{q_j}$.

Из равенства $\hat{A}^T \hat{u} = \rho \hat{u}$ следует, что

$$(\hat{u}_r + \hat{u}_{d+r} + \dots + \hat{u}_{d(d-1)+r})a_{rq} = \rho \hat{u}_{(r-1)d+q}, \quad r, s = 1, \dots, d.$$

Полагая

$$y_r = \hat{u}_r + \hat{u}_{d+r} + \dots + \hat{u}_{d(d-1)+r}, \quad r = 1, \dots, d,$$

получаем соотношения

$$y_r a_{rq} = \rho \hat{u}_{(r-1)d+q}, \quad r, q = 1, \dots, d,$$

откуда

$$a_{11}y_1 + \dots + a_{1d}y_d = \rho y_1,$$

...

$$a_{1d}y_1 + \dots + a_{dd}y_d = \rho y_d,$$

или

$$A^T y = \rho y, \quad y = \mu u, \quad \mu > 0,$$

где $y = (y_1, \dots, y_d)^T$. Таким образом,

$$\hat{u}_j = \hat{u}_{(r_j-1)d+q_j} = \mu \rho^{-1} u_{r_j, q_j},$$

а

$$1 = \langle \hat{u}, 1 \rangle_1 = \mu \rho^{-1} \sum_{r_j, q_j} u_{r_j, q_j} a_{r_j, q_j} = \mu \rho^{-1} \sum_{r, q} u_r a_{rq} = \mu \rho^{-1} \langle u, a \rangle.$$

Лемма доказана.

Применим к матрице P переход $A \rightarrow \hat{A}$, определяемый соотношениями (18) и (19). Это значит, что одновременно с цепью x_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, имеющей матрицу переходных вероятностей P , мы рассматриваем цепь $\hat{x}_n$ с переходными вероятностями

$$\hat{p}_{jk} = \delta_{qj, r_k} p_{r_k, q_k}, \quad j, k = 1, \dots, d^2 \quad (20)$$

(см. стр. 231 в [11], а также [12]).

Новая цепь тесно связана с исходной. Точнее, согласно (18)–(20) $\hat{x}_k = j$, если $x_k = r_j$, $x_{k+1} = q_j$. Так что мы можем считать, что $\hat{x}_k = (x_k, x_{k+1})$. При этом, если P неприводима и эргодична, то $\hat{P}$ также неприводима и эргодична.

Обозначим через π и $\hat{\pi}$ стационарные распределения, соответственно, x_n и $\hat{x}_n$. Ввиду леммы 1

$$\hat{\pi}_j = \pi_{r_j} p_{r_j, q_j}. \quad (21)$$

Рассмотрим отношение правдоподобия (1). Запишем его логарифм в виде

$$\ln r(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^n \ln \frac{p_{x_{k-1}, x_k}(1)}{p_{x_{k-1}, x_k}(2)}.$$

Положим для $1 \leq j = (r_j - 1)d + q_j \leq d^2$

$$f(j) = \ln \frac{p_{r_j, q_j}(1)}{p_{r_j, q_j}(2)}. \quad (22)$$

Если $p_{r_j, q_j}(1) = p_{r_j, q_j}(2) = 0$, то полагаем $f(j) = 0$. Будем писать $P^{(1)} \sim P^{(2)}$, если

$$((r, q): p_{r, q}(1) = 0) = ((r, q): p_{r, q}(2) = 0).$$

Принимая во внимание (22), запишем логарифм отношения правдоподобия в виде

$$\ln r(x^{(n)}) = f(\hat{x}_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(\hat{x}_k) = f(\hat{x}_0) + \zeta_{n-1}.$$

В соответствии с (2) вероятности ошибочных решений можно записать в виде

$$\mathcal{P}_1 = \mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(\ln r(x^{(n)}) < \ln r_{cr}) = \sum_q p_{x_0, q}(1) \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0}^{(1)}(\zeta_{n-1} < \ln r_{cr} - f(\hat{x}_0)), \quad (23)$$

$$\mathcal{P}_2 = \mathbf{P}_{x_0}^{(2)}(\ln r(x^{(n)}) \geq \ln r_{cr}) = \sum_q p_{x_0, q}(2) \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0}^{(2)}(\zeta_{n-1} \geq \ln r_{cr} - f(\hat{x}_0)). \quad (24)$$

Здесь r_{cr} один из критических уровней $r_{NP}^{(n)}, r_B^{(n)}$ или $r_{MM}^{(n)}$, определенных во введении, тогда как $\hat{\mathbf{P}}_{x_0}^{(i)}$, $i = 1, 2$, является марковской мерой, определяемой начальным состоянием $\hat{x}_0 = (x_0, q)$ и матрицей переходных вероятностей $\hat{P}^{(i)}$.

Предположим, что $P^{(1)} \sim P^{(2)}$. Это означает, что

$$-\infty < \min_j f(j) \leq \max_j f(j) < \infty.$$

Обозначим через $\hat{\pi}^{(i)} = (\hat{\pi}_1^{(i)}, \dots, \hat{\pi}_d^{(i)})$ стационарные распределения, отвечающие $\hat{P}^{(i)}$, $i = 1, 2$. Пусть математическое ожидание $E_{\hat{\pi}^{(i)}}$ отвечает $\hat{\pi}^{(i)}$, $i = 1, 2$. Ввиду (21)

$$E_{\hat{\pi}^{(1)}} f(\hat{x}_1) = \sum_j \hat{\pi}_j^{(1)} f(j) = \sum_{r,q} \pi_r^{(1)} p_{rq}(1) \ln \frac{p_{rq}(1)}{p_{rq}(2)}.$$

Пусть $a_r(i, k)$ обозначает дивергенцию Кульбака–Лейблера распределения $p(i, r) = (p_{r1}(i), \dots, p_{rd}(i))$ от $p(k, r) = (p_{r1}(k), \dots, p_{rd}(k))$. Тогда

$$a_1 = E_{\hat{\pi}^{(1)}} f(\hat{x}_1) = \sum_r \pi_r^{(1)} a_r(1, 2) > 0. \quad (25)$$

Подобным же образом

$$a_2 = E_{\hat{\pi}^{(2)}} f(\hat{x}_1) = - \sum_r \pi_r^{(2)} a_r(2, 1) < 0. \quad (26)$$

Из (3), (25) и (26) следует, что, по крайней мере, одна из вероятностей $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ является вероятностью больших уклонений сумм случайных величин, заданных на марковской цепи $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots$, выходящей из $\hat{x} = (x_0, q)$, $q \in \mathcal{S}$. Что касается рисков $R_{NP}^{(n)}$, $R_B^{(n)}$ и $R_{MM}^{(n)}$, то все они выражаются через вероятности больших уклонений.

