Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. К. Щукин, О примитивных подгруппах полной аффинной группы конечного почти-поля, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 4, 126–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 06:41:13

О примитивных подгруппах полной аффинной группы конечного почти-поля

© 2003 г. К. К. Щукин

В этой работе завершается начатое автором ранее изучение конечных примитивных групп, стабилизатор точки которых содержит абелеву нормальную подгруппу, действующую неприводимо (сопряжениями) на абелевой нормальной подгруппе всей группы. Каждая такая группа H изоморфна подгруппе $Z_p^\nu \rtimes \Theta \rtimes \Psi$ полной аффинной группы $A(F_{p^\nu}) \cong Z_p^\nu \rtimes Z_{p^\nu-1} \rtimes Z_p$ поля F_{p^ν} , где знаком полупрямого произведения $\rtimes$ соединены ν -степень циклической группы Z_p , метациклическая группа Θ и (некоторая) группа автоморфизмов Ψ поля F_{p^ν} . С использованием классификации конечных почти-полей Цассенхауза, перечисляются и примитивные подгруппы полных аффинных групп конечных почти-полей.

1. В этой работе завершается начатое автором в [1–4] изучение конечных примитивных групп, стабилизатор точки которых содержит абелеву нормальную подгруппу, действующую неприводимо (сопряжениями) на абелевой нормальной подгруппе всей группы.

Для леводистрибутивного почти-поля $F = (F, +, \cdot)$ пусть $\text{Aut } F$ обозначает полную группу его автоморфизмов, $\text{Aut}(F, +)$ — группу автоморфизмов его аддитивной группы $(F, +)$. Если $G = (G, \cdot)$ — подгруппа его мультипликативной группы $F^* = (F^*, \cdot)$, то $\Lambda(G, \cdot) = \Lambda(G)$ будет обозначать ее образ в левом регулярном представлении

$$\lambda F^*: \rightarrow S(F), \quad a \rightarrow \lambda_a, \quad \lambda_a(x) = ax, \quad a, x \in F, \quad a \neq 0,$$

группы F^* в симметрической группе $S(F)$. Для каждой подгруппы Ψ группы $\text{Aut } F$ имеет смысл говорить о ее действии на $\Lambda(G)$ сопряжением, то есть о полупрямом произведении $\Lambda(G) \rtimes \Psi$, если G является Ψ -допустимой, то есть если

$$\psi \lambda_g \psi^{-1} = \lambda_{\psi(g)}, \quad g \in G, \quad \psi \in \Psi.$$

Эти и другие подгруппы в группе

$$\Lambda_F = \Lambda(F^*) \rtimes \text{Aut } F$$

и являются предметом нашего начального изучения, в основном для конечного случая.

Предложение 1. Пусть F — поле и Φ — подгруппа группы $\text{Aut}(F, +)$, содержащая неприводимую абелеву подгруппу χ в качестве своей нормальной подгруппы. Тогда

(1) χ сопряжена в $\text{Aut}(F, +)$ с подгруппой Γ группы $\Lambda(F^*)$;

(2) нормализатор Γ в $\text{Aut}(F, +)$ совпадает с $\Lambda_F = \Lambda(F^*) \rtimes \text{Aut } F$;

(3) Φ сопряжена в $\text{Aut}(F, +)$ с подгруппой группы Λ_F .

Доказательство см. в [1], предложения 1, 2, и в [2], теорема 3.10.

Предложение 2. Для подгруппы G группы F^* конечного поля $F = F_p^v$, где p — простое число, следующие условия эквивалентны:

(1) кольцо, натянутое на G в F , совпадает с полем F ;

(2) порядок $p \pmod{|G|} = v$;

(3) $\Lambda(G)$ неприводимо действует на группе $(F, +)$;

(4) $\Lambda(G) \rtimes \Psi$ неприводимо действует на группе $(F, +)$ для любой группы автоморфизмов Ψ поля F .

Доказательство см. в [1], лемма 1.

Замечание 1. Известно [3] следующее утверждение: для каждого простого p и натурального числа v существует такое простое число p_0 , что порядок $p_0 \pmod{p} = v$, за исключением случаев, когда $v = 2$, p — простое число Ферма и $v = 6$, $p = 2$. Так что за этими исключениями, согласно пункту (1) предложения 2, в группе $\Lambda(F^*)$, $F = F_p^v$, всегда существует неприводимая подгруппа простого порядка p_0 .

