Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Кирнасов, О склейке состояний автомата, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 4, 66–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:25:52

О склейке состояний автомата

© 2003 г. А. Е. Кирнасов

В статье рассматривается задача о склейке состояний автомата, которая часто возникает при исследовании установочного эксперимента. Приводятся различные оценки времени склейки r состояний автомата с n состояниями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00162.

1. Введение

Одной из задач теории экспериментов с автоматами является установочная задача [1]. Это задача определения заключительного состояния автомата в процессе эксперимента, то есть опрашивания автомата некоторым множеством слов входного алфавита при условии, что до эксперимента полностью известна диаграмма автомата, но не известно начальное состояние. Если в процессе эксперимента выясняется, что текущим состоянием автомата является одно из состояний некоторого множества S , то на следующем шаге целесообразно либо опросить автомат словом, по реакции на которое множество S можно будет нетривиальным образом разбить на подмножества, либо подать на вход автомата слово, переводящее два или более состояний множества S в одно состояние. В [4] при построении простого безусловного установочного эксперимента вводится монотонно убывающая характеристика состояния эксперимента, в некотором смысле одновременно учитывающая обе описанные возможности. Первая возможность, связанная с разбиением множества S , сводится к понятию различимости состояний, которое хорошо изучено. Вторая возможность, связанная с переводом состояний в одно, приводит к необходимости изучения понятия склейки состояний. В настоящей статье приводятся оценки максимального времени склейки r состояний автомата с n состояниями, а также асимптотика среднего времени склейки r состояний автомата с n состояниями при $r \leq \log_2 \log_2 \log_2 n$.

2. Основные понятия и результаты

Пусть $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — автомат, где A — входной алфавит, B — выходной алфавит, Q — множество состояний, φ — функция переходов, ψ — функция выходов. Мы также будем рассматривать естественное продолжение функции φ на слова из алфавита A , которое также будем обозначать φ . Пусть теперь $q_1, q_2, \dots, q_r$ — некоторые r состояний автомата. Если существует слово α в алфавите A такое, что $\varphi(q_1, \alpha) = \varphi(q_2, \alpha) = \dots = \varphi(q_r, \alpha)$, то длину кратчайшего такого слова назовем временем склейки данных r состояний. Введем в рассмотрение функцию $T_{\mathcal{A}}(q_1, q_2, \dots, q_r)$, которая равна 0, если состояния $q_1, q_2, \dots, q_r$

автомата $\mathfrak{A}$ склеить нельзя, и равна времени склейки этих состояний в противном случае. Заметим, что для анализа склейки состояний, нам по существу нужна лишь диаграмма переходов автомата, поэтому в дальнейшем рассматриваются только автоматы без выхода. Пару $(\mathfrak{A}, (q_1, q_2, \dots, q_r))$, состоящую из автомата $\mathfrak{A}$ и неупорядоченного набора его состояний назовем r -инициальным автоматом. Пусть $\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}, (q_1, q_2, \dots, q_r))$ — r -инициальный автомат. Тогда положим

$$T(\mathfrak{B}) = T_{\mathfrak{A}}(q_1, q_2, \dots, q_r).$$

Рассмотрим класс $\mathfrak{K}_{m,n}$ автоматов с m входными символами и n состояниями. Также рассмотрим класс

$$\mathfrak{K}'_{m,n} = \{\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi) \mid |A| = m, |Q| = n, \forall q_1, q_2 \in Q \exists \alpha \in A^*: \varphi(q_1, \alpha) = \varphi(q_2, \alpha)\}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$l(\mathfrak{A}, r) = \max_{q_1, \dots, q_r} T_{\mathfrak{A}}(q_1, \dots, q_r)$$

Теперь определим две функции

$$L(m, n, r) = \max_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}_{m,n}} l(\mathfrak{A}, r),$$

$$L'(m, n, r) = \max_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}'_{m,n}} l(\mathfrak{A}, r).$$

Теорема 1. *Справедливы неравенства*

$$L(m, n, r) \leq \sum_{i=1}^r \binom{n}{i};$$

$$L(m, n, r) > \left(\frac{n-2r}{r-1} \right)^{r-1}$$

при $m \geq r, n \geq 2r$.

Теорема 2. *Справедливы соотношения*

$$L(m, n, 2) = L'(m, n, 2) = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\frac{n^2(r-1)}{r} - 2n \leq L'(m, n, r) \leq \frac{(r-1)n(n-1)}{2} - \sum_{k=1}^r \left(\frac{k(k-1)}{2} - 1 \right).$$

Теорема 3. *Пусть $n \rightarrow \infty$. Тогда для почти всех 2-инициальных автономных автоматов (с одним входным символом) $\mathfrak{B}$ с n состояниями*

$$T(\mathfrak{B}) \leq \sqrt{n} \log_2 n.$$

Теорема 4. *Пусть $n \rightarrow \infty, m \geq 2$ фиксировано и $r \leq \log_2 \log_2 \log_2 n$. Тогда для почти всех r -инициальных автоматов $\mathfrak{B}$ с m входными символами и n состояниями*

$$(r-1) \log_m n - 4 \log_2 \log_2 n \leq T(\mathfrak{B}) \leq (r-1) \log_m n + \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 n.$$

3. Доказательство теорем 1 и 2

Докажем теорему 1. Рассмотрим автомат $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$. Продолжим функцию φ на подмножества множества состояний автомата, а именно, для $S \subseteq Q$ положим

$$\varphi(S, \alpha) = \{q \in Q \mid \exists q' \in S : q = \varphi(q', \alpha)\}.$$

Неравенство

$$L(m, n, r) \leq \sum_{i=2}^r \binom{n}{i}$$

вытекает из того, что если α — кратчайшее слово такое, что

$$\varphi(q_1, \alpha) = \varphi(q_2, \alpha) = \dots = \varphi(q_r, \alpha),$$

то для любых двух начальных подслов α_1 и α_2 слова α множества $\varphi(Q_0, \alpha_1)$ и $\varphi(Q_0, \alpha_2)$ различны и содержат не более r элементов. Здесь $Q_0 = \{q_1, \dots, q_r\}$.

Для доказательства нижней оценки мы несколько модифицируем одну из вариаций конструкции из [2], а именно, положим

$$\begin{aligned} p &= \lfloor (n-2)/(r-1) \rfloor, \\ s &= n-2-p(r-1), \\ Q &= \{q_0, q'_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{r-1} Q_i \cup \{q'_1, q'_2, \dots, q'_s\}, \end{aligned}$$

где

$$Q_i = \{q_{i,1}, \dots, q_{i,p}\}.$$

Очевидно, что $p \geq 2$. Положим также $A = \{a_1, \dots, a_m\}$.

