Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Шкребела, О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 4, 100–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:35:01

УДК 519.95

О сложности реализации линейных булевых функций схемами из функциональных элементов в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$

© 2003 г. И. С. Шкребела

Установлено, что минимальная схема из функциональных элементов в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$, реализующая линейную функцию от n переменных, содержит $4n - 4$ элементов.

Рассматриваются схемы из функциональных элементов [1] над базисом $B = \{x \rightarrow y, \bar{x}\}$, содержащим импликацию и инверсию. Элемент $\rightarrow$, реализующий функцию $x \rightarrow y$, будем обозначать, как изображено на рис. 1. Если нет необходимости различать входы элемента $\rightarrow$, то будем обозначать его через $\leftrightarrow$.

Пусть $L(S)$ есть сложность схемы S , то есть число функциональных элементов в S , а $L(f) = \min L(S)$, где минимум берется по всем схемам, реализующим f .

Теорема 1. Для любого натурального n выполнены следующие неравенства:

$$L(l_n) \leq 4n - 4,$$

где $l_n = l_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$;

$$L(\bar{l}_n) \leq 4n - 3,$$

где $\bar{l}_n = \overline{l_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus 1$.

Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

Доказательство. Очевидно, что $L(l_1) = 0$, $L(\bar{l}_1) = 1$. Схемы S_2 и $\hat{S}_2$, изображенные на рис. 2, 3, реализуют соответственно функции l_2 и $\bar{l}_2$. Далее, по индукции определим схемы S_n и $\hat{S}_n$, как указано на рис. 4 и 5.

Очевидно, что схемы S_n и $\hat{S}_n$ реализуют, соответственно, функции l_n и $\bar{l}_n$, а следовательно, для любого натурального n , такого, что $n \geq 2$,

$$L(S_n) = 4n - 4, \quad L(\hat{S}_n) = 4n - 3.$$

Таким образом, для любого натурального n

$$L(l_n) \leq 4n - 4, \quad L(\bar{l}_n) \leq 4n - 3.$$

Теорема 1 доказана.

Для доказательства нижних оценок нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений, аналогичных соответствующим утверждениям из [2, 3].

Будем считать, что на входы схем, кроме переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, подаются их отрицания $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ и константы 0, 1. Сложность таких схем будем обозначать $\hat{L}$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Для любой булевой функции f

$$\hat{L}(f) \leq L(f).$$

Для рассматриваемых схем справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Если на вход некоторого элемента подается константа 1 (см. рис. 6), то этот элемент можно удалить из схемы так, что новая схема будет реализовывать ту же функцию.

Свойство 2. Если на вход некоторого элемента подается константа 0 (см. рис. 7), то этот элемент можно либо удалить, либо заменить на элемент, на вход которого не подается константа.

Свойства 1 и 2 очевидны.

Рис. 6.

Рис. 7.

Свойство 3. Пусть в некоторой схеме S найдется подсхема Q вида A или B (см. рис. 8); выходы элементов в подсхемах A и B , вообще говоря, могут ветвиться, то есть подаваться на входы нескольких элементов. Тогда выходной элемент этой подсхемы можно либо удалить, либо заменить на подсхему вида C или D (см. рис. 9) так, что новая схема S' будет реализовывать ту же функцию, что и S .

Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая:

- (а) подсхема Q реализует булеву функцию, зависящую не более чем от одной переменной, тогда выходной элемент можно либо удалить, либо заменить на подсхему D ;
- (б) если же подсхема Q реализует булеву функцию f , существенно зависящую от x и y , то в этом случае f есть одна из следующих функций $x \rightarrow y$, $x \leftarrow y$, $x \vee y$, x / y , а каждую из этих функций можно реализовать схемой вида C (см. рис. 10).

Свойство 3 доказано.

Определение 1. Приведенной схемой будем называть схему, в которой на входы элементов не подаются константы и отсутствуют подсхемы вида A и B .

Из свойств 1–3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. Для любой функции f_n , от n переменных, $n \geq 2$, среди минимальных схем найдется приведенная.

Определение 2. Будем говорить, что переменная x_i забиваема, если при некоторых фиксированных значениях остальных переменных выходная функция схемы не зависит от x_i .

Для схем, реализующих линейную функцию более чем одной переменной, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого натурального n и $\sigma \in \{0, 1\}$ справедливо неравенство

$$\hat{L}(l_n^\sigma) \geq 4n - 4.$$

Доказательство проводится индукцией по n с использованием следующей леммы.