4. Простые альтернативы

4.1. Асимптотика риска Неймана–Пирсона

Начнем с асимптотической формулы для $\ln r_{NP}$. Введем обозначение

$$\bar{f}(j) = f(j) - a_1 = \ln \frac{p_{rj,qj}(1)}{p_{rj,qj}(2)} - a_1, \quad j = 1, \dots, d^2,$$

и определим

$$\bar{\sigma}^2 = \sum_{j=1}^{d^2} \bar{f}^2(j) \hat{\pi}_j^{(1)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{d^2} \bar{f}(j) \bar{f}(k) \hat{\pi}_j^{(1)} \hat{p}_{jk}^{(n)}(1) \quad (27)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_3 = & \sum_{j=1}^{d^2} \bar{f}^3(j) \hat{\pi}_j^{(1)} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{d^2} \bar{f}^2(j) \bar{f}(k) \hat{\pi}_j^{(1)} \hat{p}_{jk}^{(n)}(1) + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{d^2} \bar{f}(j) \bar{f}^2(k) \hat{\pi}_j^{(1)} \hat{p}_{jk}^{(n)}(1) \\ & + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j,k,l=1}^{d^2} \bar{f}(j) \bar{f}(k) \bar{f}(l) \hat{\pi}_j^{(1)} \hat{p}_{jk}^{(m)}(1) \hat{p}_{kl}^{(n)}(1). \end{aligned}$$

Здесь элементы матрицы $(\hat{P}^{(1)})^n$ выражаются через элементы матрицы $(P^{(1)})^n$ следующим образом:

$$\hat{p}_{jk}^{(n)}(1) = p_{rjrk}^{(n)}(1) p_{rkqk}(1).$$

Положим для краткости

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\mu}}{6\bar{\sigma}^3}. \quad (28)$$

Лемма 2. Пусть

$$t_n = t_n(x_0) = (n-1)a_1 + (n-1)^{1/2}u_\alpha\bar{\sigma} + a_0,$$

где

$$a_0 = \bar{\sigma}\bar{\lambda}(u_\alpha^2 - 1) + a_{x_0}(1, 2).$$

Если $\bar{\sigma} > 0$ и случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые, то

$$\mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(\ln r(x^{(n)}) \leq t_n) = \alpha + o(n^{-1/2}).$$

Доказательство. Из (3), принимая во внимание равенство $\mathbf{E}_{\hat{\pi}^{(1)}} f(x_k) = a_1$, получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0}^{(1)}(\zeta_{n-1} < t_n - f(\hat{x}_0)) &= \Phi(u_\alpha) + \frac{\Phi'(u_\alpha)}{\bar{\sigma}\sqrt{n-1}}(a_0 - f(\hat{x}_0)) - \frac{\bar{Q}(u_\alpha)}{\sqrt{n-1}} + o(n^{-1/2}) \\ &= \alpha + \frac{\Phi'(u_\alpha)}{\bar{\sigma}\sqrt{n-1}}(a_{x_0} - f(\hat{x}_0)) + o(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Здесь $\bar{Q}$ то же, что и в (3) с заменой λ на $\bar{\lambda}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(\ln r(x^{(n)}) < t_n) &= \sum_q p_{x_0,q}(1) \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0}^{(1)}(\zeta_{n-1} < t_n - f(\hat{x}_0)) \\ &= \alpha + \frac{\Phi'(u_\alpha)}{\bar{\sigma}\sqrt{n-1}} \left(a_{x_0} - \sum_q p_{x_0,q}(1) f(\hat{x}_0) \right) + o(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$a_{x_0}(1, 2) = \sum_q p_{x_0,q}(1) \ln \frac{p_{x_0,q}(1)}{p_{x_0,q}(2)} = \sum_q p_{x_0,q}(1) f(\hat{x}_0).$$

Полагая в (23) $\ln r_{cr} = t_n$, приходим к требуемому заключению. Лемма доказана.

Имея в виду (9), положим

$$B(s) = \|b_{r,q}(s)\|_{r,q=1}^d, \quad b_{r,q}(s) = p_{r,q}^s(1) p_{r,q}^{1-s}(2), \quad \hat{B} = \|\hat{b}_{j,k}(s)\|_{j,k}^{d^2},$$

где

$$\hat{b}_{j,k}(s) = \hat{p}_{j,k}(2) e^{sf(k)} = p_{r_k,q_k}^s(1) p_{r_k,q_k}^{1-s}(2) \delta_{q_j,r_k}.$$

Очевидно,

$$B(0) = P^{(2)}, \quad B(1) = P^{(1)}, \quad \hat{B}(0) = \hat{P}^{(2)}, \quad \hat{B}(1) = \hat{P}^{(1)}.$$

Через $\rho(s)$, $u(s)$ и $v(s)$ обозначим, соответственно, спектральный радиус, левый и правый собственные векторы $B(s)$. Соответствующие характеристики $\hat{B}(s)$ обозначим $\hat{u}(s)$ и $\hat{v}(s)$. Вспомним о том, что спектральные радиусы обеих матриц одинаковы. Очевидно,

$$\rho(0) = \rho(1) = 1, \quad u(0) = u^{(2)}, \quad u(1) = u^{(1)}, \quad v(0) = v^{(2)}, \quad v(1) = v^{(1)},$$

а

$$\hat{u}(0) = \hat{u}^{(2)}, \quad \hat{u}(1) = \hat{u}^{(1)}, \quad \hat{v}(0) = \hat{v}^{(2)}, \quad \hat{v}(1) = \hat{v}^{(1)},$$

где $u^{(i)}$, $v^{(i)}$ и $\hat{u}^{(i)}$, $\hat{v}^{(i)}$ — собственные векторы $P^{(i)}$ и $\hat{P}^{(i)}$, соответственно.

Рассмотрим функцию уклонений

$$\alpha(t) = \min_s \rho(s) e^{-st}.$$

Полагая в теореме 1

$$x_0 = \hat{x}_0, \quad t_0 = a_1, \quad t_1 = u_\alpha \bar{\sigma}, \quad t_2 = \bar{\sigma} \hat{\lambda}(u_\alpha^2 - 1) + a_{x_0}(1, 2) - f(\hat{x}_0),$$

получаем, что там

$$s(t_0) = 1, \quad \sigma(s(t_0)) = \bar{\sigma}, \quad \alpha_2(a_1) = e^{-a_1},$$

и, следовательно,

$$\hat{P}_{\hat{x}_0}^{(2)}(\zeta_{n-1} \geq t_n - f(\hat{x}_0)) = A n^{-1/2} e^{-n^{1/2} u_\alpha \bar{\sigma}} e^{-(n-1)a_1} (1 + o(1)),$$

где

$$A = \bar{\sigma}^{-1} \Phi'(u_\alpha) \hat{v}_{\hat{x}_0}^{(2)}(1) \exp(-\bar{\sigma} \bar{\lambda}(u_\alpha^2 - 1) - a_{x_0}(1, 2) + f(\hat{x}_0)).$$

Вспомним, что $\hat{v}_k^{(2)}(s)$ является k -й компонентой вектора $\hat{v}^{(2)}(s)$. Заметим, что $\hat{B}^{(2)}(1) = \hat{P}^{(1)}$. Тогда из леммы 1 следует, что

$$\hat{v}_{\hat{x}_0}^{(2)}(1) = d^{-1} v_q^{(1)}, \quad 1 \leq q \leq d,$$

где $v^{(1)}$ — правый собственный вектор матрицы $P^{(1)}$. Это означает, что

$$\sum_{q=1}^d e^{f(\hat{x}_0)} p_{x_0, q}(2) v_q^{(1)} = \sum_{q=1}^d p_{x_0, q}(1) v_q^{(1)} = v_{x_0}^{(1)}.$$

