Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Омелянов, А. А. Сапоженко, О числе и структуре множеств, свободных от сумм в отрезке натуральных чисел, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 4, 141–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:21:29

О числе и структуре множеств, свободных от сумм в отрезке натуральных чисел

© 2003 г. К. Г. Омелянов, А. А. Сапоженко

Подмножество A целых чисел называется свободным от сумм, если для любых $a, b \in A$ число $a + b$ не принадлежит множеству A . Пусть $s(n, t)$ — число всех подмножеств множества натуральных чисел $\{t, t + 1, \dots, n\}$, свободных от сумм. В статье доказано, что если $t \geq n^{3/4} \log_2 n$, то

$$s(n, t) = O(2^{n/2}).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 01-01-00266.

1. Введение

Подмножество A целых чисел называется свободным от сумм, если для любых $a, b \in A$ число $a + b$ не принадлежит множеству A . Для любых действительных чисел q и p обозначим через $[q, p]$ множество натуральных чисел x таких, что $q \leq x \leq p$. Семейство всех подмножеств $A \subseteq [t, n]$, свободных от сумм, обозначим через $S(t, n)$. Пусть

$$s(t, n) = |S(t, n)|, \quad s(n) = |S(1, n)|.$$

П. Камерон и П. Эрдёш [6] высказали гипотезу, что $s(n) = O(2^{n/2})$. Кроме того, в [6] получена оценка $s(n/3, n) = O(2^{n/2})$. Н. Калкин [5] и независимо Н. Алон [4] доказали, что $s(n) = 2^{n(1/2 + o(1))}$ при $n \rightarrow \infty$. В [1] доказано, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует константа $c = c(\varepsilon)$ такая, что $s((1/4 + \varepsilon)n, n) \leq c2^{n/2}$. В [7] изучалась структура подмножеств $A \in S(1, n)$, удовлетворяющих условию $|A| \geq 0,4n - x$, где x — произвольное фиксированное число. Основной целью данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $t \geq n^{3/4} \log n$. Тогда

$$s(t, n) = O(2^{n/2}). \quad (1)$$

Здесь и далее $\log a = \log_2 a$.

Утверждение теоремы 1 вытекает из теоремы 3, описывающей строение множеств $A \in S(1, n)$, содержащих достаточно плотный отрезок небольшой длины. Из теоремы 3 вытекает также независимое доказательство упомянутого выше результата Н. Алона и Н. Калкина.

2. Вспомогательные утверждения

Подмножество A вершин графа G называется независимым, если подграф, порожденный множеством A , не содержит ребер. Число всех независимых множеств графа G обозначим через $I(G)$. Пусть $l \leq k - \theta \leq k + \theta \leq m$. Граф с n вершинами, в котором минимальная степень вершины равна l , максимальная степень вершины равна m , доля вершин, степень которых больше $k + \theta$, равна Δ , доля вершин, степень которых меньше $k - \theta$, равна δ , назовем $(n, l, k, m, \delta, \Delta, \theta)$ -графом. В [2] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть G является $(n, l, k, m, \delta, \Delta, \theta)$ -графом. Тогда

$$I(G) \leq 2^{(n/2)(1+\delta(1-l/k)+\Delta(m/k-1)+O(\theta/k+\sqrt{(\log k)/k}))}. \quad (2)$$

Следствие 1. Пусть максимальная степень вершины n -вершинного графа G равна 2φ , минимальная степень вершины n -вершинного графа G равна φ , а доля вершин, степень которых отлична от 2φ , равна ε . Тогда

$$I(G) \leq 2^{(n/2)(1+\varepsilon/2+O(\sqrt{(\log \varphi)/\varphi}))}. \quad (3)$$

Доказательство. Для доказательства следствия 1 достаточно положить в (2) $l = \varphi$, $k = m = 2\varphi$, $\theta = \Delta = 0$, $\delta = \varepsilon$.

Следствие 2. Пусть в n -вершинном графе G степень каждой вершины не больше 2φ , а доля вершин, степень которых отлична от φ , равна ε . Тогда

$$I(G) \leq 2^{(n/2)(1+\varepsilon+O(\sqrt{(\log \varphi)/\varphi}))}. \quad (4)$$

Доказательство. Для доказательства достаточно применить (2) к случаю $k = \varphi$, $m \leq 2\varphi$, $l \geq 0$, $\theta = 0$ и $\Delta + \delta \leq \varepsilon$.