Рассмотрим теперь автомат $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, где функцию φ мы определим следующим образом:

– для всех $a \in A$

$$\varphi(q_0, a) = q_0, \quad \varphi(q'_0, a) = q'_0, \quad \varphi(q'_i, a) = q'_i, \quad 1 \leq i \leq s;$$

– если $i > r$, то $\varphi(q, a_i) = q$ для всех q ;

– если $j \leq p$, то $\varphi(q_{i,j}, a_i) = q_{i,j+1}$, и $\varphi(q_{i,p}, a_i) = q_{i,p}$;

– пусть $i_0 < i$, тогда $\varphi(q_{i,j}, a_{i_0}) = q_{i,j}$ при любом j ;

– пусть $i < i_0 \leq m$, тогда для всех $j < p$

$$\varphi(q_{i,j}, a_{i_0}) = q'_0, \quad \varphi(q_{i,p}, a_{i_0}) = q_{i,1};$$

– наконец, $\varphi(q_{i,j}, a_r) = q'_0$, если $j \neq p$ и $\varphi(q_{i,p}, a_r) = q_0$.

Рассмотрим теперь множество Q_0 , состоящее из r состояний:

$$Q_0 = \{q_0, q_{1,1}, q_{2,1}, \dots, q_{r-1,1}\}.$$

Покажем, что любое слово, склеивающее состояния из Q_0 , должно иметь длину не меньшую, чем $(p-1)^{r-1} + 1$.

Пусть α — кратчайшее слово, склеивающее состояния из Q_0 . Очевидно, его последним символом является a_r . Кроме того, если обозначить α' начальный отрезок слова α без последнего символа, то нетрудно понять, что в этом слове нет символа a_r , а также что это слово является кратчайшим словом, переводящим множество Q_0 в множество $Q_1 = \{q_0, q_{1,p}, q_{2,p}, \dots, q_{r-1,p}\}$. Индукцией по m нетрудно проверить, что длина такого слова равна $(p-1)^{r-1}$. Значит, длина слова α равна $(p-1)^{r-1} + 1$, что и требовалось доказать. Учитывая, что $p > (n-2)/(r-1) - 1$, получаем нижнюю оценку теоремы 1.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — автомат из класса $\mathcal{S}_{m,n}^I$ и $S \subseteq Q$, $|S| = k$. Тогда найдутся состояния q_1 и q_2 из S такие, что существует слово α длины не большей, чем

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} + 1,$$

склеивающее эти состояния.

Доказательство. Пусть утверждение неверно, тогда при q_1 и q_2 , произвольно выбранных из S , для длины l кратчайшего слова α , склеивающего q_1 и q_2 , справедлива оценка

$$l > l(n, k) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} + 1.$$

Следовательно, начальными отрезками слова α пара состояний $\{q_1, q_2\}$ переводится в более, чем $l(n, k)$ различных пар, среди которых должно быть не менее, чем $l - l(n, k) > 0$ пар, отличных от $\{q_1, q_2\}$ таких, что обе их компоненты лежат в S . Рассмотрим ту из этих пар, в которую пара $\{q_1, q_2\}$ переводится максимальным начальным отрезком слова α . Длина такого отрезка должна быть не менее, чем $l - l(n, k)$, а длина слова, получающегося из слова α отбрасыванием этого начального отрезка, соответственно, не более, чем $l(n, k)$. Легко видеть, что это слово склеивает указанную пару состояний, обе компоненты которой лежат в S . Получаемое противоречие со сделанным предположением завершает доказательство леммы.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Легко видеть, что верхняя оценка теоремы получается из леммы 1 индукцией по r .

Рассмотрим автомат $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ с двумя входными символами, где

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1\}, & Q &= \{1, 2, \dots, 3\}, \\ \varphi(i, 1) &= i & \text{при } i \neq 1, & \varphi(1, 1) = 2, \\ \varphi(i, 0) &= i + 1 & \text{при } i \neq n, & \varphi(n, 0) = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что аналогичный пример автомата был построен П. А. Пантелеевым при рассмотрении различных обобщений понятия различимости состояний.

Пусть $S \subseteq Q$, $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Можно считать, что $i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k$. Введем числа $j_s = i_{s+1} - i_s$ при $s < k$, $j_k = n - i_k + i_1$ и положим

$$d = \max_{1 \leq s \leq k} \max j_s.$$

Пусть α — слово, склеивающее все состояния из S и l — длина этого слова. Докажем, что $l \geq 1 + n(n - d - 1)$.

Рассмотрим последний символ 1 в слове α , а также слово α' , получающееся из α отбрасыванием заключительного отрезка, начинающегося с этого символа. Индукцией по k можно проверить, что найдется такое t , $1 \leq t \leq k$, что $\varphi(i_t, \alpha') = 1$, $\varphi(i_{t-1}, \alpha') = 2$ при $t \neq 1$, $\varphi(i_k, \alpha') = 2$ при $t = 1$. Выделим минимальный начальный отрезок β слова α' , переводящий i_t в 2, заканчивающийся символом 1. Такой отрезок, очевидно, найдется. При этом нетрудно понять, что при $t \neq 1$

$$\varphi(i_{t-1}, \beta) \geq 2 + (n - j_t - 1)$$

и при $t = 1$

$$\varphi(i_k, \beta) \geq 2 + (n - j_t - 1).$$

Если обозначить γ заключительный отрезок слова α' , получающийся из него отбрасыванием слова β , то получим, что для некоторого

$$r \geq 2 + (n - j_t - 1) \geq 2 + (n - d - 1)$$

справедливы равенства

$$\varphi(2, \beta) = 1, \quad \varphi(r, \beta) = 2.$$

Индукцией по r можно установить, что длина слова β не меньше, чем $n(r - 2)$. Отсюда нетрудно заключить, что $l \geq 1 + n(n - d - 1)$.

Положим теперь

$$d = [n/r], \quad q = n - rd,$$

$$i_1 = 1, \quad i_2 = i_1 + d + 1, \dots, i_{q+1} = i_q + d + 1, \quad i_{q+2} = i_{q+1} + d, \dots, i_r = i_{r-1} + d.$$

Применяя только что доказанное утверждение к множеству состояний $\{i_1, \dots, i_r\}$, получаем для длины l кратчайшего склеивающего слова оценку $l \geq 1 + n(n - d - 2)$. Так как $d \leq n/r$, получаем, наконец, что

$$L'(m, n, r) \geq \frac{n^2(r - 1)}{r} - 2n.$$

Несколько уточняя предыдущие рассмотрения, можно проверить, что длина кратчайшего склеивающего слова для пары состояний $\{2, 2 + [n/2]\}$ в описанном автомате равна $n(n - 1)/2$. Это заканчивает проверку равенства

$$L(m, n, 2) = L'(m, n, 2) = \frac{n(n - 1)}{2}$$

и доказательство теоремы 2.

