Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Колчин, Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения, *Дискрет. матем.*, 2003, том 15, выпуск 4, 148–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 18:36:43

Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения

© 2003 г. А. В. Колчин

Для сумм независимых одинаково распределенных неотрицательных целочисленных случайных величин получен ряд предельных теорем, которые могут найти применение в задачах вероятностной комбинаторики при использовании обобщенной схемы размещения.

Работа поддержана грантом НШ 1758.2003.1 Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации.

1. Введение

В вероятностной комбинаторике получил распространение подход, основанный на применении обобщенной схемы размещения, позволяющий сводить ряд комбинаторных задач к задачам о суммах независимых случайных величин, классическому объекту изучения в теории вероятностей [1–4, 6, 13, 14]. Обобщенная схема размещения была введена в [1] и заняла заметное место в асимптотических исследованиях в вероятностной комбинаторике. Свое название эта схема получила в связи с тем, что она является обобщением классической задачи о случайном размещении частиц по ячейкам [2].

В обобщенной схеме размещения частиц распределение заполнений ячеек представимо как условное распределение независимых случайных величин при условии, что их сумма принимает фиксированное значение. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_N$ — неотрицательные целочисленные случайные величины, рассматриваемые как некоторые числовые характеристики комбинаторной структуры с n элементами, состоящей из N компонент, такие, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$. Если существуют независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ такие, что совместное распределение $\eta_1, \dots, \eta_N$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad (1)$$

где $k_1, \dots, k_N$ — произвольные целые числа, то говорят, что $\eta_1, \dots, \eta_N$ образуют обобщенную схему размещения с параметрами n и N и независимыми случайными величинами $\xi_1, \dots, \xi_N$.

В силу независимости случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ изучение многих характеристик обобщенной схемы размещения сводится к задачам о суммах независимых случайных величин. Пусть случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ одинаково распределены и μ_r — число случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$, принявших значение r , $r = 0, 1, \dots, N$. Нетрудно

показать (см., например, [2]), что

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}},$$

где $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{N-k}^{(r)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины,

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и

$$p_r = \mathbf{P}\{\xi_1 = r\}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, получение предельного распределения случайной величины μ_r сводится к применению локальных теорем для сумм независимых случайных величин. В случае, когда распределения слагаемых одинаковы и фиксированы (не зависят от числа слагаемых), можно пользоваться хорошо развитой теорией суммирования независимых случайных величин [15]. Однако во многих применениях обобщенной схемы возникает необходимость в локальных предельных теоремах в схеме серий. В таких случаях до сих пор нет исчерпывающего ответа на вопрос, справедлива ли локальная предельная теорема даже в случае сходимости к нормальному закону, для каждого конкретного случая приходится проводить отдельное доказательство, либо следуя доказательству локальной теоремы, предложенному Б. В. Гнеденко [15, 1–7, 9], либо проверяя условия общих локальных теорем [10, 8].

Обычно (см., например, [3]), распределение случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)},$$

где $b_0, b_1, b_2, \dots$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел,

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!},$$

и θ — параметр, принимающий положительные значения из области сходимости ряда $B(\theta)$. В таких случаях, если соотношение (1) справедливо при некотором значении θ , то оно остается верным при всех положительных θ из области сходимости ряда $B(\theta)$ (см., например, [2–4]).

Для полного изучения характеристик обобщенной схемы размещения, как правило, требуются локальные предельные теоремы при всех значениях параметра θ . В статье рассматриваются простейшие случаи. Во-первых, предполагается, что b_0 и b_1 положительны, и во-вторых, допускаются значения параметра θ , строго меньшие радиуса сходимости ряда $B(\theta)$. Получены предельные теоремы о сходимости к нормальному распределению и распределению Пуассона. Остается не рассмотренным важный случай, когда значения параметра θ приближаются к границе сходимости ряда $B(\theta)$. Как показывают примеры (см., например, [3, 4, 11, 12]), в этом случае могут появляться и другие предельные распределения.

Некоторые из доказанных в статье теорем, по-видимому, могут быть получены путем проверки приведенных в [10] общих условий справедливости локальных теорем о сходимости к нормальному распределению (см. [8]), однако автор считает, что наличие простых прямых доказательств может оказаться полезным для дальнейших исследований в этой области.