Напомним еще (см. [4–6]), что класс $DF(q, n)$ конечных почти-полей Диксона из q^n элементов, где $q = p^n$, p — простое число, не пуст, если и только если q, n — диксонова пара чисел, то есть если и только если каждое простое r или $r = 4$, которое делит n , должно делить и $q - 1$. У всякого $F_{q,n} \in DF(q, n)$ его мультипликативная группа изоморфна метациклической группе $G_{q,n}$ специального вида. Отсюда, поскольку $F_{q,n}$ и спаренное с ним поле $F = F_q$ имеют общую аддитивную группу $(F, +)$, группа $\Lambda(F_{q,n}^*)$ сопряжена в $\text{Aut}(F, +)$ с подгруппой группы Λ_F поля $F_{q,n}$. Уточнение этого факта содержит следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $F = F_p^v$ — поле, p — простое число,

$$\Lambda(F^*) = \langle \lambda_a \rangle, \quad \text{Aut } F = \langle \eta \rangle.$$

Тогда каждая подгруппа Θ группы

$$\Lambda_F = \Lambda(F^*) \rtimes \text{Aut } F$$

с нормальной в Θ абелевой подгруппой Γ порядка m , неприводимо действующей на группе $(F, +)$, будучи метациклической, в общем случае имеет порядок mn , где $ni = v$, i представление

$$\Theta \cong \langle xy \mid x^m = 1, y^n = x^l, yxy^{-1} = x^q \rangle,$$

где $q = p^n$, которое осуществляется, когда

$$\gamma = \lambda_a^k, \quad \Gamma = \langle \gamma \rangle, \quad \omega = \lambda_a^s \eta^n, \quad \Theta / \Gamma = \langle \Gamma \omega \rangle,$$

при этом для порядка q справедливы соотношения

$$q \pmod{m} = n, \quad q - 1 = 0 \pmod{m}, \quad (m, q) = 1.$$

Доказательство. Если подгруппа Θ нециклическая, $\Gamma = \langle \gamma \rangle$, $\gamma = \lambda_a^k$, имеет порядок m , а $\Theta/\Gamma = \langle \Gamma\omega \rangle$ — порядок n и $mn \mid p^\nu - 1$, то $\omega\lambda_a \neq \lambda_a\omega$, то есть

$$\omega = \lambda_a^s \psi, \quad 0 \leq s < p^\nu - 1, \quad \psi \in \langle \eta \rangle, \quad \psi \neq 1.$$

Так как

$$\omega^i = \lambda_{a+\psi(a)+\dots+\psi^i(a)}^s \psi^i, \quad i = 0, 1, \dots,$$

из предположения, что $\omega^n \in \Gamma$, следует, во-первых, что $\psi^n = 1$, то есть $\psi = \eta^u$, где $u = \nu/n$, — автоморфизм Фробениуса поля F_{q^n} над полем F_q , где $q = p^n$, $\psi(a) = a^q$. Во-вторых,

$$\omega^n = \lambda_a^{s(1+q+\dots+q^n)} \psi^n = \lambda_a^{s(q^n-1)/(q-1)} = \lambda_a^{kl}$$

для некоторого целого числа l . Полагая $m' = (q^n - 1)/m$, запишем $k = k'm'$, где $(k', m') = 1$. Отсюда, равенство $s(q^n - 1) = (q - 1)kl$ равносильно равенству $sm = (q - 1)k'l$, то есть

$$(q - 1)l \equiv 0 \pmod{m}.$$

Далее,

$$\omega\gamma\omega^{-1} = \omega\lambda_a^k\omega^{-1} = \lambda_a^{kq} = \gamma^q.$$

Понятно, что $(q, m) = 1$, и остается напомнить, что сравнение $q \pmod{m} = n$ следует из предположения о неприводимости Γ , согласно предложению 2.