4. Доказательство теоремы 3

В этом разделе мы рассмотрим класс K_n автоматов с одним входным символом (автономные автоматы) и n состояниями. Поставим следующий вопрос: при каком T , зависящем от n , вероятность того, что в случайно выбранном автомате из K_n время склейки двух случайно выбранных состояний этого автомата не меньше T , стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности? Покажем, что достаточно положить

$$T = \sqrt{n} \log_2 n.$$

Обозначим $D(n)$ множество диаграмм переходов, задающих автономные автоматы. Обозначим также $D(n, T)$ множество диаграмм переходов, задающих автономные автоматы, для которых два фиксированных состояния склеиваются за время, не меньшее, чем T . Нетрудно понять, что приведенное утверждение вытекает теперь из следующей теоремы.

Теорема 5. При $n \rightarrow \infty$

$$\frac{|D(n, \sqrt{n} \log_2 n)|}{|D(n)|} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Заметим, что для автоматов из K_n время склейки двух состояний не превосходит n , если эти состояния могут быть склеены. Зафиксируем два состояния q_1 и q_2 и подсчитаем число диаграмм, задающих автоматы из K_n , в которых кратчайшее слово, склеивающее q_1 и q_2 , имеет длину t при $1 \leq t \leq n$. Класс всех таких диаграмм обозначим $D(n, t, q_1, q_2)$. Введем обозначение

$$|D(n, t, q_1, q_2)| = S(n, t).$$

Рассмотрим некоторую диаграмму из $D(n, t, q_1, q_2)$. Обозначим f функцию переходов, соответствующую этой диаграмме, то есть $f(q)$ для произвольного q обозначает состояние, в которое идет единственная стрелка из q . Рассмотрим последовательность

$$\alpha_1 = \{q_1^1 = q_1, q_1^2 = f(q_1^1), \dots, q_1^r = f(q_1^{r-1})\}$$

такую, что $f(q_1^r) = q_1^s$, где $s \leq r$ и $q_1^i \neq q_1^j$ при $r \geq i > j$. Такая последовательность единственна. Множество состояний из этой последовательности обозначим Q_1 . Возможны два варианта, $q_2 \in Q_1$ и $q_2 \notin Q_1$. Множество диаграмм, на которых реализуется первый вариант, обозначим $D_1(n, t, q_1, q_2)$. Множество диаграмм из $D(n, t, q_1, q_2)$, на которых реализуется второй вариант, обозначим $D_2(n, t, q_1, q_2)$. Рассмотрим диаграмму из $D_1(n, t, q_1, q_2)$. Определим последовательность

$$\alpha_2 = \{q_2^1 = q_2, q_2^2 = f(q_2^1), \dots, q_2^z = f(q_2^{z-1})\}$$

такую, что $q_2^i \neq q_2^j$ при $z \geq i > j$, $f(q_2^z) = q_1^p$ для некоторого $p \leq r$, $q_2^i \notin Q_1$ при $i \leq z$. Такая последовательность также единственна и множество составляющих ее состояний обозначим Q_2 . Возможны три случая, $z = t$; $z \neq t$, $p - 1 > z$ и $z \neq t$, $p - 1 < z$.

Обозначим множества диаграмм из $D_1(n, t, q_1, q_2)$, на которых реализуются эти три случая соответственно $D_1^1(n, t, q_1, q_2)$, $D_1^2(n, t, q_1, q_2)$ и $D_1^3(n, t, q_1, q_2)$. Введем обозначение

$$\begin{aligned} |D_1^1(n, t, q_1, q_2)| &= S_1(n, t), & |D_1^2(n, t, q_1, q_2)| &= S_2(n, t), \\ |D_1^3(n, t, q_1, q_2)| &= S_3(n, t), & |D_2(n, t, q_1, q_2)| &= S_4(n, t). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$S(n, t) = S_1(n, t) + S_2(n, t) + S_3(n, t) + S_4(n, t).$$

Найдем $S_1(n, t)$. Диаграмма из $D_1^1(n, t, q_1, q_2)$ однозначно определяется выбором r , упорядоченной выборкой $r - 1$ состояний из $n - 2$, которые вместе с q_1 составят последовательность α_1 , выбором s в пределах от 1 до r и упорядоченной выборкой $t - 1$ состояний из $n - r - 1$, которые вместе с q_1 составят последовательность α_2 , и фиксацией отображения f на оставшихся $n - r - t$ состояниях. Таким образом,

$$S_1(n, t) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^r A_{n-2}^{r+t-2} n^{n-r-t},$$

где

$$A_m^k = m(m-1) \dots (m-k+1).$$

Подсчитаем $S_2(n, t)$. Нетрудно понять, что для диаграмм из класса $D_2^1(n, t, q_1, q_2)$ выполняются следующие условия: $p-z-1$ делит $r-s+1$; $t=s-1$.

Фиксацию диаграммы из $D_2^1(n, t, q_1, q_2)$ можно таким образом осуществить так: выбираем r ; затем берем упорядоченную выборку $r-1$ состояний из $n-2$, которые составят вместе с q_1 последовательность α_1 ; затем фиксируем $s = t-1$, если $t-1 \leq r$; затем выбираем $z \leq t-1$ и p от 2 до r так, что $r-s+1$ делит $p-z-1$; наконец, берем упорядоченную выборку $z-1$ упорядоченных состояний из $n-r-1$, которые вместе с q_2 составят α_2 и произвольно определяем f на оставшихся $n-r-z$ состояниях. Таким образом,

$$S_2(n, t) = \sum_{r=t-1}^{n-1} \sum_{z=1}^{t-1} \sum_{p=2}^r A_{n-2}^{z-1} n^{n-r-z} \delta(r-s+1, p-z-1),$$

где $\delta(n, m) = 1$, если n делит m и $\delta(n, m) = 0$ в остальных случаях.