Суммируя по q и принимая во внимание (24), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Если $P^{(1)} \sim P^{(2)}$, а случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые, то при $n \rightarrow \infty$

$$R_{NP}^{(n)} = A_{NP} n^{-1/2} e^{-n^{1/2} u_\alpha \bar{\sigma}} \rho_{NP}^n (1 + o(1)),$$

где

$$\rho_{NP} = e^{-a_1},$$

$$A_{NP} = d^{-1} \bar{\sigma}^{-1} v_{x_0}^{(1)} \Phi'(u_\alpha) \exp(a_1 - a_{x_0}(1, 2) - \bar{\sigma} \bar{\lambda}(u_\alpha^2 - 1)).$$

Критический уровень $r_{NP}^{(n)}$ допускает следующее представление:

$$\ln r_{NP}^{(n)} = (n-1)a_1 + n^{1/2} u_\alpha \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \bar{\lambda}(u_\alpha^2 - 1) + a_{x_0}(1, 2) + o(1).$$

4.2. Асимптотика байесовского и минимаксного рисков

Пусть

$$B^{(1)}(s) = B(1-s), \quad \hat{B}^{(1)}(s) = \hat{B}(1-s).$$

Очевидно, что

$$\hat{b}_{j,k}^{(1)}(s) = \hat{p}_{j,k}(1)e^{-sf(k)}, \quad \hat{B}^{(1)}(0) = \hat{P}^{(1)}.$$

Через $\rho_1(s)$, $u^{(1)}(s)$, $v^{(1)}(s)$, $\hat{u}^{(1)}(s)$, $\hat{v}^{(1)}(s)$ обозначим спектральный радиус и собственные векторы $B^{(1)}(s)$ и $\hat{B}^{(1)}(s)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \rho_1(s) &= \rho(1-s), \\ M_1(s) &= (\ln \rho_1(s))' = -M(1-s), \quad \sigma_1^2(s) = M_1'(s) = M'(1-s) = \sigma^2(1-s), \\ u^{(1)}(s) &= u(1-s), \quad v^{(1)}(s) = v(1-s), \\ \hat{u}^{(1)}(s) &= \hat{u}(1-s), \quad \hat{v}^{(1)}(s) = \hat{v}(1-s). \end{aligned}$$

Соответствующая функция уклонений приобретает вид

$$\alpha_1(t) = \min_s \rho_1(s)e^{-st} = \alpha(-t)e^t. \quad (29)$$

Теорема 3. Если $P^{(1)} \sim P^{(2)}$, а случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые, то при $n \rightarrow \infty$

$$R_B^{(n)} = r_B^{1-s_0} A_B n^{-1/2} \rho_B^n (1 + o(1)),$$

где

$$\rho_B = \min_s \rho(s) = \rho(s_0),$$

тогда как

$$A_B = \frac{v_{x_0}(s_0)}{d\rho(s_0)\sigma(s_0)\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{1-s_0} \right).$$

Доказательство. Пусть

$$\zeta'_{n-1} = - \sum_{k=1}^{n-1} f(\hat{x}_k).$$

Полагая в теореме 1

$$x_0 = \hat{x}_0, \quad t_0 = t_1 = 0, \quad t_2 = -\ln r_B + f(\hat{x}_0),$$

получаем, что там

$$s(t_0) = s_1 = 1 - s_0, \quad \sigma_1^2(s_1) = \sigma^2(s_0),$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\hat{x}_0}^{(1)}(\zeta'_{n-1} > -\ln r_B + f(\hat{x}_0)) \\ = \frac{\hat{v}_{\hat{x}_0}^{(1)}(1-s_0)}{(1-s_0)\sigma(s_0)\sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \alpha_1^{n-1}(0) \exp(-(1-s_0)(-\ln r_B + f(\hat{x}_0)))(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\alpha_1(0) = \min_s \rho(s) = \rho(s_0), \quad \hat{v}_{\hat{x}_0}^{(1)}(1 - s_0) = \hat{v}_{\hat{x}_0}^{(2)}(s_0) = d^{-1} v_q(s_0),$$

ввиду (23)

$$\mathcal{P}_1 = \frac{v_q(s_0) r_B^{1-s_0}}{d(1-s_0)\sigma(s_0)\sqrt{2\pi}} \sum_q p_{x_0,q}^{s_0}(1) p_{x_0,q}^{1-s_0}(2) n^{-1/2} \rho^{n-1}(s_0)(1 + o(1)).$$

С другой стороны, полагая в теореме 1

$$x_0 = \hat{x}_0, \quad t_0 = t_1 = 0, \quad t_2 = \ln r_B - f(\hat{x}_0),$$

получаем

$$s(t_0) = s_2 = s_0, \quad \sigma_2^2(s_2) = \sigma^2(s_0),$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0}^{(2)}(\zeta_{n-1} \geq + \ln r_B - f(\hat{x}_0)) \\ = \frac{\hat{v}_{\hat{x}_0}^{(2)}(s_0)}{s_0 \sigma(s_0) \sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \alpha^{n-1}(0) \exp(-s_0(\ln r_B - f(\hat{x}_0)))(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Здесь

$$\alpha(0) = \min_s \rho(s) = \rho(s_0), \quad \hat{v}_{\hat{x}_0}^{(2)}(s_0) = d^{-1} v_q(s_0).$$

Так что с помощью (24) находим, что

$$\mathcal{P}_2 = \frac{v_q(s_0) r_B^{-s_0}}{d s_0 \sigma(s_0) \sqrt{2\pi}} \sum_q p_{x_0,q}^{s_0}(1) p_{x_0,q}^{1-s_0}(2) n^{-1/2} \rho^{n-1}(s_0)(1 + o(1))$$

равномерно по r_{cr} , $0 < t' \leq r_{cr} \leq t'' < \infty$.

Принимая во внимание то, что $v(s_0)$ является правым собственным вектором $B(s_0)$, получаем, что

$$\sum_q p_{x_0,q}^{s_0}(1) p_{x_0,q}^{1-s_0}(2) v_q(s_0) = v_{x_0}(s_0),$$

откуда

$$\mathcal{P}_1 = \frac{v_{x_0}(s_0) r_B^{1-s_0}}{d(1-s_0)\sigma(s_0)\sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \rho^{n-1}(s_0)(1 + o(1)), \quad (30)$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{v_{x_0}(s_0) r_B^{-s_0}}{d s_0 \sigma(s_0) \sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \rho^{n-1}(s_0)(1 + o(1)). \quad (31)$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Если $P^{(1)} \sim P^{(2)}$, а случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые, то при $n \rightarrow \infty$ критический уровень и риск минимаксного теста допускают следующие представления:

$$r_{MM}^{(n)} = 1/s_0 - 1 + o(1)$$

и

$$R_{MM}^{(n)} = A_{MM} n^{-1/2} \rho_{MM}^n (1 + o(1)),$$

где

$$\rho_{MM} = \rho_B = \min_s \rho(s) = \rho(s_0),$$

тогда как

$$A_{MM} = \frac{v_{x_0}(s_0)}{d\rho(s_0)\sigma(s_0)s_0^{1-s_0}(1-s_0)^{s_0}\sqrt{2\pi}}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что оба соотношения (30) и (31) выполняются равномерно по r_B , $0 < t' \leq r_B \leq t'' < \infty$. Выберем в них r_B таким образом, чтобы

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2(1 + o(1)).$$

Легко видеть, что

$$r_B = 1/s_0 - 1 + o(1),$$

так что

$$r_{MM}^{(n)} = 1/s_0 - 1 + o(1).$$

Чтобы получить A_{MM} , следует подставить $r_B = 1/s_0 - 1$, скажем, в (31). Теорема доказана.