Везде в дальнейшем $\varphi = \lceil \sqrt{n} \rceil$ и $\psi = \lfloor \varphi \sqrt{\log n} \rfloor$. Отрезок $[m, m + \psi - 1]$ назовем плотным относительно $A \subseteq [1, n]$, если $|A \cap [m, m + \psi - 1]| \geq \varphi$. Плотный относительно A отрезок $[m, m + \psi - 1]$ назовем левым в $[a, b]$, если при любом k , $a \leq k < m$, отрезок $[k, k + \psi - 1]$ не является плотным относительно A . Через $\hat{S}(q, n)$ обозначим семейство всех $A \in S(1, n)$, у которых $[q - \psi + 1, q]$ является левым плотным отрезком в $[1, n]$, и пусть $\hat{s}(q, n) = |\hat{S}(q, n)|$.

Пусть $t, p \in [1, n]$. Обозначим через $R(t, p)$ число подмножеств $A \subseteq [t, p]$ таких, что $|A \cap [i, i + \psi - 1]| \leq \varphi$ для любого i , $t \leq i \leq p - \psi + 1$.

Лемма 1. Пусть $1 \leq p \leq n$. Тогда для любого t , $1 \leq t \leq p - \psi + 1$,

$$R(t, p) \leq 2^{(p-t+1)(\log \log n)/\sqrt{\log n} + O(\sqrt{n} \log \log n)}. \quad (5)$$

Доказательство. Разбив отрезок $[t, p]$ на $\lceil (p - t + 1)/\psi \rceil$ отрезков, длина каждого из которых, кроме, может быть, одного, равна ψ , и положив

$$H(x) = -x \log x - (1 - x) \log(1 - x),$$

находим, что

$$\begin{aligned} R(t, p) &\leq \left(\sum_{i=0}^{\varphi} \binom{\psi}{i} \right)^{\lceil (p-t+1)/\psi \rceil} \leq 2^{\psi H(\varphi/\psi) \lceil (p-t+1)/\psi \rceil} \\ &\leq 2^{(p-t+1)(\log \log n)/\sqrt{\log n} + O(\sqrt{n} \log \log n)}. \end{aligned}$$

Пусть подмножество $F \subseteq [q - \psi + 1, q]$ таково, что $|F| = \varphi$. Пусть $k \leq p \leq n$. Определим граф $G_F(k, p)$ следующим образом. Вершинами графа $G_F(k, p)$ являются числа отрезка $[k, p]$, а ребрами — пары $\{u, v\}$ чисел из $[k, p]$ такие, что $|u - v| \in F$.

Теорема 3. Пусть $\hat{q} = n^{3/4} \log n$, $\varepsilon_n = \log \log n / \sqrt{\log n}$ и $\omega_n = \sqrt{n} \log \log n$. Тогда

$$\hat{s}(q, n) \leq \begin{cases} 2^{n/2-q/4+O(q\varepsilon_n)} & \text{при } \hat{q} \leq q \leq 4n/9, \\ 2^{q+O(n^{3/4}\sqrt{\log n})} & \text{при } 4n/9 < q < n/2 - \hat{q}, \\ 2^{(n-q)+O(n\varepsilon_n+\omega_n)} & \text{при } n/2 + \hat{q} < q \leq n. \end{cases} \quad (6)$$

Кроме того, существуют абсолютные постоянные $0 < c_1 \leq c_2$ такие, что

$$c_1 2^{n/2} \leq \sum_{n/2 - \hat{q} \leq q \leq n/2 + \hat{q}} \hat{s}(q, n) \leq c_2 2^{n/2}. \quad (7)$$

Доказательство. Докажем первое из неравенств (6). Положим $m = \lfloor (n - q)/2q \rfloor$ и $r = n - q - 2mq$. Заметим, что $0 \leq r < 2q$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $0 \leq r \leq q/2$. В этом случае из неравенства $q \leq 4n/9$ и из того, что $\psi = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, следует, что $m \geq 1$ и $q < n/3$. Пусть $F \subseteq [q - \psi + 1, q]$ и $|F| = \varphi$. Положим

$$\hat{S}_F(q, n) = \{A \in \hat{S}(q, n) : F \subseteq A\}.$$

Определим следующее семейство графов:

$$G_{-1} = G_F(q + 1, 3q + r), \\ G_i = G_F(3q + r + 2iq + 1, 3q + r + 2(i + 1)q), \quad i = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Для любого $A \in \hat{S}_F(q, n)$ и любого i , $-1 \leq i < m$, подмножество $A \cap V(G_i)$ является независимым в графе G_i . Отсюда следует, что

$$\hat{s}(q, n) \leq 2^\psi R(1, q) \prod_{i=-1}^{m-1} I(G_i). \quad (8)$$

Заметим, что при $i \geq 0$ в каждом графе G_i по меньшей мере $2(q - \psi)$ вершин имеют степень φ , а остальные 2ψ . В силу (4) при $i \geq 0$ справедлива оценка

$$I(G_i) \leq 2^{(q+\psi)(1+O(\sqrt{(\log \varphi)/\varphi}))}. \quad (9)$$

В графе G_{-1} имеется $2(q - \psi)$ вершин степени φ , r вершин степени 2φ , а остальные имеют степень в пределах от φ до 2φ . С использованием (4) получаем, что

$$I(G_{-1}) \leq 2^{(q+r+\psi)(1+O(\sqrt{(\log \varphi)/\varphi}))}. \quad (10)$$

Теперь из (8)–(10) с учетом (5) получаем, что при $m = \lfloor (n - q)/2q \rfloor$ и $r = n - q - 2mq$

$$\begin{aligned} \hat{s}(q, n) &\leq R(1, q) 2^{q+r+\psi+(n-3q-r)(q+\psi)/(2q)+O(mq\sqrt{(\log \varphi)/\varphi})} \\ &\leq 2^{n/2-(q-r)/2+n\psi/q+O(n\sqrt{(\log n)}n^{-1/4}+q(\log \log n)/\sqrt{\log n})}. \end{aligned}$$

Поскольку $r \leq q/2$, справедлива оценка

$$\hat{s}(q, n) \leq 2^{n/2-q/4+O\left(n^{3/4}\sqrt{\log n+q(\log \log n)}/\sqrt{\log n}\right)}. \quad (11)$$

2. Пусть $3q/2 \leq r < 2q$. В этом случае $m \geq 0$. Положим

$$\begin{aligned} G_{-1} &= G_F(q+1, q+r), \\ G_i &= G_F(q+r+2iq+1, q+r+2(i+1)q), \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

В графе G_{-1} ровно $2(r-q)$ вершин имеют степень, равную φ , $2q-r$ вершин имеют степень, лежащую между 0 и φ . Графы G_i при $i \geq 0$ устроены аналогично предыдущему случаю. С использованием (4) получаем, что

$$I(G_{-1}) \leq 2^{q+O(q\sqrt{(\log \varphi)/\varphi})}. \quad (12)$$

Аналогично (11) получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{s}(q, n) &\leq R(1, q)2^{q+(n-r-q)(q+\psi)/(2q)+O(n\sqrt{(\log \varphi)/\varphi})} \\ &\leq 2^{n/2-(r-q)/2+n\psi/q+O\left(n\sqrt{\log nn^{-1/4}+q(\log \log n)}/\sqrt{\log n}\right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом того, что $r \geq 3q/2$, отсюда получаем, что

$$\hat{s}(q, n) \leq 2^{n/2-q/4+O(n^{3/4}\sqrt{\log n+q(\log \log n)}/\sqrt{\log n})}. \quad (14)$$

3. Пусть теперь $|q-r| < q/2$. При этом $\hat{q} \leq q < 2n/7$ и $m > 0$. Сведем доказательство к первому случаю путем расширения q за счет уменьшения r . Наряду с q и r определим параметры q_1 и r_1 так, что $0 \leq r_1 \leq q_1/2$. Именно, для $a = \lfloor 2(3q+r)/7 \rfloor$, $b = \lfloor (3q+r)/3 \rfloor$ и $A \in \hat{S}_F(q, n)$ положим

$$q_1 = q_1(A) = \max\{a \leq j \leq b : |[j-\psi+1, j] \cap A| \geq \varphi\}, \quad r_1 = r - 3(q_1 - q).$$

Для произвольного $F_1 \subseteq [q_1 - \psi + 1, q_1]$ такого, что $|F_1| = \varphi$, положим

$$G_{-1} = G_{F_1}(b+1, 3b).$$

При этом в $2b_1$ -вершинном графе G_{-1} имеется $2q - 2\psi$ вершин степени φ , а остальные имеют степень в пределах от φ до 2φ . С использованием (4) получаем, что

$$I(G_{-1}) \leq 2^{(2b-q_1+\psi)(1+O(\sqrt{(\log \varphi)/\varphi}))}. \quad (15)$$