2. Основные обозначения. Вспомогательные соотношения

Мы будем придерживаться следующих обозначений. Пусть задана последовательность неотрицательных чисел $b_0, b_1, b_2, \dots$, таких, что $b_0, b_1 > 0$ и радиус сходимости R ряда

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!}$$

положителен. Введем целочисленную случайную величину $\xi = \xi(\theta)$, распределенную по следующему закону:

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Положим

$$m = m(\theta) = \mathbf{M}\xi, \quad \sigma^2 = \sigma^2(\theta) = \mathbf{D}\xi, \quad \beta = \beta(\theta) = \mathbf{M}|\xi - m|^3.$$

Заметим, что при $|\theta| < R$ случайная величина ξ имеет все моменты.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, распределение которых совпадает с распределением (2) случайной величины ξ .

Нашей целью является получение предельных теорем для сумм вида

$$S_N = \sum_{k=1}^N \xi_k.$$

Обозначим через $F_N(x)$ функцию распределения суммы центрированных и нормированных случайных величин

$$S_N^* = \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k - m}{\sigma \sqrt{N}}.$$

Легко видеть, что производящая функция распределения случайной величины ξ есть

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k z^k}{k! B(\theta)} = \frac{1}{B(\theta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k (z\theta)^k}{k!} = \frac{B(z\theta)}{B(\theta)}.$$

Характеристическая функция $\varphi(t)$ случайной величины ξ есть $\phi(e^{it})$, поэтому

$$\varphi(t) = \frac{B(\theta e^{it})}{B(\theta)}.$$

Характеристическая функция $\varphi^*(t)$ центрированной и нормированной случайной величины $(\xi - m)/(\sigma \sqrt{N})$ есть $\phi(e^{it/(\sigma \sqrt{N})})e^{-itm/(\sigma \sqrt{N})}$; поэтому

$$\varphi^*(t) = \frac{B(\theta e^{it/(\sigma \sqrt{N})})}{B(\theta)} e^{-itm/(\sigma \sqrt{N})}. \quad (3)$$

Через $\bar{\varphi}(t) = \mathbf{M}e^{it(\xi-m)}$ обозначим характеристическую функцию центрированной случайной величины $\xi - m$.

Выразим первые два момента случайной величины ξ через функцию $B(\theta)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} m = \mathbf{M}\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k b_k \theta^k}{k! B(\theta)} = \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)}, \\ \mathbf{M}\xi(\xi - 1) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1) b_k \theta^k}{k! B(\theta)} = \frac{\theta^2 B''(\theta)}{B(\theta)}, \\ \sigma^2 = \mathbf{D}\xi &= \mathbf{M}\xi(\xi - 1) + \mathbf{M}\xi - (\mathbf{M}\xi)^2 \\ &= \frac{\theta^2 B''(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)} - \frac{\theta^2 (B'(\theta))^2}{(B(\theta))^2}. \end{aligned}$$

Введем также обозначение

$$P_N(n) = \mathbf{P}\{S_N = n\}.$$

3. Интегральные предельные теоремы

Теорема 1. Пусть $N \rightarrow \infty$ и существуют постоянные θ_0, θ_1 , $0 < \theta_0 < \theta_1 < R$, такие, что параметр $\theta = \theta(N) \in [\theta_0, \theta_1]$. Тогда распределение S_n^* слабо сходится к стандартному нормальному закону, причем

$$\sup_x |F_N(x) - \Phi(x)| \leq c \frac{\beta^*}{\sigma^* \sqrt{N}}, \quad (4)$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона и

$$\sigma^* = \min_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \sigma(\theta) > 0, \quad \beta^* = \max_{\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1} \beta(\theta),$$

c — постоянная из неравенства Берри–Эссеена.