5. Сложные гипотезы

Рассмотрим группу перестановок $G = \{g\}$, действующую в S . Будем отождествлять g с упорядоченным множеством $\{g1, g2, \dots, gd\}$, где gi обозначает тот элемент S , который в результате действия g оказался на позиции i . Пусть 1 является единичным элементом G .

Введем обозначение

$$P_g^{(i)} = \|p_{r,q}(g, i)\|_{r,q=1}^d,$$

где

$$p_{r,q}(g, i) = p_{gr,gq}(1, i), \quad g \in G, \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, семейства $\mathcal{H}_i = \{P_g^{(i)}, g \in G\}$, $i = 1, 2$, либо совпадают, либо не имеют общих элементов. Далее мы полагаем, что они не пересекаются. Наша цель — изучить тесты для различения сложных гипотез $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Заметим, что может случиться, что, скажем, $P_g^{(1)} = P_1^{(1)}$, несмотря на то, что $g \neq 1$. Например, если $p_{r,q}(1, 1) \equiv d^{-1}$, то $\mathcal{H}_1$ содержит единственный элемент. Так что числа элементов в $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$, могут быть

гораздо меньшими, чем $|G|$. В дальнейшем мы предполагаем, что матрицы $P_1^{(1)}$ и $P_{g^*}^{(2)}$ строго положительны.

Несколько наивно сформулированную задачу можно интерпретировать следующим образом. Будем рассматривать $S = \{1, 2, \dots, d\}$ в качестве некоего алфавита. Тогда $x^{(n)}$ может рассматриваться как текст, написанный на одном из двух языков. Перестановка g интерпретируется как простейший код. Сама же задача состоит в том, чтобы определить, на каком языке написан закодированный текст.

Рассмотрим функции правдоподобия

$$p(x^{(n)}; g, i) = p_{x_0, x_1}(g, i) \dots p_{x_{n-1}, x_n}(g, i), \quad g \in G, \quad i = 1, 2.$$

Легко видеть, что статистика

$$p(x^{(n)}; i) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} p(x^{(n)}; g, i) \quad (32)$$

является G -инвариантной.

В качестве статистики критерия возьмем отношение правдоподобия

$$r(x^{(n)}) = \frac{p(x^{(n)}; 1)}{p(x^{(n)}; 2)}. \quad (33)$$

Решающее правило, основанное на этой статистике, определяется следующим образом:

$$D_r(x^{(n)}) = \begin{cases} \mathcal{H}_1, & \text{если } r(x^{(n)}) \geq r, \\ \mathcal{H}_2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (34)$$

Поскольку статистика $r(x^{(n)})$ является G -инвариантной, задача сводится к проверке простых альтернатив. Качество решающего правила (34) характеризуется вероятностями ошибочных решений

$$\bar{\mathcal{P}}_1 = \mathbf{P}_{x_0, 1}^{(1)}(r(x^{(n)}) < r), \quad \bar{\mathcal{P}}_2 = \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r(x^{(n)}) \geq r). \quad (35)$$

Здесь $\mathbf{P}_{x_0, 1}^{(1)}$ и $\mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}$ отвечают матрицам переходных вероятностей $P_1^{(1)}$ и $P_{g^*}^{(2)}$. Заметим, что в семействе $\mathcal{H}_2$ в качестве стандартной можно взять любую $P_g^{(2)}$, $g \in G$. Выбор зависит от того, как мы понимаем оптимальность критерия. В любом случае стандартная матрица $P_{g^*}^{(2)}$ должна быть в определенном смысле ближайшей к $P_1^{(1)}$ (см. главу 5 в [2]).

5.1. Критерий Неймана–Пирсона

Пусть

$$a_{i,j}(g, g') = \sum_r \pi_r^{(i)} a_r(g, i; g', j), \quad g, g' \in G, \quad i, j = 1, 2,$$

где

$$a_r(g, i; g', j) = \sum_q p_{r,q}(g, i) \ln \frac{p_{r,q}(g, i)}{p_{r,q}(g', j)}$$

является дивергенцией Кульбака–Лейблера распределения $\{p_{r,1}(g, i), \dots, p_{r,d}(g, i)\}$ от распределения $\{p_{r,1}(g', j), \dots, p_{r,d}(g', j)\}$. Предположим, что

$$\min_{g \neq 1} a_{11}(\mathbf{1}, g) > 0, \quad (36)$$

и существует g^* такое, что

$$\min_{g \neq g^*} a_{12}(\mathbf{1}, g) > a_{12}(\mathbf{1}, g^*). \quad (37)$$

Выберем $P_{g^*}^{(2)}$ в качестве стандартной матрицы семейства $\mathcal{H}_2$.

Лемма 3. Пусть $r_{NP}^{(n)}$ — любая последовательность критических уровней, отвечающих простым альтернативам $H_1: P = P_1^{(1)}$ и $H_2: P = P_{g^*}^{(2)}$, то есть

$$\ln r_{NP}^{(n)} = (n-1)a_{12}(\mathbf{1}, g^*) + (n-1)^{1/2}u_\alpha \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \bar{\lambda}(u_\alpha^2 - 1) + a_{x_0}(\mathbf{1}, 1; g^*, 2) + o(1), \quad (38)$$

где $\bar{\sigma}$ and $\bar{\lambda}$ вычисляются по формулам (27) и (28) с функцией

$$\bar{f}(j) = f(j) - a_1 = \ln \frac{p_{r_j, q_j}(\mathbf{1}, 1)}{p_{r_j, q_j}(g^*, 2)} - a_1, \quad j = 1, \dots, d^2.$$

Если матрицы $P_1^{(1)}$ и $P_{g^*}^{(2)}$ строго положительны, а случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые, то, полагая в (35) $r = r_{NP}^{(n)}$, получаем, что

$$\bar{\mathcal{P}}_1 = \alpha + o(n^{-1/2}).$$

Доказательство. Введем обозначение

$$r_{ij}(g, g') = \frac{\mathbf{p}(x^{(n)}; g, i)}{\mathbf{p}(x^{(n)}; g', j)}, \quad i, j = 1, 2, \quad g, g' \in G.$$

Тогда, имея в виду (32) и (33), получаем, что

$$\bar{\mathcal{P}}_1 = \mathbf{P}_{x_0, 1}^{(1)} \left(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) < r_{NP}^{(n)} \frac{1 + \Sigma_2}{1 + \Sigma_1} \right), \quad (39)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{g \neq 1} r_{11}(g, \mathbf{1}), \quad \Sigma_2 = \sum_{g \neq g^*} r_{22}(g, g^*).$$