Следствие 1. Если q, n — диксонова пара, то

$$\Theta \cong G_{q,n},$$

причем

$$|\Theta| = mn = q^{n-1}, \quad (q - 1)l = m.$$

Более того, подгруппа Θ эквивалентна $\Lambda(F_{q,n})$ на F для некоторого $F_{q,n} \in DF(q, n)$, спаренного с полем $F = F_{q^n}$.

Доказательство. Пусть $F = F_{q^n}$ и $F_{q,n} = (F, +, \circ)$ — спаренное с ним почти-полем Диксона, тогда умножение в нем $x \circ y$ для $x, y \in F$ задается формулой (см. [5])

$$x \circ y = \begin{cases} x\psi^i(y), & \text{если } \lambda_x \in \Gamma\lambda_a^{(q^i-1)/(q-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

в силу разложения

$$\Lambda(F^*) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma\lambda_a^{(q^i-1)/(q-1)}$$

справедливого для диксоновой пары q, n при $m = (q - 1)/n$. Но в этом случае

$$\Theta = \bigcup_{i=1}^n \Gamma\lambda_a^{(q^i-1)/(q-1)} \psi^i,$$

и ввиду биекции

$$\Gamma_a^{(q^i-1)/(q-1)} \rightarrow \Gamma \lambda_a^{(q^i-1)/(q-1)} \psi^i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

получаем, что для $x \in F$, $x \neq 0$, действие Θ на F задается равенством

$$\lambda_x \psi^i(y) = \lambda_x \psi^i(y) = x \circ y,$$

если $\lambda_x \in \Gamma \lambda_a^{(q^i-1)/(q-1)}$.

Заметим дополнительно, что число неэквивалентных подгрупп $\Theta \cong G_{q,n}$ в Λ_F для данной диксоновой пары q, n равно, очевидно, $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. В этой связи уместно напомнить так же следующее утверждение из [1].

Предложение 3. В условиях и обозначениях теоремы 1 имеют место следующие утверждения:

- (1) число $\alpha(p^v - 1)$ неизоморфных подгрупп $\Gamma \cong Z_m$ в группе $\Lambda(F^*)$ таких, что порядок $p \pmod{m} = v$, вычисляется по формуле

$$\alpha(p^v - 1) = \sum_{d|v} \mu(d) \tau(p^{v/d} - 1),$$

где $\mu(s)$, $\tau(s)$ — это, соответственно, функция Мебиуса и число целых положительных делителей числа $s \in \mathbb{N}$; если же $v = r^s$ для некоторого простого числа r , то справедлива и формула

$$\alpha(p^v - 1) = \tau(p^v - 1) - \tau(p^{v/d} - 1),$$

- (2) число $\beta(p^v - 1)$ неизоморфных подгрупп вида $\Gamma \rtimes \Psi$ в группе

$$\Lambda_F^* = \Lambda(F^*) \rtimes \Psi \cong Z_m \rtimes Z_d,$$

где $\Psi \leq \text{Aut } F$, m, d те же, что и в пункте (1), но $d > 1$, дает формула

$$\beta(p^v - 1) = (\tau(v) - 1) \alpha(p^v - 1).$$

Ясно, что все группы вида $\Gamma \rtimes \Psi$ относятся к Z -метациклическим, для которых в общем случае выполняется дополнительное условие $(m, q - 1) = 1$, что и дает $y^v = 1$ в их представлении. В нашем случае это означает, что

$$\lambda_a^{s(q^n-1)/(q-1)} = 1$$

или

$$s(q^v - 1) = (q - 1)k'l'm, \quad smm' = (q - 1)kmm',$$

откуда, $s \equiv 0 \pmod{q - 1}$, а значит, $y = \psi$, и мы получаем следующее дополнение к утверждению теоремы 1: в группе Λ_F единственными Z -метациклическими подгруппами являются группы вида $\Gamma \rtimes \Psi$ из пункта 2 предложения 3.