Лемма 1. Пусть S_n - минимальная приведенная схема, реализующая одну из функций $l_n, \bar{l}_n$, $n \geq 2$. Тогда найдутся четыре или более элементов, которые можно удалить из схемы и получить при этом новую схему S_{n-1} , реализующую одну из функций $l_{n-1}, \bar{l}_{n-1}$.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные варианты для схемы S_n , представленные в следующей таблице:

1. Некоторая переменная (возможно с отрицанием) подается на вход ровно одного элемента (см. рис. 11).

Так как E_1 — единственный элемент, на который подается x (или $\bar{x}$), то функция f не зависит от x и f — не константа (так как S_n — приведенная схема).

Тогда очевидно, что переменная x забываема и, следовательно, S_n не может реализовывать линейную функцию. Получаем противоречие, исключаяющий данный случай.

2. Некоторая переменная x_i и ее отрицание подаются на входы трех или более элементов (рис. 12).

Так как схема S_n приведенная, выход одного из элементов E_1, E_2, E_3 не может подаваться на вход другого (иначе S_n содержала бы подсхему вида А).

Для каждого элемента E_j , $j = 1, 2, 3$, найдется значение ε_i переменной x_i , при котором элемент E_j выдает тождественную единицу. А так переменная может принимать только

Рис. 11.

Рис. 12.

два значения, при некотором значении ε переменной x_i сразу два элемента будут выдавать единицу; без ограничения общности можно считать, что это элементы E_1 и E_2 , причем эти элементы не могут быть выходными элементами схемы S_n .

2.1. Выходы элементов E_1 и E_2 подаются на входы элемента E_4 (см. рис. 13). Элемент E_4 не может быть выходным элементом схемы S_n и, следовательно, выход некоторого элемента E_4 подается на вход некоторого элемента E_5 .

Рис. 13.

Рис. 14.

Рис. 15.

Если x_i принимает значение ε , тогда из схемы можно удалить E_1, E_2, E_3, E_4 так, что новая схема S' будет реализовывать линейную функцию $(n - 1)$ -й переменной (по свойству 1).

2.2. Выходы элементов E_1 и E_2 подаются на входы разных элементов E_4 и E_5 (см. рис. 14).

Как и в случае 2.1, положим $x_i = \varepsilon$ и удалим элементы E_1, E_2, E_4, E_5 (по свойству 1).

3. Каждая переменная (с отрицанием или без) в схеме S_n подается на входы ровно двух элементов.

В схеме S_n найдется элемент E_1 , на оба входа которого подаются переменные x , y (возможно, с отрицаниями). Тогда x (или $\bar{x}$) подается на вход еще одного элемента E_2 , на второй вход которого подается некоторая отличная от константы функция f (см. рис. 15).

3.1. Функция f не зависит от y .

В этом случае f не зависит и от x , поскольку при некотором значении y на выходе элемента E_1 будет константа. Тогда переменная x забиваема, то есть можно подобрать значения остальных переменных так, чтобы элементы E_1 и E_2 выдавали константу независимо от значения x .

3.2. Пусть $f \equiv y^\sigma$.

3.2.1. Выход одного из элементов E_1 или E_2 подается по меньшей мере на входы двух

Рис. 16.

элементов (E_3 и E_4). Можно считать, что $E_1 \mapsto E_3$, $E_1 \mapsto E_4$ (здесь и далее $E_i \mapsto E_j$ означает, что выход элемента E_i подается на вход элемента E_j). Тогда найдется значение ε переменной y такое, что элемент E_1 выдает единицу независимо от x .

Таким образом, E_1 выдает константу, E_2 реализует x или $\bar{x}$ (или константу), а на входы элементов E_3 и E_4 подается константа 1, то есть можно удалить 4 элемента.

3.2.2. Выход каждого из элементов E_1 , E_2 подается на вход только одного элемента.

3.2.2.1. Выходы элементов E_1 , E_2 подаются на входы одного общего элемента E_3 (см. рис. 16).

Без ограничения общности можно считать, что выход элемента E_2 подается на правый вход элемента E_3 . Тогда найдется значение ε переменной y такое, что элемент E_2 выдает единицу, а следовательно, и E_3 реализует единицу при $y = \varepsilon$. Но так как переменные x , y и выходы элементов E_1 и E_2 не подаются на входы других элементов схемы S_n , то выходная функция схемы не зависит от x (при $y = \varepsilon$), то есть S_n не может реализовывать линейную функцию. Получаем противоречие, исключающее данный случай.

3.2.2.2. Выходы элементов E_1 , E_2 подаются на входы разных элементов E_3 и E_4 (см. рис. 17).

(а) Один из элементов E_3 или E_4 , пусть для определенности E_3 — инвертор. Выберем значение переменной y так, чтобы элемент E_2 выдавал единицу. Тогда E_1 , E_3 реализуют x или $\bar{x}$ (или константы), E_2 реализует константу, а на E_4 подается единица. Утверждение леммы справедливо.