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что

$$S_3(n, t) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=1}^r \sum_{z=1}^{t-1} A_{n-2}^{z-1} n^{n-r-z} \delta(r-s+1, t-s+1),$$

$$S_4(n, t) = \sum_{r=t+1}^n \sum_{p=1}^{r-1} A_{n-2}^{r-2} * n^{n-r} \delta(r-s+1, t-r+p).$$

Путем алгебраических преобразований получаем следующее более простое выражение для $S(n, t)$:

$$S(n, t) = 2(S_5(n, t) + S_6(n, t)) + S_7(n, t),$$

где

$$S_5(n, t) = \sum_{p=1}^{n-t-1} \sum_{z=1}^{t-1} \sum_{k=1}^{\lfloor (t+p-z-1)/p \rfloor} A_{n-2}^{t+p+z-2} n^{n-t-p-z},$$

$$S_6(n, t) = \sum_{p=1}^{n-t} \sum_{k=1}^{\lfloor (t+p-1)/p \rfloor} A_{n-2}^{t+p-2} n^{n-t-p},$$

$$S_7(n, t) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=t+1}^r A_{n-2}^{r+t-2} n^{n-r-t}.$$

Перейдем теперь к оценкам. Во-первых, отметим, что

$$S(n, t) \leq 2S_8(n, t) + S_7(n, t),$$

где

$$S_8(n, t) = \sum_{p=1}^{n-t} \sum_{z=0}^{t-1} \sum_{k=1}^{\lfloor (t+p-z-1)/p \rfloor} A_{n-2}^{t+p+z-2} n^{n-t-p-z}.$$

Учтем теперь, что число всех диаграмм переходов, соответствующих автоматам с n состояниями и одним входом, равно n^n . Нетрудно получить, исходя из формул для $S_7(n, t)$ и $S_8(n, t)$, что

$$\frac{S_8(n, t)}{n^n} \leq \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{i}{n}\right),$$

$$\frac{S_7(n, t)}{n^n} \leq \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

Отсюда

$$\frac{S(n, t)}{n^n} \leq 3 \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

Оценим последнее произведение. Ясно, что

$$\ln \prod_{i=2}^t \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \sum_{i=2}^t \ln \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq - \sum_{i=2}^t \frac{i}{n} \leq - \frac{t^2}{3n}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{n^n} \sum_{t=T}^n S(n, t) \leq 3n \exp\left(-\frac{T^2}{3n}\right).$$

Положив $T = \sqrt{n} \log_2 n$, получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n^n} \sum_{t=T}^n S(n, t) \rightarrow 0.$$

Это завершает доказательство теоремы 3.

5. Вспомогательные определения и леммы

В этом и следующем разделах мы рассматриваем автоматы с $m \geq 2$ входными символами. Зафиксируем $m \geq 2$, n , а также множества

$$A = \{a_1, \dots, a_m\}, \quad Q = \{q_1, \dots, q_n\},$$

которые мы будем называть множествами входных символов и вершин соответственно. Обозначим $D(n, m)$ множество помеченных ориентированных графов с множеством вершин Q таких, что из каждой вершины исходит m ребер, помеченных элементами множества A так, что разные ребра, исходящие из одной вершины, помечены разными элементами. Свяжем с каждой диаграммой P из $D(n, m)$ функцию $f_P: Q \times A \rightarrow Q$, которую назовем функцией переходов графа P . Для каждого $q \in Q$ и для каждого $a \in A$ положим $f_P(q, a) = q'$, где q' — та из вершин, куда ведет ребро с началом в q , помеченное символом a . Продолжим далее обычным образом функцию переходов f на слова из алфавита A и за этой новой функцией сохраним прежнее обозначение.

Зафиксируем граф P , вершину $q \in Q$ и слово α в алфавите A длины t . Путем, исходящим из вершины q , определяемым словом α , мы назовем последовательность,

состоящую из чередующихся вершин и ребер, определяемую следующим образом: первой вершиной пути является вершина q , первым ребром пути, следующим за этой вершиной, является то из ребер, исходящих из вершины q , которое помечено первым символом слова α ; $(i + 1)$ -й по порядку вершиной пути будет вершина $f(q, \alpha^i)$, где α^i есть начальный отрезок слова α длины i ; наконец, i -м ребром пути, следующим за i -й вершиной, является то из ребер, исходящих из i -й вершины, которое помечено i -м символом слова α , при этом i меняется от 1 до t . Обозначим теперь путь, исходящий из вершины q , определяемый словом α через $\pi(q, \alpha)$. Выделим из пути $\pi(q, \alpha)$ подпоследовательность, состоящую только из вершин, которую назовем вершинным путем, начинающимся в вершине q и определяемым словом α . Этот путь обозначим $\pi'(q, \alpha)$. Наконец, множество вершин, содержащихся в последовательности $\pi'(q, \alpha)$, обозначим $\tilde{\pi}(q, \alpha)$.

Пусть $T > 1$. Рассмотрим подкласс $D'(n, m, T)$ класса $D(n, m, T)$, состоящий из таких графов P , что найдется слово α длины $[T]$, для которого вершинные пути $\pi'(q_1, \alpha)$, $\pi'(q_2, \alpha), \dots, \pi'(q_r, \alpha)$ состоят каждый из попарно разных вершин и пересекаются только по конечной вершине. Оценим снизу число графов в $D'(n, m, T)$. Для каждого неупорядоченного набора $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ из k различных слов длины $[T]$ выделим в классе $D'(n, m, T)$ подкласс $D'(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, состоящий из таких графов P , что для каждого $1 \leq j \leq k$ вершинные пути $\pi'(q_1, \alpha_{i_j}), \pi'(q_2, \alpha_{i_j}), \dots, \pi'(q_r, \alpha_{i_j})$ состоят каждый из попарно разных вершин и пересекаются только по конечной вершине.

Для каждого набора $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ разобьем $D'(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ на три подкласса $D'_1(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, $D'_2(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, $D'_3(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$. Для этого введем параметр $gl(P, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ графа P из $D'(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ относительно множества слов $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$. Введем обозначение

$$S = \bigcup_{j=1}^k \tilde{\pi}(q_1, \alpha_{i_j}) \cup \bigcup_{j=1}^k \tilde{\pi}(q_2, \alpha_{i_j}) \cup \dots \cup \bigcup_{j=1}^k \tilde{\pi}(q_r, \alpha_{i_j}).$$

Для каждой вершины $q \in S$ обозначим через $n(q)$ уменьшенное на единицу число таких ребер, входящих в q , что каждое из этих ребер встречается хотя бы в одном из путей $\pi(q_s, \alpha_{i_j})$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq s \leq r$. Теперь положим

$$gl(P, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})) = \sum_{q \in S} n(q).$$

Содержательно этот параметр показывает общее число пересечений путей $\pi(q_s, \alpha_{i_j})$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq s \leq r$.