2. Напомним некоторые факты (см. [5, 8]). Прежде всего, если симметрическая группа $S(F)$ содержит регулярную подгруппу T , то на множестве F можно ввести структуру аддитивной группы $(F, +)$ с нулем 0 так, что $T = T(F, +)$ является образом $(F, +)$ при ее (левом) регулярном представлении

$$t: F \rightarrow S(F), \quad t(x) = t_x, \quad t(x+y) = t_x t_y, \quad t_x t_0 = t_x = t_0 t_x, \quad x, y, 0 \in F, \quad t_x \in Tt.$$

Если к тому же $\text{Aut}(F, +)$ содержит подгруппу Γ , регулярно действующую на множестве

$$F^* = F - \{0\},$$

то это позволяет так определить умножение на F в $(F, \cdot)$, что образуется структура почти-поля $F = (F, +, \cdot)$ с нулем и единицей 1 . При этом $(F, +)$ оказывается с необходимостью абелевой группой, и $\Lambda = \Lambda(F^*)$ будет образом мультипликативной группы $(F^*, \cdot)$ при ее (левом) регулярном представлении

$$\lambda: F^* \rightarrow \Lambda, \quad \lambda(a) = \lambda_a, \quad \lambda_a(x) = ax, \quad a, x \in F, \quad a \neq 0.$$

Определение 1. Аффиной группой $A(F)$ почти-поля $F = (F, +, \cdot)$ назовем подгруппу

$$A(F) = T(F, +) \rtimes \Lambda(F^*)$$

голоморфа

$$\text{Hol}(F, +) = T(F, +) \rtimes \text{Aut}(F, +)$$

его аддитивной группы $(F, +)$, а его полная аффинная группа $\tilde{A}(F)$ определяется полупрямым произведением

$$\tilde{A}(F) = A(F) \rtimes \text{Aut}(F).$$

Отметим, что для каждого почти-поля $F = (F, +, \cdot)$ имеют место следующие утверждения [5].

Для $\Phi \leq \text{Aut } F$ и Φ -допустимой $\Gamma \leq \Lambda(F^*)$ справедливо равенство

$$(T(F, +) \rtimes \Gamma) \rtimes \Phi = T(F, +) \rtimes (\Gamma \rtimes \Phi)$$

с учетом действия Φ на $\Lambda(F^*)$ сопряжениями

$$\varphi \lambda_a \varphi^{-1} = \lambda_{\varphi(a)}, \quad \varphi \in \Phi, \quad \lambda_a \in \Lambda(F^*),$$

при этом

$$H = T(F, +) \rtimes \Gamma \rtimes \Phi$$

примитивна на множестве F тогда и только тогда, когда Γ неприводима как подгруппа $\text{Aut}(F, +)$.

$\Lambda(F^*) \rtimes \text{Aut } F$ совпадает с нормализатором $\Lambda(F^*)$ в $\text{Aut}(F, +)$.

Аффинные группы двух изоморфных почти-полей с одной и той же аддитивной группой $(F, +)$ сопряжены в $\text{Hol}(F, +)$.

Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть примитивная подгруппа H и абелева транзитивная подгруппа T в $S(F)$ таковы, что $T \triangleleft H$ и

$$H_0 = \{h \in H \mid ht_0h^{-1} = t_0\}.$$

Тогда

- (1) если H_0 содержит нормальную абелеву подгруппу Γ , действующую неприводимо на T сопряжениями, то H является подгруппой полной аффинной группы $\tilde{A}(F)$ поля $F = (F, +, \cdot)$ с $t(F, +) = T$, $\lambda(F^*, \cdot) = \Lambda$;
- (2) если H_0 содержит нормальную подгруппу Λ , действующую регулярно на $T^* = T \setminus t_0$, то H — подгруппа полной аффинной группы $\tilde{A}(F)$ почти-поля $F = (F, +, \cdot)$ с $t(F, +) = T$, $\Lambda(F^*, \cdot) = \Lambda$.

В конечном случае версия последнего предложения принимает вполне законченный вид, если учесть, что мощность каждого конечного почти-поля равна примарной степени.

Ниже везде Z'_s обозначает прямую степень циклической группы Z_s .

Теорема 2. Пусть $F = (F, +, \cdot)$ — конечное почти-поле из p^v элементов,

$$\tilde{A}(F) = T(F, +) \rtimes \Lambda(F^*) \rtimes \text{Aut } F$$

— его полная аффинная группа,

$$H = T(F, +) \rtimes H_0$$

— ее примитивная подгруппа,

$$H_0 = \{h \in H \mid ht_0h^{-1} = t_0\}.$$

Тогда, с точностью до сопряжения, в $\tilde{A}(F)$ существуют только следующие группы типа $H \cong Z_p^v \rtimes H_0$.