Пусть

$$X_i = (x: \Sigma_i < n^{-1}), \quad i = 1, 2.$$

Представим $\bar{\mathcal{P}}_1$ в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_1 = & \mathbf{P}_{x_0, 1}^{(1)} \left(\ln r_{12}(\mathbf{1}, g^*) < t_{NP}^{(n)} + \ln \frac{1 + \Sigma_2}{1 + \Sigma_1}, X_1 \cap X_2 \right) \\ & + \mathbf{P}_{x_0, 1}^{(1)} \left(\ln r_{12}(\mathbf{1}, g^*) < t_{NP}^{(n)} + \ln \frac{1 + \Sigma_2}{1 + \Sigma_1}, X_1^c \cup X_2^c \right), \end{aligned}$$

где $t_{NP}^{(n)} = \ln r_{NP}^{(n)}$. Пусть θ обозначает любую переменную, принимающую значения из $[-1, 1]$. Тогда

$$\bar{\mathcal{P}}_1 = \mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(\ln r_{12}(\mathbf{1}, g^*) < t_{NP}^{(n)} + \theta n^{-1}) + 2\theta \mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(X_1^c) + 2\theta \mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(X_2^c). \quad (40)$$

По лемме 2

$$\mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(\ln r_{12}(\mathbf{1}, g^*) < t_{NP}^{(n)} + \theta n^{-1}) = \alpha + o(n^{-1/2}). \quad (41)$$

Остается доказать, что

$$\mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(X_i^c) = o(n^{-1/2}), \quad i = 1, 2. \quad (42)$$

Пусть C обозначает любую положительную постоянную. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(X_1^c) = \sum_{g \neq 1} \mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(\ln r_{11}(g, \mathbf{1}) > -\ln n - C).$$

Как и в (23),

$$\mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(\ln r_{11}(g, \mathbf{1}) > -\ln n - C) \leq \sum_q p_{x_0,q}(\mathbf{1}, 1) \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)}(\zeta_{n-1} > 2 \ln n),$$

где

$$\zeta_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(g, 1)}{p_{\hat{x}_k}(\mathbf{1}, 1)}.$$

Поскольку цепь $\{\hat{x}_k\}$ эргодична,

$$\hat{\mathbf{E}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)} \zeta_{n-1} = n \mathbf{E}_{\hat{\pi}^{(1)}} \ln \frac{p_{\hat{x}_1}(g, 1)}{p_{\hat{x}_1}(\mathbf{1}, 1)} (1 + o(1)),$$

где $\hat{\pi}^{(1)}$ обозначает стационарное распределение, отвечающее $\hat{P}_1^{(1)}$. Следовательно,

$$\hat{\mathbf{E}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)} \zeta_{n-1} = -n a_{11}(\mathbf{1}, g) (1 + o(1)).$$

С другой стороны, при $n \rightarrow \infty$

$$\widehat{\text{Var}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)} \zeta_{n-1} = O(n)$$

равномерно по $g \in G$.

С помощью неравенства Чебышева получаем, что

$$\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)}(\zeta_{n-1} > -2 \ln n) = O(n^{-1})$$

равномерно по $g \in G$. Таким образом, первая из оценок (42) установлена.

Подобным же образом для всех достаточно больших n получаем, что

$$\mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(X_2^c) \leq \sum_{g \neq g^*} \mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(\ln r_{22}(g, g^*) > -\ln n - C),$$

тогда как

$$\mathbf{P}_{x_0,1}^{(1)}(\ln r_{22}(g, g^*) > -\ln n - C) \leq \sum_q p_{x_0,q}(\mathbf{1}, 1) \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)}(\zeta'_{n-1} - \zeta''_{n-1} < -2 \ln n),$$

где

$$\zeta'_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(\mathbf{1}, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g^*, 2)}, \quad \zeta''_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(\mathbf{1}, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g, 2)}.$$

Поскольку

$$\mathbf{E}_{\hat{\pi}^{(1)}} \ln \frac{p_{\hat{x}_1}(\mathbf{1}, 1)}{p_{\hat{x}_1}(g, 2)} = a_{12}(\mathbf{1}, g),$$

закключаем, что

$$\hat{\mathbf{E}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)}(\zeta'_{n-1} - \zeta''_{n-1}) = n(a_{12}(\mathbf{1}, g^*) - a_{12}(\mathbf{1}, g))(1 + o(1)).$$

С другой стороны, при $n \rightarrow \infty$

$$\widehat{\text{Var}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)} \zeta'_{n-1} = O(n), \quad \widehat{\text{Var}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)} \zeta''_{n-1} = O(n)$$

равномерно по $g \in G$. Это означает, что

$$\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0,1}^{(1)}(\zeta'_{n-1} - \zeta''_{n-1} > -2 \ln n) = O(n^{-1}) \quad (43)$$

равномерно по $g \in G$. Тем самым, мы приходим к второй из оценок (42). Ввиду (40)–(43) первое утверждение леммы доказано.

Лемма 4. Пусть в теореме 2

$$P^{(1)} = P_1^{(1)}, \quad P^{(2)} = P_{g^*}^{(2)},$$

и пусть A_{NP} , $\bar{\sigma}$ и ρ_{NP} в этой теореме отвечают именно такому выбору конкурирующих матриц. Тогда в условиях леммы 3

$$\bar{\mathcal{P}}_2 = A_{NP} n^{-1/2} e^{-n^{1/2} u_{\alpha} \bar{\sigma}} \rho_{NP}^n (1 + o(1)).$$

Доказательство. Сначала оценим $\bar{\mathcal{P}}_2$ снизу. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_2 &= \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} \left(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) \geq r_{NP}^{(n)} \frac{1 + \Sigma_2}{1 + \Sigma_1} \right) \\ &\geq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} (r_{12}(\mathbf{1}, g^*) \geq r_{NP}^{(n)} (1 + \Sigma_2); \Sigma_2 < \varepsilon) = \mathcal{P}_-, \end{aligned}$$

где Σ_i , $i = 1, 2$, те же, что и в (39). Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_- &= \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} (r_{12}(\mathbf{1}, g^*) \geq r_{NP}^{(n)} (1 + \varepsilon)) - \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} (r_{12}(\mathbf{1}, g^*) \geq r_{NP}^{(n)}; \Sigma_2 \geq \varepsilon) \\ &= \mathcal{P}'_- - \mathcal{P}''_-. \end{aligned}$$

Ввиду теоремы 2

$$\mathcal{P}'_- = \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) \geq r_{NP}^{(n)})(1 - \omega(\varepsilon)),$$

где $\omega(t)$ обозначает любую положительную функцию такую, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0.$$

Очевидно, что для всех достаточно больших n

$$\mathcal{P}''_- \leq \sum_{g \neq g^*} \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) \geq r_{NP}^{(n)}; \ln r_{22}(g, g^*) > -C).$$

Далее, при условии, что n достаточно велико,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) \geq r_{NP}^{(n)}; \ln r_{22}(g, g^*) > -C) \\ \leq \sum_q p_{x_0, q}(g^*, 2) \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}(\zeta_{n-1} > t_n - C; \zeta'_{n-1} - \zeta''_{n-1} > -C), \end{aligned}$$