Определим теперь подкласс $D'_1(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ следующим образом. Граф P принадлежит подклассу $D'_1(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ тогда и только тогда, когда $P \in D'(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ и выполняется следующее условие: для любых j_1 и j_2 , $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$, если $\alpha^{j_1 j_2}$ обозначает максимальный общий начальный отрезок слов $\alpha_{i_{j_1}}$ и $\alpha_{i_{j_2}}$, то

$$\begin{aligned} &(\tilde{\pi}(q_1, \alpha_{i_{j_1}}) \cup \tilde{\pi}(q_2, \alpha_{i_{j_1}}) \cup \dots \cup \tilde{\pi}(q_r, \alpha_{i_{j_1}})) \cap (\tilde{\pi}(q_1, \alpha_{i_{j_2}}) \cup \tilde{\pi}(q_2, \alpha_{i_{j_2}}) \cup \dots \cup \tilde{\pi}(q_r, \alpha_{i_{j_2}})) \\ &= (\tilde{\pi}(q_1, \alpha^{j_1 j_2}) \cup \tilde{\pi}(q_2, \alpha^{j_1 j_2}) \cup \dots \cup \tilde{\pi}(q_r, \alpha^{j_1 j_2})). \end{aligned}$$

Определим теперь два оставшихся подкласса $D'_2(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ и $D'_3(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$.

Граф P , принадлежащий классу $D'(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, принадлежит подклассу $D'_2(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, если $gl(P) > k(r - 1)$. Заметим, что если $P \in D'_1(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, то $gl(P) = k(r - 1)$, таким образом, подклассы $D'_1(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ и $D'_2(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ не пересекаются.

Наконец, в последний подкласс $D'_3(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$ мы отнесем графы из $D'(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, не вошедшие в первые два подкласса.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $P \in D'_3(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$. Тогда $P \in D'_2(n, m, T, W)$ для некоторого строгого подмножества W множества слов $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по k . При $k = 1$ это проверяется непосредственно. Пусть лемма доказана при всех $k < k_0$. Рассмотрим граф $P \in D'_3(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$. Допустим, что предположение леммы неверно, тогда для любого строгого подмножества W множества слов $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$, либо $P \in D'_3(n, m, T, W)$, либо $P \in D'_1(n, m, T, W)$, но первый вариант невозможен, так как в противном случае согласно предположению индукции нашлось бы множество W' , являющееся строгим подмножеством W , а значит, и исходного множества $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$, для которого $P \in D'_2(n, m, T, W')$, что противоречит нашему допущению об отсутствии подобных подмножеств в множестве $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$. Следовательно, всегда имеет место второй случай, в частности, $P \in D'_1(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{k-1}}))$. Отсюда нетрудно получить, что $P \in D'_1(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, что противоречит допущению о том, что $P \in D'_3(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$.

Лемма доказана.

Верно также следующее более сильное утверждение.

Лемма 3. Пусть $P \in D'_3(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$. Тогда $P \in D'_2(n, m, T, W)$ для некоторого строгого подмножества W множества слов $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$, и если α_{i_j} не входит в W , то хотя бы один из путей $\pi(q_1, \alpha_{i_j}), \pi(q_2, \alpha_{i_j}), \dots, \pi(q_r, \alpha_{i_j})$ может быть получен комбинацией частей путей $\pi(q_1, \beta), \pi(q_2, \beta), \dots, \pi(q_r, \beta)$ для $\beta \in W$.

Доказательство. Согласно лемме 1 найдется подмножество $W \in (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ такое, что $P \in D'_2(n, m, T, W)$. Рассмотрим те слова из $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$, которые не вошли в W . Если W не удовлетворяет условиям леммы 2, то среди указанных слов найдется слово β , для которого пути $\pi(q_1, \beta), \pi(q_2, \beta), \dots, \pi(q_r, \beta)$ не могут быть получены какой-либо комбинацией путей $\pi(q_1, \gamma)$ и $\pi(q_2, \gamma)$ для $\gamma \in W$. Положим тогда $W' = W \cup \{\beta\}$. Нетрудно понять, что $P \in D'_2(n, m, T, W')$. Если W' вновь не удовлетворяет условиям леммы 2, то повторим рассуждения. Так как $P \in D'_3(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, указанный процесс должен оборваться построением множества с требуемыми свойствами.

Нам потребуется также следующая лемма.

Лемма 4. Пусть $P \in D'_3(n, m, T, V)$ для некоторого множества из $k \leq d$ слов в алфавите A и $gl(P, V) \leq d$. Тогда существует не более, чем $2^{((rd+r)d)^{(rd+r)d}}$ множеств W таких, что $V \subset W$, $P \in D'(n, m, T, W)$, и хотя бы один из путей $\pi(q_1, \beta), \pi(q_2, \beta), \dots, \pi(q_r, \beta)$ для слов $\beta \in W$ может быть получен комбинацией частей путей $\pi(q_s, \alpha)$ для $\alpha \in V$, $1 \leq s \leq r$.

Доказательство. Так как $gl(P, V) \leq d$, каждый путь $\pi(q_s, \alpha)$, $1 \leq s \leq r$, разбивается точками пересечения с другими путями не более, чем на $d + 1$ частей. Стало быть всего

возникает не более, чем $(rd + r)d$ частей, из которых может быть составлен путь $\pi(q_s, \beta)$ при некотором s , $1 \leq s \leq r$. Так как $P \in D'(n, m, T, W)$, вершинный путь $\pi'(q_s, \beta)$ не имеет повторяющихся вершин, и следовательно, комбинировать для получения $\pi(q_s, \beta)$ мы можем лишь различными частями путей из $(rd + r)d$ возможных. Отсюда следует, что количество различных слов β , которые могут составить множество W не превосходит $((rd + r)d)^{(rd+r)d}$, а число таких множеств не превосходит $2^{((rd+r)d)^{(rd+r)d}}$.

Лемма доказана.

Пусть $P \in D'(n, m, T, (\alpha))$. Заметим, что в каждом вершинном пути $\pi'(q_r, \alpha)$, определяемом по графу P , вершины можно пронумеровать номерами от 1 до $[T] + 1$ в порядке появления этих вершин в пути так, что вершина q_r получит первый номер. Разобьем каждый класс $D'(n, m, T, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k))$ на подклассы $D'(n, m, T, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \Xi)$ по типу Ξ взаимного расположения путей $\pi(q_r, \alpha_{ij})$, где $r \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тип Ξ определяется следующим образом. Пусть $P \in D'(n, m, T, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k))$. Без ограничения общности полагаем $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Пусть теперь