Графы G_i при $i \geq 0$ определим как и в случае 1. Ясно, что множество $A \cap [q+1, q_1]$ можно определить не более чем 2^{q_1-q} способами. Заметим еще, что отрезок $[q_1+1, b]$ не содержит плотных (относительно A) отрезков длины ψ . Поэтому множество $A \cap [q_1+1, b]$ можно определить не более чем $R(q_1+1, b)$ способами. Теперь аналогично (8) с учетом (5), (9) и (15) находим, что

$$\begin{aligned} \hat{s}(q, n) &\leq R(1, q)R(q_1+1, b)2^{q_1-q} \prod_{i=-1}^{m-1} I(G_i) \\ &\leq R(1, q)R(q_1+1, b)2^{q_1-q+2b-q_1+\psi+(n-3q-r)(q+\psi)/(2q)+O(n\sqrt{(\log \varphi)/\varphi})} \\ &\leq 2^{n/2-q/2+r/6+O(n(\psi/q+\sqrt{\log nn^{-1/4}}+q(\log \log n))/\sqrt{\log n})}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом того, что $r < 3q/2$, получаем неравенство

$$\hat{s}(q, n) \leq 2^{n/2-q/4+O(n^{3/4}\sqrt{\log n+q}(\log \log n)/\sqrt{\log n})}. \quad (16)$$

Первое из неравенств (6) доказано.

Докажем второе из неравенств (6). В этом случае $4n/9 \leq q < n/2 - \hat{q}$. При этом $m = 0$. Граф G_{-1} определим, как в случае 2, а графы G_i с $i \geq 0$ отсутствуют. Аналогично (12) получаем, что

$$\hat{s}(q, n) \leq R(1, q)2^{q+O((n-q)\sqrt{(\log \varphi)/\varphi})} \leq 2^{q+O(n^{3/4}\sqrt{\log n})}. \quad (17)$$

Отсюда следует второе из неравенств (6).

Докажем теперь третье из неравенств (6). В этом случае $q > n/2 + \hat{q}$. Пусть $A \subseteq [1, n]$. Обозначим через $\tau(A)$ наименьшее число в A . Пусть

$$\hat{S}(t, q, n) = \{A \in \hat{S}(q, n) : \tau(A) = t\}.$$

Обозначим через $G_t(q+1, n)$ граф $G_F(q+1, n)$ с $F = \{t\}$. Пусть $E(G)$ — множество ребер графа G . Заметим, что для всякого $A \in \hat{S}(t, q, n)$ подмножество $A \cap [q+1, n]$ является независимым в графе $G_t(q+1, n)$.

Ясно, что $E(G_t(q+1, n)) = \emptyset$ и $I(G_t(q+1, n)) = 2^{n-q}$ при $t > n - q$.

Если $(n - q)/2 < t \leq n - q$, то

$$E(G_t(q+1, n)) = \{\{i, i+t\} : q < i \leq n - t\}.$$

Граф $G_t(q+1, n)$ представляет собой объединение паросочетания из $n - q - t$ ребер с $2t + q - n$ изолированными вершинами. При этом

$$I(G_t(q, n)) = (3/4)^{n-q-t}2^{n-q}.$$

При $t \leq (n - q)/2$ граф $G_t(q+1, n)$ представляет собой объединение непересекающихся по вершинам цепей и, как нетрудно видеть, (см., например, [3])

$$I(G_t(q+1, n)) \leq 3^{(n-q)/2}.$$

Пусть, как и прежде, $\varepsilon_n = \log \log n / \sqrt{\log n}$. С учетом сказанного, при $q > n/2 + \hat{q}$ и $\omega_n = \sqrt{n} \log \log n$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \hat{s}(q, n) &= \sum_{1 \leq t \leq q} |\hat{S}(t, q, n)| \leq \sum_{1 \leq t < (n-q)/2} R(t, q) |I(G_t(q+1, n))| \\ &\quad + \sum_{(n-q)/2 \leq t \leq n-q} R(t, q) |I(G_t(q+1, n))| + \sum_{n-q < t \leq q} R(t, q) 2^{n-q} \\ &\leq 3^{(n-q)/2} 2^{(n-q)\varepsilon_n/2 + O(\omega_n)} + 2^{(n-q)(1+\varepsilon_n/2) + O(\omega_n)} + 2^{n-q+O((2q-n)\varepsilon_n)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует третье неравенство в (6).