где

$$\zeta'_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(\mathbf{1}, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g^*, 2)}, \quad \zeta''_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(\mathbf{1}, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g, 2)}.$$

Пусть $\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2, s)}$ обозначает меру, сопряженную к $\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}$ с функцией (см., (9))

$$f(\hat{x}_k) = \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(\mathbf{1}, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g^*, 2)}.$$

Легко видеть, что

$$\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2, 1)} = \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, 1}^{(1)}.$$

Полагая в (12) $s = 1$, получаем, что

$$\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}(\zeta_{n-1} > t_n - C; \zeta'_{n-1} - \zeta''_{n-1} > -C) < C e^{-t_n} \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, 1}^{(1)}(\zeta'_{n-1} - \zeta''_{n-1} > -C).$$

Ввиду (43) справедливо соотношение

$$\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}(\zeta_{n-1} > t_n - C; \zeta'_{n-1} - \zeta''_{n-1} > -C) = o(n^{-1/2} e^{-t_n}).$$

Таким образом, при всех достаточно больших n

$$\bar{\mathcal{P}}_2 \geq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) \geq r_{NP}^{(n)})(1 - \omega(\varepsilon)). \quad (44)$$

Теперь оценим $\bar{\mathcal{P}}_2$ сверху. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_2 &\leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) + \sum_{g \neq g^*} r_{12}(g, g^*) \geq r_{NP}^{(n)}) \\ &= \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) + \Sigma'_2 \geq r_{NP}^{(n)}; \Sigma'_2 < \varepsilon r_{NP}^{(n)}) \\ &\quad + \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) + \Sigma'_2 \geq r_{NP}^{(n)}; \Sigma'_2 \geq \varepsilon r_{NP}^{(n)}) = \mathcal{P}_{21} + \mathcal{P}_{22}, \end{aligned}$$

где

$$\Sigma'_2 = \sum_{g \neq g^*} r_{12}(g, g^*).$$

Очевидно, что

$$\mathcal{P}_{21} \leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(1, g^*) \geq (1 - \varepsilon)r_{NP}^{(n)}) \leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(1, g^*) \geq r_{NP}^{(n)})(1 + \omega(\varepsilon)).$$

Далее, для всех достаточно больших n

$$\mathcal{P}_{22} \leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(\Sigma'_2 \geq \varepsilon r_{NP}^{(n)}) \leq \sum_{g \neq g^*} \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(\ln r_{12}(g, g^*) \geq t_n - C),$$

тогда как

$$\mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(\ln r_{12}(g, g^*) \geq t_n - C) \leq \sum_q p_{x_0, q}(g^*, 2) \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}(\zeta_{n-1}''' > t_n - C),$$

где

$$\zeta_{n-1}''' = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(g, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g^*, 2)}.$$

Выберем

$$a_1(1, g^*) < a' < \min_{g \neq g^*} a_{12}(1, g)$$

и запишем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}(\zeta_{n-1}''' > t_n - C) &= \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}(t_n - C \leq \zeta_{n-1}''' < na') + \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}(\zeta_{n-1}''' > na') \\ &= \mathcal{P}'_+ + \mathcal{P}''_+. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2, s)}$ обозначает меру, сопряженную к $\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}$ с функцией (см., (9))

$$f(\hat{x}_k) = \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(g, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g^*, 2)}.$$

Легко видеть, что

$$\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2, 1)} = \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(1)}.$$

Полагая в (11) $s = 1$, получаем оценку

$$\mathcal{P}''_+ \leq C e^{-na'},$$

тогда как при

$$s = 1, \quad g(t) = \mathbf{1}_{[t_n - C, na']}(t), \quad h(x^{(n)}) \equiv 1,$$

из (12) получаем оценку

$$\mathcal{P}'_+ \leq C e^{-t_n} \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g}^{(1)}(\zeta_{n-1}''' < na').$$

Как и прежде,

$$\hat{\mathbf{E}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)} \zeta_{n-1}''' = na_{12}(g, g^*)(1 + o(1)).$$

Заметим также, что

$$a_{12}(g, g^*) = a_{12}(\mathbf{1}, g^{-1}g^*) > a' > a_{12}(\mathbf{1}, g^*).$$

Применяя неравенство Чебышева, получаем, что

$$\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(1)}(\zeta_{n-1}''' < na') = o(n^{-1/2}).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}'_+ + \mathcal{P}''_+ = o(n^{-1/2}e^{-t_n}),$$

и следовательно,

$$\bar{\mathcal{P}}_2 \leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(\mathbf{1}, g^*) \geq r_{NP}^{(n)})(1 + \omega(\varepsilon)). \quad (45)$$

Поскольку ε произвольно, из (44) и (45) получаем требуемый результат. Лемма доказана.

С помощью лемм 3 и 4 мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. Пусть матрицы $P_1^{(1)}$ и $P_{g^*}^{(2)}$ строго положительны, а случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые. Тогда для критерия (34) с критическим уровнем $r = r_{NP}^{(n)}$, определенным в (38), при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{P}_1 = \alpha + o(n^{-1/2}),$$

тогда как

$$\bar{R}_{NP}^{(n)} = \mathcal{P}_2 = A_{NP} n^{-1/2} e^{-n^{1/2} u_{\alpha} \bar{\sigma}} \rho_{NP}^n (1 + o(1)),$$

где все характеристики соответствуют простым альтернативам $H_1: P = P_1^{(1)}$ и $H_2: P = P_{g^*}^{(2)}$.

5.2. Байесовский и минимаксный подходы

Рассмотрим матрицы

$$B_{g, g'} = \|p_{rq}^s(g, 1) p_{rq}^{1-s}(g', 2)\|_{r, q=1}^d, \quad g, g' \in G.$$

Через $\rho(s; g, g')$ обозначим спектральный радиус $B_{g, g'}$. Пусть

$$\rho(g, g') = \min_s \rho(s; g, g') = \rho(s(g, g'); g, g').$$

Предположим, что (см. (36) и (37))

$$\max_{g \in G} \rho(\mathbf{1}, g) < 1, \quad (46)$$

и что существует g^* такое, что

$$\max_{g \neq g^*} \rho(1, g) < \rho(1, g^*). \quad (47)$$

Пусть $s_0 = s(1, g^*)$ такое, что

$$\rho(1, g^*) = \rho(s(1, g^*), 1, g^*).$$

Выберем $P_{g^*}^{(2)}$ в качестве стандартной матрицы семейства $\mathcal{H}_2$.