$$\Xi(P) = (F_1, F_2, \dots, F_{k-1})$$

— упорядоченный набор наборов, где каждый из наборов F_h есть упорядоченный набор $(L_h^1, L_h^2, \dots, L_h^r)$ упорядоченных наборов четверок (s_1, s_2, s_3, s_4) , определяемая следующим образом. Положим $S = \tilde{\pi}(q_1, \alpha_{i_{h+1}})$. Далее пусть S' — подмножество тех вершин из S , в которые ведет на графе P по крайней мере одно ребро, встречающееся в путях $\pi(q_s, \alpha_{ij})$ при $s \in \{1, 2, \dots, r\}$ и $j \leq h$, которое отлично от ребра, которое ведет в эту вершину на пути $\pi(q_1, \alpha_{i_{h+1}})$. Для каждого $q \in S$ определим четверку (s_1, s_2, s_3, s_4) следующим образом: s_1 — номер вершины q в вершинном пути $\pi'(q_1, \alpha_{i_{h+1}})$, в том смысле о котором говорилось ранее. По определению S' существует такое $p \leq h$, что $q \in \pi'(q_s, \alpha_{i_p})$. Пусть теперь s_2 — номер вершины q в $\pi'(q_r, \alpha_{i_p})$, $s_3 = s$, $s_4 = p$. Выписывая теперь полученные четверки в порядке возрастания s_1 , получаем набор L_h^1 . В случае, если $S' = \emptyset$, полагаем L_h^1 равным пустому набору. Набор L_h^z при $2 \leq z$ определяется аналогично, только полагаем теперь $S = \tilde{\pi}(q_z, \alpha_{i_{h+1}})$ и при определении S' рассматриваем теперь пути $\pi(q_s, \alpha_{ij})$ при $s \in \{1, 2, \dots, r\}$ и $j \leq h$ и $\pi(q_{z'}, \alpha_{i_{h+1}})$ при $z' < z$. Нетрудно видеть, что подклассы $D'(n, m, T, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \Xi_1)$, $D'(n, m, T, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \Xi_2)$ не пересекаются при разных Ξ_1 и Ξ_2 , то есть мы имеем дело с разбиением класса $D'(n, m, T, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k))$ на непересекающиеся подклассы.

Рассмотрим граф $P \in D'(n, m, T, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \Xi)$. Заметим, что общее число четверок в наборах L_i^s при $1 \leq i \leq k - 1$ и $1 \leq s \leq r$, образующих тип Ξ , если их выписать подряд, равно $gl(P, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)) - (r - 1)$. Стало быть, типу Ξ можно приписать значение $gl(\Xi, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k))$. Зафиксируем множество слов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ и число p . Нетрудно оценить сверху число подклассов $D'(n, m, T, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \Xi)$, для которых $gl(\Xi, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)) = p$. Это количество не превосходит $p^{rk}(rd(T + 1)^2)^p$, что вытекает из сделанного замечания относительно общего числа четверок в наборах L_i^s , а также оценки числа четверок того вида, который был обозначен при описании понятия типа. Зафиксируем k и множество $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ из k слов длины $[T]$. При этом полагаем, что $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Зафиксируем также тип Ξ взаимного расположения путей α_{ij} . Введем обозначение

$$p_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \Xi} = \frac{|D'(n, m, T, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k), \Xi)|}{|D(n, m)|}.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть $gl(\Xi, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) = s$. Тогда

$$p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}, \Xi} \leq \frac{1}{n^s}.$$

Доказательство. Пусть имеется некоторая стохастическая процедура $\mathfrak{Z}$ построения графов из $D(n, m)$, которая с одинаковой вероятностью приводит к построению любого графа из $D(n, m)$. Заметим, что $p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}, \Xi}$ есть вероятность того, что в результате работы этой стохастической процедуры получится граф из $D'(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}), \Xi)$. Рассмотрим следующий процесс $\mathfrak{Z}_0$ построения графа из $D(n, m)$. Процесс $\mathfrak{Z}_0$ состоит из двух этапов. Первый этап состоит из $r[T]k$ последовательных шагов и определяется следующим образом. Перед началом процесса имеются множество Q , вершины $q_i \in Q$ при $1 \leq i \leq r$, текущее множество ребер $S = \emptyset$, текущая вершина $q^1 = q_1$. Пусть a — первый символ слова α_{i_1} . Тогда первый шаг процесса состоит в равновероятном выборе любой из вершин множества Q в качестве концевой вершины ребра, исходящего из текущей вершины $q = q_1$ и помеченного символом a . Обозначим выбранную вершину $q^{1'}$ и сделаем ее текущей для второго шага, то есть положим $q^2 = q^{1'}$, а текущее множество ребер пополним построенным помеченным ребром. Пусть проделаны $i < [T]$ шагов процесса. На $(i + 1)$ -м шаге рассматриваем текущую вершину q^i и $(i + 1)$ -ю букву слова α_{i_1} . Пусть это буква a' . Тогда, если среди ребер текущего множества S нет ребра, исходящего из вершины q^i и помеченного символом a' , то на $(i + 1)$ -м шаге осуществляется равновероятный выбор вершины из Q , которую мы обозначим $q^{i'}$ и которая становится текущей для следующего шага, то есть $q^{i+1} = q^{i'}$, а также добавление в множество S ребра, исходящего из вершины q^i , помеченного символом a' и входящего в $q^{i'}$, в противном случае множество S остается прежним, а текущей вершиной становится та, в которую ведет ребро из S , помеченное символом a , первая вершина которого есть q^i . По окончании первых $[T]$ шагов текущей вершиной назначается вершина q_2 , то есть $q^{[T] + 1} = q_2$, и процесс продолжается по тем же правилам. По окончании следующих $[T]$ шагов текущей вершиной назначается q_3 и так далее. После первых $r[T]$ шагов текущей вершиной снова назначается q_1 и процесс продолжается с заменой слова α_{i_1} на α_{i_2} . Еще через $r[T]$ шагов слово α_{i_2} заменяется на слово α_{i_3} и т. д.

Второй этап состоит в последовательном просмотре вершин множества Q и выполнении для каждой из них следующей операции: если для некоторого символа a в множестве S нет ребра, ведущего из вершины q и помеченного символом a , то производится случайный выбор вершины q' и добавление в множество S ребра, помеченного символом a , начинающегося в q и ведущего в q' . Второй этап заканчивается, когда множество ребер S вместе с множеством Q образуют некоторый граф из $D(n, m)$, который и выдается на выходе стохастической процедуры $\mathfrak{Z}_0$.

Нетрудно видеть, что описанный процесс с равной вероятностью приводит к построению любого графа из $D(n, m)$.