(I) Разрешимые группы.

(А) H_0 содержит свою абелеву нормальную подгруппу Γ порядка t , действующую неприводимо на $T(F, +)$ сопряжениями. Тогда

- (1) $F = GF(p^v)$, $H \cong Z_p^n \rtimes \Theta \rtimes \Psi$, где Θ — метациклическая группа порядка tn , $v/n = u$, из теоремы 1, в частности, $\Theta \cong G_{q,n}$ в случае диксоновой пары $q = p^u$, n и $\Psi \leq \text{Aut } F$;
- (2) $F \in DF(3, 2)$, $H \cong Z_3^2 \rtimes Q_8 \rtimes S_3$, где Q_8 , S_3 — группа кватернионов и симметрическая группа, соответственно;

(В) H_0 не содержит абелевой нормальной подгруппы, действующей неприводимо на $T(F, +)$. Тогда F — (некоммутативное) почти-поле и (для максимальной H) возможны только случаи

- (3) $|F| = 5^2$, $\tilde{A}(F) \cong Z_5^2 \rtimes T^* \rtimes Z_4$, $T^* \cong SL_2(3)$;
- (4) $|F| = 11^2$, $\tilde{A}(F) \cong Z_{11}^2 \rtimes (T^* \rtimes Z_5) \rtimes Z_2$;
- (5) $|F| = 7^2$, $\tilde{A}(F) \cong Z_7^2 \rtimes O^* \rtimes Z_3$;
- (6) $|F| = 23^2$, $\tilde{A}(F) \cong Z_{23}^2 \rtimes (O^* \rtimes Z_{11})$.

(II) *Неразрешимые группы (для максимальной H):*

$$(7) |F| = 11^2, \tilde{A}(F) \cong Z_{11}^2 \rtimes I^* \rtimes Z_5, I^* \cong SL_2(5);$$

$$(8) |F| = 29^2, \tilde{A}(F) \cong Z_{29}^2 \rtimes (I^* \rtimes Z_7) \rtimes Z_2;$$

$$(9) |F| = 59^2, \tilde{A}(F) \cong Z_{59}^2 \rtimes (I^* \rtimes Z_{29}).$$

Заметим, что группы T^* , O^* , I^* называют, соответственно, бинарными группами тетраэдра, октаэдра и икосаэдра. Все они являются расширениями своего центра $Z \cong Z_2$, который не выделяется прямым множителем $T^*/Z \cong A_4$, $O^*/Z \cong S_4$, $I^*/Z \cong A_5$. Их подгруппы хорошо известны, и подробно о них см. в приложениях J и I монографии [8].

Список литературы

1. Щукин К. К., О примитивных разрешимых группах перестановок с коммутативным стабилизатором точки. *Сиб. матем. ж.* (1993) **34**, №3, 214–217.
2. Щукин К. К., О примитивных разрешимых группах перестановок с коммутативным стабилизатором точки. *Изв. АН Республики Молдова, сер. матем.* (1994), №2(15), 40–50.
3. Щукин К. К., Неприводимые абелевы группы автоморфизмов абелевой группы и примитивные разрешимые группы перестановок. *Изв. РАН, сер. матем.* (1994) **58**, №2, 189–195.
4. Щукин К. К., Письмо в редакцию. *Сиб. матем. ж.* (1996) **60**, №6, 222.
5. Zassenhaus H., Über endliche Fastkörper. *Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.* (1935) **11**, 187–220.
6. Холл М., *Теория групп*. ИЛ, Москва, 1963.
7. Wähling H., *Theorie der Fastkörper*. Thales Verlag, Berlin, 1987.
8. Huppert B., *Endliche Gruppen*. Bd. I. Springer, Berlin, 1967.
9. Birkhoff G. D., Vandiver H. S., On the integral divisor of $a^n - b^n$. *Ann. Math.* (1904) **5**, 173–180.
10. Супруненко Д. А., *Группы матриц*. Наука, Москва, 1972.

Статья поступила 03.01.2001.