Доказательство. Справедливость теоремы следует из того, что если зафиксировать произвольное θ , то по теореме Берри–Эссеена

$$\sup |F_N(x) - \Phi(x)| \leq c \frac{\beta(\theta)}{\sigma(\theta) \sqrt{N}} \leq c \frac{\beta^*}{\sigma^* \sqrt{N}}.$$

Положительность σ^* следует из ограничений, наложенных на последовательность $b_0, b_1, \dots$

Теорема 2. Пусть $N \rightarrow \infty$ и параметр $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что выполняется соотношение

$$\frac{b_1}{b_0} N \theta \rightarrow \lambda,$$

где λ — некоторая положительная постоянная. Тогда распределение суммы S_N сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

Доказательство. Применим теорему непрерывности для производящих функций (см., например, [5]). Производящая функция распределения Пуассона с параметром λ есть $\phi_{\Pi}(z) = e^{-\lambda(1-z)}$, в то время как производящая функция распределения случайной величины ξ есть $\phi(z) = B(z\theta)/B(\theta)$. Производящая функция суммы S_N есть, очевидно, $\phi^N(z)$. Пользуясь асимптотическим разложением $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, справедливым при $|x| < 1$, получаем, что при $N \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow 0$ на множестве $0 < z < 1$

$$\begin{aligned} \ln \phi^N(z) &= N \ln \phi(z) = N(\ln B(\theta z) - \ln B(\theta)) \\ &= N \ln(b_0 + b_1 \theta z + O(\theta^2)) - N \ln(b_0 + b_1 \theta + O(\theta^2)) \\ &= N \ln\left(1 + \frac{b_1}{b_0} \theta z + O(\theta^2)\right) - N \ln\left(1 + \frac{b_1}{b_0} \theta + O(\theta^2)\right) \\ &= \frac{b_1}{b_0} N \theta (z - 1) + O(N \theta^2) = \lambda(z - 1)(1 + o(1)), \end{aligned}$$

что доказывает сходимость распределения суммы S_N к распределению Пуассона с параметром λ .

Теорема 3. Пусть $N \rightarrow \infty$ и параметр $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$ так, что $\theta N \rightarrow \infty$. Тогда распределение суммы S_N^* слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Представим $B(\theta e^{it/(\sigma\sqrt{N})})$ в виде $B(\theta e^{it/(\sigma\sqrt{N})}) = B(\theta + \Delta\theta)$, где $\Delta\theta = e^{it/(\sigma\sqrt{N})} - 1$. Возьмем логарифм от обеих частей представления характеристической функции (3). Разлагая $\ln B(\theta + \Delta\theta)$ в точке θ до членов третьего порядка малости при фиксированном t , получаем, что

$$\ln B(\theta + \Delta\theta) = \ln \left(B(\theta) + \Delta\theta B'(\theta) + \frac{(\Delta\theta)^2}{2} B''(\theta) + O(\Delta^3 \theta^3) \right),$$

так как производная $B'''(\theta)$ существует и ограничена при ограниченном $\theta \leq \theta_1 < R$. Далее, пользуясь разложением $\ln(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ при $x \rightarrow 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} \ln B(\theta + \Delta\theta) &= \ln B(\theta) + \ln \left(1 + \frac{\Delta\theta B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\Delta^2 \theta^2 B''(\theta)}{2B(\theta)} + O(\Delta^3 \theta^3) \right) \\ &= \ln B(\theta) + \frac{\Delta\theta B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\Delta^2 \theta^2 B''(\theta)}{2B(\theta)} - \frac{\Delta^2 \theta^2 (B'(\theta))^2}{2(B(\theta))^2} + O(\Delta^3 \theta^3). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \ln \phi^*(t) &= \ln \frac{B(\theta e^{it/(\sigma\sqrt{N})})}{B(\theta)} e^{-itm/(\sigma\sqrt{N})} \\ &= \ln B(\theta + \Delta\theta) - \ln B(\theta) - itm/(\sigma\sqrt{N}) \\ &= \frac{\Delta\theta B'(\theta)}{B(\theta)} + \frac{\Delta^2 \theta^2 B''(\theta)}{2B(\theta)} - \frac{\Delta^2 \theta^2 (B'(\theta))^2}{2(B(\theta))^2} - \frac{itm}{\sigma\sqrt{N}} + O(\Delta^3 \theta^3). \end{aligned}$$