Посмотрим теперь, какие ограничения на работу процесса $\mathfrak{Z}_0$ следует наложить, чтобы на его выходе появился граф из $D'(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}), \Xi)$. Для $i < 2[T]$ необходимо потребовать, чтобы $q^{i'} \neq q^{j'}$ для $j < i$ и $q^{i'} \neq q_s$ при $1 \leq s \leq r$. На шаге с номером $2[T]$ необходимо потребовать, чтобы $q^{2[T]'} = q^{[T]}'$. При $l[T] < i < (l + 1)[T]$, $2 \leq l \leq r - 1$, необходимо требовать, чтобы $q^{i'} \neq q^{j'}$ для $j < i$ и $q^{i'} \neq q_s$ при $1 \leq s \leq r$, наконец, при $i = l[T]$, $3 \leq l \leq r$, необходимо, чтобы $q^{l[T]'} = q^{[T]}'$.

Пусть теперь

$$\Xi = ((L_1^1, L_1^2, \dots, L_1^r), (L_2^1, L_2^2, \dots, L_2^r), \dots, (L_{k-1}^1, L_{k-1}^2, \dots, L_{k-1}^r))$$

и $(s_1, s_2, s_3, s_4) \in L_h^s$ для некоторых $1 \leq h \leq k-1$ и $1 \leq s \leq r$. Тогда четверка (s_1, s_2, s_3, s_4) накладывает ограничение на процедуру $\mathfrak{Z}_0$, состоящее в том, что на шаге с номером $i = r[T]h + (s-1)[T] + s1 - 1$ выбираемая вершина $q^{i'}$ однозначно определяется тройкой (s_2, s_3, s_4) , а именно, $q^{i'} = q^j$, где $j = r[T](s_4 - 1) + [T](s_3 - 1) + s_2$. Это вытекает непосредственно из определения типа Ξ . Так как общее число четверок в наборах L_i^r равно $p - (r - 1)$, указанные ограничения вместе с аналогичными ограничениями на шагах с номерами $l[T]$ при $2 \leq l \leq r$ образуют систему из p ограничений, каждое из которых состоит в том, что на некотором шаге l процесса $\mathfrak{Z}_0$ ребро, определяемое на этом шаге не содержится среди ребер текущего множества ребер l -го шага и направляется в некоторую однозначно определенную вершину. Нетрудно понять, что каждое такое ограничение приводит к уменьшению вероятности появления графа $P \in D'(n, m, T, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}), \Xi)$ в n раз, отсюда следует, что

$$p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}, \Xi} \leq \frac{1}{n^s},$$

что и требовалось доказать.

6. Доказательство теоремы 4

Рассмотрим граф P из $D(n, m)$ и r вершин $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r}$ из $\mathcal{Q}$. Если найдется хотя бы одно слово α в алфавита A такое, что

$$f_P(q_{i_1}, \alpha) = f_P(q_{i_2}, \alpha) = \dots = f_P(q_{i_r}, \alpha),$$

то длину кратчайшего такого слова назовем временем склейки вершин $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r}$ в графе P и обозначим $T(P, q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r})$. Если же такого слова α не существует, то положим $T(P, q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r}) = 0$.

Рассмотрим многообразие наборов вида $(P, (q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r}))$, где $P \in D(n, m)$, а $(q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r})$ — неупорядоченный набор r различных элементов множества $\mathcal{Q}$. Это многообразие наборов мы обозначим $\mathfrak{R}(n, m)$. Выделим в этом многообразии подмногообразие $\mathfrak{R}(n, m, T_1, T_2)$ таких наборов $(P, (q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r}))$, что время склейки состояний $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_r}$ в графе P заключено в пределах от T_2 до T_1 . Рассмотрим функцию

$$p(n, m, T_1, T_2) = \frac{|\mathfrak{R}(n, m, T_1, T_2)|}{|\mathfrak{R}(n, m)|}.$$

Положим

$$T_2(n) = \log_m n - 4 \log_2 \log_2 n, \quad T_1(n) = \log_m n + \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 n.$$

Мы докажем теорему 4, если покажем, что $p(n, m, T_1(n), T_2(n)) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Заметим теперь, что многообразия $\mathfrak{R}(n, m)$ и $\mathfrak{R}(n, m, T_1, T_2)$ разбиваются на $\binom{n}{r}$ равномоощных классов наборов, соответствующих фиксации r состояний. Обозначим классы, соответствующие набору $(q_1, q_2, \dots, q_r)$ соответственно $\mathfrak{R}'(n, m)$ и $\mathfrak{R}'(n, m, T_1, T_2)$. Положим теперь

$$p'(n, m, T_1, T_2) = \frac{|\mathfrak{R}'(n, m, T_1, T_2)|}{|\mathfrak{R}'(n, m)|}.$$

Очевидно, что $p'(n, m, T_1, T_2) = p(n, m, T_1, T_2)$, так что для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что $p'(n, m, T_1(n), T_2(n)) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим $D(n, m, T')$ подмножество $D(n, m)$, состоящее из таких графов P , что $T(P, q_1, q_2, \dots, q_r) \leq T'$. Положим

$$p'_1(n, m, T) = \frac{|D(n, m, T)|}{|D(n, m)|}.$$

Покажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$p'_1(n, m, T_1(n)) \rightarrow 1, \quad p'_1(n, m, T_2(n)) \rightarrow 0.$$

Очевидно, что доказав эти утверждения, мы тем самым докажем теорему 4.

Докажем первое утверждение. Положим $K_1 = m^{\lceil T_1 \rceil}$. Тогда

$$K_1 = n^{r-1} L_1(n),$$

где

$$m(\log_2 \log_2 \log_2 \log_2 n)^{\log_2 m} \geq L_1(n) \geq \frac{\log_2 \log_2 \log_2 \log_2 n}{m}.$$

Занумеруем все слова в алфавите A длины $[T_1]$ числами от 1 до K_1 : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{K_1}$. Обозначим $N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}$ мощность множества $D'(n, m, T_1, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$. Согласно формуле включений и исключений

$$\begin{aligned} |D'(n, m, T_1)| &= \sum_{i_1=1}^{K_1} N_{\alpha_{i_1}} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}} + \dots \\ &+ (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}} + \dots + (-1)^{K_1} N_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{K_1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть d — максимальное целое четное число, не превосходящее $\log_2 \log_2 \log_2 n$. Тогда согласно неравенству Бонферрони [3]

$$\begin{aligned} |D'(n, m, T_1)| &\geq \sum_{i_1=1}^{K_1} N_{\alpha_{i_1}} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}} + \dots \\ &+ (-1)^d \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_d}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь для каждого набора слов $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k})$ справедливо равенство

$$N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}} = N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^1 + N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^2 + N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^3,$$

где каждое из трех слагаемых обозначает число графов в соответствующем подклассе $D'_i(n, m, T_1, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}))$, $1 \leq i \leq 3$. При нечетных k

$$N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}} \geq N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^1.$$

Так что из неравенства (2) следует неравенство

$$\begin{aligned}
 |D'(n, m, T_1)| \geq & \sum_{i_1=1}^{K_1} N_{\alpha_{i_1}}^1 - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}}^1 + \dots \\
 & + (-1)^{d+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_d}}^1 \\
 & - \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^2 \\
 & - \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^3, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где суммирование в соответствующих суммах проводится по четным значениям p .