Лемма 5. Пусть $s_0, v_{x_0}(s_0), \sigma(s_0)$, а также $\rho(s_0)$ в (30) и (31) отвечают простым альтернативам $H_1: P = P_1^{(1)}$ и $H_2: P = P_{g^*}^{(2)}$, и пусть матрицы $P_1^{(1)}$ и $P_{g^*}^{(2)}$ строго положительны, а случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые. Тогда, полагая в (35) $r = r_B$, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{\mathcal{P}}_2 = \frac{v_{x_0}(s_0) r_{cr}^{-s_0}}{ds_0 \sigma(s_0) \sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \rho^{n-1}(s_0) (1 + o(1)).$$

Доказательство. Сначала оценим $\tilde{\mathcal{P}}_2$ снизу. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_2 &= \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} \left(r_{12}(1, g^*) \geq r_B \frac{1 + \Sigma_2}{1 + \Sigma_1} \right) \\ &\geq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} (r_{12}(1, g^*) \geq r_B (1 + \Sigma_2); \Sigma_2 < \varepsilon) = \mathcal{P}_-, \end{aligned}$$

где $\Sigma_i, i = 1, 2$, те же, что и в (39). Далее,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_- &= \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} (r_{12}(1, g^*) \geq r_B (1 + \varepsilon)) - \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} (r_{12}(1, g^*) \geq r_B; \Sigma_2 \geq \varepsilon) \\ &= \mathcal{P}'_- - \mathcal{P}''_-. \end{aligned}$$

Ввиду теоремы 2

$$\mathcal{P}'_- = \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} (r_{12}(1, g^*) \geq r_B) (1 - \omega(\varepsilon)),$$

где $\omega(t)$ обозначает любую положительную функцию такую, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0.$$

Очевидно, для всех достаточно больших n

$$\mathcal{P}''_- \leq \sum_{g \neq g^*} \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} (r_{12}(1, g^*) \geq r_B; \ln r_{22}(g, g^*) > -C).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)} (r_{12}(1, g^*) \geq r_B; \ln r_{22}(g, g^*) > -C) \\ \leq \sum_q P_{x_0, q}(g^*, 2) \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)} (\zeta_{n-1} > -C; \zeta'_{n-1} - \zeta''_{n-1} > -C) \end{aligned}$$

при условии, что n достаточно велико. Здесь

$$\zeta'_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(1, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g^*, 2)}, \quad \zeta''_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(1, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g, 2)}.$$

Нам приходится несколько видоизменить (12). Пусть $\rho_g(s_1, s_2)$ — спектральный радиус

$$B_g(s_1, s_2) = \|p_{rq}^{s_1}(1, 1)p_{rq}^{1-s_2}(g, 2)p_{rq}^{1-s_1-s_2}(g^*, 2)\|_{r,q=1}^d, \quad g \in G.$$

Рассуждая, как при выводе (11), легко получаем, что

$$\hat{\mathbf{P}}_{x_0, g^*}^{(2)}(\zeta_{n-1} > -C; \zeta'_{n-1} - \zeta''_{n-1} > -C) \leq C\rho_g^n(s_1, s_2).$$

Очевидно, что

$$\min_{s_1, s_2} \rho_g(s_1, s_2) \leq \min_s \rho_g(s, 1-s) = \rho(1, g) < \rho(1, g^*).$$

Таким образом,

$$\bar{\mathcal{P}}_2 \geq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(1, g^*) \geq r_B)(1 - \omega(\varepsilon)). \quad (48)$$

Теперь оценим $\bar{\mathcal{P}}_2$ сверху. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}_2 &\leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(1, g^*) + \sum_{g \neq g^*} r_{12}(g, g^*) \geq r_B) \\ &= \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(1, g^*) + \Sigma'_2 \geq r_B; \Sigma'_2 < \varepsilon r_B) \\ &\quad + \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(1, g^*) + \Sigma'_2 \geq r_B; \Sigma'_2 \geq \varepsilon r_B) = \mathcal{P}_{21} + \mathcal{P}_{22}, \end{aligned}$$

где

$$\Sigma'_2 = \sum_{g \neq g^*} r_{12}(g, g^*).$$

Очевидно, что

$$\mathcal{P}_{21} \leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(1, g^*) \geq (1 - \varepsilon)r_B) \leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(1, g^*) \geq r_B)(1 + \omega(\varepsilon)).$$

Далее, для всех достаточно больших n

$$\mathcal{P}_{22} \leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(\Sigma'_2 \geq \varepsilon r_B) \leq \sum_{g \neq g^*} \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(\ln r_{12}(g, g^*) \geq -C),$$

тогда как

$$\mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(\ln r_{12}(g, g^*) \geq -C) \leq \sum_q p_{x_0, q}(g^*, 2) \hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}(\zeta'''_{n-1} > -C),$$

где

$$\zeta'''_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{p_{\hat{x}_k}(g, 1)}{p_{\hat{x}_k}(g^*, 2)}.$$

Согласно (11) получаем, что

$$\hat{\mathbf{P}}_{\hat{x}_0, g^*}^{(2)}(\zeta_{n-1}''' > -C) \leq C\rho^n(g, g^*).$$

Поскольку $\rho(g, g^*) < \rho(1, g^*)$, заключаем, что

$$\bar{\mathcal{P}}_2 \leq \mathbf{P}_{x_0, g^*}^{(2)}(r_{12}(1, g^*) \geq r_B)(1 + o(\varepsilon)). \quad (49)$$

Поскольку ε произвольно, (48) и (49) вместе с (31) приводят к нужному результату.

Таким же образом обосновывается следующее утверждение.

Лемма 6. В условиях леммы 5 при $n \rightarrow \infty$

$$\bar{\mathcal{P}}_1 = \frac{v_{x_0}(s_0)r_{cr}^{1-s_0}}{d(1-s_0)\sigma(s_0)\sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \rho^{n-1}(s_0)(1 + o(1)).$$

Используя леммы 5 и 6, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. Пусть матрицы $P_1^{(1)}$ и $P_{g^*}^{(2)}$ строго положительны, а случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые. Тогда для критерия (34), где $r = r_B$, при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\bar{R}_B^{(n)} = \mathcal{P}_1 + r_B \mathcal{P}_2 = r^{1-s_0} A_B n^{-1/2} \rho_B^n (1 + o(1)),$$

где все характеристики соответствуют простым альтернативам $H_1: P = P_1^{(1)}$ и $H_2: P = P_{g^*}^{(2)}$.

Приведем для полноты и следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть матрицы $P_1^{(1)}$ и $P_{g^*}^{(2)}$ строго положительны, а случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые. Тогда для критерия (34) где

$$r = r_{MM} = 1/s_0$$

при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\bar{R}_{MM}^{(n)} = \min_r \max(\bar{\mathcal{P}}_1, \bar{\mathcal{P}}_2) = A_{MM} n^{-1/2} \rho_{MM}^n (1 + o(1)),$$

где характеристики A_{MM} и ρ_{MM} соответствуют простым альтернативам $H_1: P = P_1^{(1)}$ и $H_2: P = P_{g^*}^{(2)}$.