(б) Оба элемента E_3 , E_4 — не инверторы (см. рис. 18); кроме выходов элементов E_1 и E_2 на входы элементов E_3 , E_4 подаются соответственно функции g и h . Тогда хотя бы одна из функций g или h не зависит от x и y , а следовательно одна из переменных x или y забивается. Пусть g не зависит от x и y , тогда найдутся значения переменных, от которых существенно зависит g , и значение переменной y такие, что элементы E_1 , E_4 выдают константы независимо от x . Таким образом, выходная функция схемы S_n не зависит от x . Утверждение леммы справедливо.

3.3 Функция f существенно зависит от y , но $f \neq y^\sigma$ (см. рис. 15).

Рис. 17.

Рис. 18.

Определение 3. Скажем, что элемент E_1 подается слабо на элемент E_2 , если найдется набор элементов $G = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$ такой, что $E_1 \mapsto G_1, G_1 \mapsto G_2, \dots, G_k \mapsto E_2$; если при этом G минимальный по числу элементов набор для E_1 и E_2 , то будем говорить, что между элементами E_1 и E_2 лежит k элементов.

3.3.1. Пусть элемент E_1 не подается слабо на E_2 . Тогда найдется элемент E_3 такой, что на вход E_3 подается y (или $\bar{y}$) и E_3 подается слабо на E_2 (рис. 19). На второй вход E_3 подается некоторая функция g .

3.3.1.1. Если g не зависит от x , то переменная y забиваема.

3.3.1.2. Если g существенно зависит от x , то переменная x подается на три элемента, либо E_1 слабо подается на E_3 , а следовательно, и на E_2 , получаем противоречие.

3.3.2. Элемент E_1 слабо подается на элемент E_2 .

3.3.2.1. Между E_1, E_2 лежит не менее двух элементов (см. рис. 20).

Тогда найдется значение ε переменной y такое, что E_1 выдает константу 1. Тогда при подстановке $y = \varepsilon$, выходная функция f элемента E_4 не зависит от x, y . При $y = \varepsilon$ f постоянна, иначе переменная x забиваема. Таким образом, E_1, E_4 выдают константы,

Рис. 19.

Рис. 20.

на вход E_3 подается единица, а на выходе элемента E_2 реализуется x^σ (или константа). Таким образом, удаляются 4 элемента и утверждение леммы выполнено.

3.3.2.2. Между E_1 и E_2 лежит не более одного элемента.

Если выход элемента E_1 подается на вход элемента E_2 , то схема S_n содержит подсхему вида A , но поскольку S_n — приведенная схема, мы приходим к противоречию. Таким образом, между E_1 и E_2 лежит один элемент E_3 . Элемент E_3 — не инвертор, иначе возникает подсхема вида B . Поскольку во всех предыдущих рассуждениях переменные

Рис. 21.

Рис. 22.

x и y можно менять местами, то остаются два возможных случая, изображенных на рис. 21, 22.

В обоих случаях выберем значение ε переменной y так, чтобы элемент E_1 выдавал единицу.

(а) Элемент E_1 выдает константу, на входы элементов E_3 и E_5 подается единица, элемент E_3 выдает константу (иначе x оказывается забиваемой), а элемент E_2 реализует x^σ (или константу).

(б) Элемент E_3 реализует константу (при фиксированном значении $y = \varepsilon$). Иначе переменная x забивается, так как f (см. рис. 22) не зависит от x, y . Таким образом элементы E_1, E_3, E_4 реализуют константы, а элемент E_2 реализует x^σ (или константу).

Как в случае (а), так и в случае (б) утверждение леммы справедливо.

Все возможные случаи исчерпаны, лемма доказана.

При $n = 1$ утверждение теоремы 2 очевидно, а используя лемму 1 и предложение 2, индукцией по n легко получить доказательство теоремы для всех натуральных n .

Из теорем 1, 2 и предложения 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Для любого натурального n

$$L(l_n) = 4n - 4.$$

Таким образом, доказано, что минимальная схема из функциональных элементов в базисе $\{x \rightarrow y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$, содержит ровно $4n - 4$ элементов.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н. П. Редькину за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

1. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляемых систем*. МГУ, Москва, 1984.
2. Редькин Н. П., Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов. *Проблемы кибернетики* (1970) **23**, 83–101.
3. Редькин Н. П., О минимальной реализации линейной функции схемы из функциональных элементов. *Кибернетика* (1971) **6**, 31–38.

Статья поступила 01.05.2002.