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 p(n, m, T_1) &= \frac{|D(n, m, T_1)|}{|D(n, m)|}, \\
 p(n, m, T_1, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) &= \frac{N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}}{|D(n, m)|}, \\
 p^1(n, m, T_1, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) &= \frac{N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^1}{|D(n, m)|}, \\
 p^2(n, m, T_1, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) &= \frac{N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^2}{|D(n, m)|}, \\
 p^3(n, m, T_1, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}) &= \frac{N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^3}{|D(n, m)|}.
 \end{aligned}$$

Из неравенства (3) следует, что

$$\begin{aligned}
 |p(n, m, T_1)| \geq & \sum_{i_1=1}^{K_1} p_{\alpha_{i_1}}^1 - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}}^1 + \dots \\
 & + (-1)^{d+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_d}}^1 \\
 & - \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^2 \\
 & - \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^3, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где суммирование в соответствующих суммах проводится по четным значениям p , $2 \leq p \leq d$.

Докажем, что

$$\sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^2 + \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^3 = o(1), \quad (5)$$

где суммирование в соответствующих суммах, как и выше, проводится по четным значениям p , $2 \leq p \leq d$, и

$$\sum_{i_1=1}^{K_1} p_{\alpha_{i_1}}^1 - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}}^1 + \dots + (-1)^{d+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_d}}^1 = 1 + o(1). \quad (6)$$

Отсюда и из (4) следует первое утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь суммы

$$S_1 = \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^2,$$

$$S_2 = \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^3,$$

где здесь и ниже суммирование в соответствующих суммах проводится по четным p , $2 \leq p \leq d$.

Положим

$$D = 2^{((rd+r)d)^{(rd+r)d}}$$

и продублируем D раз каждую внутреннюю сумму в S_1 , то есть перейдем от S_1 к $S_3 = DS_2$. Из лемм 3 и 4 следует, что если граф P подсчитывался s раз в S_2 , то в S_3 он будет посчитан не менее s раз, откуда $S_2 \leq S_3$. Итак,

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^2 + \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^3 \\ \leq (D+1) \sum_{2 \leq p \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq K_1} N_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для проверки асимптотики (5) достаточно доказать, что

$$(D+1) \sum_{2 \leq s \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}}^2 = o(1). \quad (7)$$

Перепишем теперь сумму

$$\sum_{2 \leq s \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}}^2$$

в виде

$$\sum_{2 \leq s \leq d} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq K_1} \sum_{s' > s} (\Xi: gl(\Xi, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s})) = s') p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}, \Xi}.$$

Теперь, воспользовавшись леммой 5, а также указанной оценкой числа типов Ξ с

$$gl(\Xi, (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s})) = s',$$

можно оценить последнюю сумму сверху суммой

$$\sum_{2 \leq s \leq d} K_1^s \sum_{s' > s} \frac{(s')^{rs} (rd(T_1 + 1)^2)^{s'}}{n^{s'}}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} d &\leq \log_2 \log_2 \log_2 n, \\ T_1 &\leq \log_m n + \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 n, \\ K_1 &\leq n(\log_2 \log_2 \log_2 \log_2 n)^m, \end{aligned}$$

и используя обычную технику асимптотических оценок, нетрудно убедиться в том, что последняя сумма есть $O(1/\sqrt{n})$. Так как

$$(D+1)O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(1),$$

асимптотика (7) доказана.

Наконец, перейдем к асимптотике (6).

Нетрудно получить, что при всех $k \leq d$

$$\frac{1}{n^{k(r-1)}} \left(1 - \frac{\log_2^2 n}{n}\right) \leq p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^1 \leq \frac{1}{n^{k(r-1)}},$$

так что

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{K_1} p_{\alpha_{i_1}}^1 - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}}^1 + \dots + (-1)^{d+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_d}}^1 \\ \geq \sum_{1 \leq k \leq d} \frac{\binom{K_1}{k} (-1)^k (1 - \delta(k)(\log_2^2 n)/n)}{k! n^{k(r-1)}}, \end{aligned}$$

где $\delta(k) = 1$ при нечетных k и $\delta(k) = 0$ при четных k . Далее, при четных k

$$\binom{K_1}{k} \leq \frac{K_1^k}{k!}.$$

При нечетных $k \leq d$ нетрудно вывести, что

$$\binom{K_1}{k} \geq \frac{K_1^k (1 - (\log_2 n)/n)}{k!},$$

так что

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{K_1} p_{\alpha_{i_1}}^1 - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}}^1 + \dots + (-1)^{d+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq K_1} p_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_d}}^1 \\ \geq \sum_{1 \leq k \leq d} (-1)^k \frac{(K_1/n^{r-1})^k}{k!} + o(1) \\ = 1 - \exp(-(K_1/n^{r-1})) + o(1) = 1 + o(1). \end{aligned}$$

Итак, асимптотика (6), а вместе с ней и первое утверждение теоремы 4, полностью доказаны.

Перейдем к второму утверждению теоремы. Обозначим $D(n, m, \alpha)$ множество графов из P , для которых вершинные пути $\pi'(q_1, \alpha)$ и $\pi(q_2, \alpha)$ имеют общую последнюю вершину. Обозначим $l(\alpha)$ длину слова α . Тогда

$$|D(n, m, T_2)| \leq \sum_{\alpha, l(\alpha) \leq T_2} |D(n, m, \alpha)|.$$

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использовались в лемме 4, нетрудно установить, что для всякого α такого, что $l(\alpha) \leq T_2$,

$$\frac{|D(n, m, \alpha)|}{|D(n, m)|} \leq \frac{\log_2^3 n}{n}.$$

Учтем теперь, что различных слов длины, не превосходящей T_2 , не больше, чем mt^{T_2} . Отсюда легко выводим, что

$$\frac{|D(n, m, T_2)|}{|D(n, m)|} = o(1).$$

Этим доказывается второе утверждение теоремы 4.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность В. Б. Кудрявцеву и А. С. Подколзину за поддержку и помощь в работе.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Соколовский М. Н., Сложность порождения подстановок и эксперименты с автоматами. *Дискретный анализ* (1976) **29**, 68–86.
3. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Мир, Москва, 1984.
4. Hibbard T. N., Least upper bounds on minimal terminal state experiments for two classes of sequential machines. *J. Assoc. Comput. Mach.* (1961) **8**, 601–612.

Статья поступила 10.10.2002.