6. Заключительные замечания

1. Заметим, что при обеих гипотезах H_1 и H_2 (или $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$) распределение отношения правдоподобия дискретно. Это означает, что, вообще говоря,

$$\mathbf{P}_{x_0}^{(i)}(r(x^{(n)}) = r_{NP}^{(n)}) \neq 0,$$

и следовательно,

$$\mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(r(x^{(n)}) < r_{NP}^{(n)}) < \alpha < \lim_{r \downarrow r_{NP}^{(n)}} \mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(r(x^{(n)}) < r).$$

Иными словами, уровень критерия может оказаться дефектным. Чтобы обойти неопределенность, возникающую при $r(x^{(n)}) = r_{NP}^{(n)}$, обычно используются рандомизованные тесты. Традиционно в рамках подхода Неймана–Пирсона одна из конкурирующих гипотез, скажем H_1 , принимается за нулевую. Это приводит к решающему правилу

$$\hat{d}(x^{(n)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } r(x^{(n)}) > r_{NP}^{(n)}, \\ 1, & \text{если } r(x^{(n)}) < r_{NP}^{(n)}, \\ \nu, & \text{если } r(x^{(n)}) = r_{NP}^{(n)}, \end{cases}$$

где случайная величина ν принимает значения 0 и 1 так, что

$$\mathbf{P}(\nu = 0) = 1 - p, \quad \mathbf{P}(\nu = 1) = p,$$

и не зависит от $x^{(n)}$. Вероятность p удовлетворяет условию

$$\alpha = \mathbf{E}_{x_0}^{(1)} \delta(x^{(n)}) = \mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(r(x^{(n)}) < r_{NP}^{(n)}) + p \mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(r(x^{(n)}) = r_{NP}^{(n)}).$$

Тогда ожидаемый риск Неймана–Пирсона равен

$$\begin{aligned} \hat{R}_{NP} &= 1 - \mathbf{E}_{x_0}^{(2)} \hat{d}(x^{(n)}) \\ &= \mathbf{P}_{x_0}^{(2)}(r(x^{(n)}) > r_{NP}^{(n)}) + (1 - p) \mathbf{P}_{x_0}^{(2)}(r(x^{(n)}) = r_{NP}^{(n)}). \end{aligned}$$

Поскольку случайные величины $f(\hat{x}_k)$ нерешетчатые, то принимая во внимание (6), заключаем, что

$$\mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(r(x^{(n)}) = r_{NP}^{(n)}) = o(n^{-1/2})$$

и

$$\mathbf{P}_{x_0}^{(2)}(r(x^{(n)}) = r_{NP}^{(n)}) = o(R_{NP}^{(n)}).$$

Таким образом, критерии $\hat{d}(x^{(n)})$ и $d_{r_{NP}^{(n)}}(x^{(n)})$ асимптотически эквивалентны.

2. Занимаясь простыми альтернативами, мы предполагали, что матрицы $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ эквивалентны в том смысле, что

$$\{(r, q): p_{rq}(1) = 0\} = \{(r, q): p_{rq}(2) = 0\},$$

то есть меры $\mathbf{P}_{x_0}^{(1)}$ и $\mathbf{P}_{x_0}^{(2)}$ взаимно абсолютно непрерывны. При таком предположении

$$0 < \min_{x^{(n)}} r(x^{(n)}) \leq \max_{x^{(n)}} r(x^{(n)}) < \infty.$$

Если же

$$\{(r, q): p_{rq}(1) = 0\} \neq \{(r, q): p_{rq}(2) = 0\},$$

то имеет место, по крайней мере, одно из равенств

$$\min_{x^{(n)}} r(x^{(n)}) = 0, \quad \max_{x^{(n)}} r(x^{(n)}) = \infty.$$

Это означает, что $\mathbf{P}_{x_0}^{(1)}$ и $\mathbf{P}_{x_0}^{(2)}$ частично сингулярны. Именно такой случай изучался в [4] в контексте логарифмической асимптотики.

Пусть X_{ni} является носителем $\mathbf{P}_{x_0}^{(i)}$, $i = 1, 2$. Если $x^{(n)} \in X_{n1} \setminus X_{n2}$, то решение $d(x^{(n)}) = H_1$ безошибочно. Аналогично, $x^{(n)} \in X_{n2} \setminus X_{n1}$ означает, что $P = P^{(2)}$. Ошибочные решения появляются только при $x^{(n)} \in X_{n1} \cap X_{n2}$. Они характеризуются вероятностями

$$\mathcal{P}_1 = \mathbf{P}_{x_0}^{(1)}(0 < r(x^{(n)}) < r)$$

и

$$\mathcal{P}_2 = \mathbf{P}_{x_0}^{(2)}(r \leq r(x^{(n)}) < \infty).$$

Если

$$\mathbf{P}_{x_0}^{(i)}(X_{n1} \cap X_{n2}) > 0, \quad i = 1, 2,$$

то $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ очень быстро сходятся к нулю. Это означает, что критерий Неймана–Пирсона фиксированного уровня значимости не существует. В рамках байесовского подхода приходится сводить цепь $\{\hat{x}_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ до фазового пространства $\{j: p_{r_j q_j}(1)p_{r_j q_j}(2) > 0\}$. Этот случай требует специального рассмотрения. Заметим, что частичная сингулярность в случае независимых наблюдений изучалась в [2].

3. При изучении сложных альтернатив $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ мы предполагали, что $P_1^{(1)}$ и $P_{g^*}^{(2)}$ строго положительны. По-видимому, это условие можно заменить менее ограничительным условием

$$P_1^{(1)} \sim P_{g^*}^{(2)}.$$

Тогда общее количество ненулевых слагаемых в (32) может оказаться много меньшим, чем $|G|$. Очевидно, это никак не влияет на асимптотику рисков.

4. Следует подчеркнуть, что (34) определяет наилучший G -инвариантный критерий. Однако, существуют и иные G -инвариантные критерии, которые ему асимптотически эквивалентны. Примером такого критерия может служить, скажем, критерий, основанный на отношении максимумов правдоподобия

$$r^*(x^{(n)}) = \frac{\max_{g \in G} \mathbf{p}(x^{(n)}; g, 1)}{\max_{g' \in G} \mathbf{p}(x^{(n)}; g', 2)}.$$

Список литературы

1. Horn R. A., Johnson C. R., *Matrix analysis*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
2. Nagaev A. V., *Limit theorems under testing hypotheses*. UMK, Toruń, 1996.
3. Dembo A., Zeitouni O., *Large deviation techniques and applications*. Jones & Bartlett, Boston–London, 1993.
4. Scheffel P., von Weizsäcker H., On risk rates and large deviations in finite Markov chain experiments. *Math. Methods Statist.* (1997) **6**, №3, 293–312.
5. Nagaev A. V., An asymptotic formula for the Bayes risk in discriminating between two Markov chains. *J. Appl. Probab.* (2001) **38A**, 131–141.
6. Nagaev A. V., The Bayes risk asymptotics under testing composite hypotheses on Markov chains. In: *Probabilistic methods in discrete mathematics*. VSP, Utrecht, 2002, pp. 273–290.
7. Nagaev A. V., An asymptotic formula for the Neyman–Pearson risk in discriminating between two Markov chains. *J. Math. Sci.* (2002) **111**, №3, 3592–3600.
8. Нагаев С. В., Уточнения предельных теорем для однородных цепей Маркова. *Теория вероятностей и ее применения* (1961) **6**, №1, 67–86.
9. Сираждинов С. Х., Форманов Ш. К., *Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова*. Фан, Ташкент, 1979.
10. Szewczak Z., A remark on a large deviation theorem for Markov chain with a finite number of states. Preprint, Faculty of Math. and Informatics, UMK, Toruń, 2001.
11. Дуб Дж. Л., *Случайные процессы*. ИЛ, Москва, 1956.
12. Степанов В. Е., Некоторые статистические критерии для цепей Маркова. *Теория вероятностей и ее применения* (1957) **2**, №1, 143–144.

Статья поступила 03.09.2003.