Докажем теперь (7). Нижняя оценка очевидна:

$$\sum_{n/2 - \hat{q} \leq q \leq n/2 + \hat{q}} \hat{s}(q, n) \geq \hat{s}([n/2] + \psi, n) \geq c_2 2^{n/2}. \quad (18)$$

Для доказательства верхней оценки, используя соображениями предыдущего случая и то, что $s(n/3, n) \leq c2^{n/2}$ при некоторой абсолютной положительной постоянной c (см. [6] и [1]), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{n/2-\hat{q} \leq q \leq n/2+\hat{q}} \hat{s}(q, n) &\leq \sum_{n/2-\hat{q} \leq q \leq n/2+\hat{q}} \sum_{1 \leq t < n/3} \hat{s}(t, q, n) + s(n/3, n) \\ &\leq \sum_{n/2-\hat{q} \leq q < n/2+\hat{q}} \left(\sum_{1 \leq t < (n-q)/2} R(t, q) 3^{(n-q)/2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(n-q)/2 \leq t < n/3} R(t, q) \left(\frac{3}{4}\right)^{n-q-t} 2^{n-q} \right) + c2^{n/2} = O(2^{n/2}). \end{aligned} \quad (19)$$

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $t \geq \hat{q} = n^{3/4} \log n$. Требуется доказать, что

$$s(t, n) = O(2^{n/2}).$$

Число тех $A \in S(t, n)$, которые не содержат плотных отрезков длины ψ , в силу леммы 1 не превосходит

$$R(t, n) \leq R(1, n) \leq 2^{n \log \log n / \sqrt{\log n}}.$$

Число тех $A \in S(t, n)$, которые содержат плотный отрезок длины ψ в интервале $[t, n]$, в силу теоремы 3 не превосходит $c2^{n/2}$, где c — абсолютная постоянная.

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 3 вытекает отличное от известных (см. [4] и [5]) доказательство верхней оценки для логарифма $s(n)$.

Следствие 3. Пусть $\hat{q} = n^{3/4} \log n$. Тогда

$$\log s(n) \leq \frac{n}{2} + O(\hat{q}). \quad (20)$$

Доказательство. Оценивая число $s_1(n)$ тех $A \in S(n)$, у которых правая граница левого плотного отрезка расположена левее $\hat{q}$, воспользуемся (1) и очевидным неравенством $s(1, \hat{q}) \leq 2^{\hat{q}}$. При некоторой постоянной c справедливы соотношения

$$s_1(n) \leq s(1, \hat{q})s(\hat{q}, n) \leq 2^{\hat{q}} c 2^{n/2} = 2^{n(1/2+O(\hat{q}))}. \quad (21)$$

Для числа $s_2(n)$ оставшихся множеств с использованием (6) и (7) получаем оценки

$$s_2(n) \leq \sum_{q \geq \hat{q}} R(1, q) \hat{s}(q, n) \leq 2^{n(1/2+O(\hat{q}))}.$$

Отсюда и из (21) следует (20).

Список литературы

1. Омелянов К. Г., Сапоженко А. А., О числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел. *Дискретная математика* (2002) **14**, №3, 3–7.
2. Сапоженко А. А., О числе независимых множеств в графах. *Труды XIII международной конференции по проблемам теоретической кибернетики*. Казань, 2002, с. 14–19.
3. Сапоженко А. А., О числе независимых множеств в расширителях. *Дискретная математика* (2001) **13**, №1, 56–62.
4. Alon N., Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups. *Israel J. Math.* (1991) **73**, No 2, 247–256.
5. Calkin N., On the number of sum-free sets. *Bull. London Math. Soc.* (1990) **22**, 141–144.
6. Cameron P., Erdős P., On the number of integers with various properties. *Proc. 1st Conf. Canad. Number Theory Assoc.* De Gruyter, Berlin, 1990, 61–79.
7. Deshouillers J.-M., Freiman G. A., Sós V., Temkin M., On the structure of sum-free sets. II. *Astérisque* (1999) **258**, 149–161.

Статья поступила 09.09.2003.