Легко видеть, что при $\theta \rightarrow 0$, в силу ранее полученных выражений для $m(\theta)$ и $\sigma^2(\theta)$, справедливы представления

$$\begin{aligned} m &= m(\theta) = \mathbf{M}\xi = \theta \frac{B'(\theta)}{B(\theta)} = \theta \frac{b_1}{b_0} + O(\theta^2), \\ \sigma^2 &= \sigma^2(\theta) = \mathbf{D}\xi = \theta \frac{b_1}{b_0} + O(\theta^2). \end{aligned}$$

Далее, очевидно,

$$\Delta \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)} - \frac{itm}{\sigma\sqrt{N}} = \Delta m - \frac{itm}{\sigma\sqrt{N}}.$$

При любом фиксированном t при $N \rightarrow \infty$

$$\Delta = e^{it/(\sigma\sqrt{N})} - 1 = \frac{it}{\sigma\sqrt{N}} - \frac{t^2}{2\sigma^2 N} + O(1/(\sigma^3 N^{3/2}))$$

откуда следует, что

$$\Delta m - \frac{itm}{\sigma\sqrt{N}} = -\frac{t^2 m}{2\sigma^2 N} + O(1/(\sigma^{1/2} N^{3/2}))$$

Окончательно получаем следующую оценку для логарифма характеристической функции случайной величины ξ :

$$\begin{aligned} \ln \varphi^*(t) &= -\frac{t^2 m}{2\sigma^2 N} + \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{\theta^2 B''(\theta)}{B(\theta)} - \frac{(\theta B'(\theta))^2}{(B(\theta))^2} \right) + O(1/(\theta^{1/2} N^{3/2})) \\ &= -\frac{t^2 m}{2\sigma^2 N} - \frac{t^2}{2\sigma^2 N} (\mathbf{M}\xi(\xi - 1) - (\mathbf{M}\xi)^2) + O(1/(\theta^{1/2} N^{3/2})) \\ &= -\frac{t^2}{2\sigma^2 N} (\mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\xi(\xi - 1) - (\mathbf{M}\xi)^2) + O(1/(\theta^{1/2} N^{3/2})) \\ &= -\frac{t^2}{2N} + O(1/(\theta^{1/2} N^{3/2})). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(\varphi^*(t))^N = e^{-t^2/2} (1 + O(1/\sqrt{\theta N})),$$

что завершает доказательство теоремы.

4. Локальные предельные теоремы

Как уже отмечалось во введении, при применении обобщенной схемы размещения особое значение имеют локальные предельные теоремы. В этом разделе доказаны локальные предельные теоремы в случае, когда параметр $\theta = \theta(N)$ при $N \rightarrow \infty$ изменяется так, что $\theta \leq \theta_1 < R$.

Теорема 4. Пусть $N \rightarrow \infty$ и существуют положительные постоянные θ_0, θ_1 , такие, что параметр $\theta = \theta(N)$ меняется так, что $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < R$. Тогда

$$\sigma\sqrt{N}P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(n - mN)^2}{2\sigma^2 N} \right\} \rightarrow 0 \quad (5)$$

равномерно относительно целых неотрицательных n .

Доказательство. Равномерная по n справедливость соотношения (5) при любом фиксированном θ установлена в §49 в [15].

Покажем, что указанное соотношение выполняется равномерно по θ . Будем следовать доказательству локальной предельной теоремы, предложенному Б. В. Гнеденко в §49 в [15]; при этом будем следить за равномерностью оценок остаточных членов.

Характеристическая функция суммы S_N есть $\varphi^N(t)$. По теореме обращения для характеристических функций

$$P_N(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^N(t) e^{-itn} dt.$$

Положим

$$n = mN + \sigma z \sqrt{N}.$$

Тогда, очевидно,

$$P_N(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it\sigma z \sqrt{N}} e^{-itmN} \varphi^N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it\sigma z \sqrt{N}} (\bar{\varphi}(t))^N dt.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} e^{-x^2/2} dx,$$

разность

$$R_N = 2\pi \left(\sigma \sqrt{N} P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \right)$$

можно представить в виде суммы следующих четырех интегралов:

$$I_1 = \int_{-A}^A e^{-ixz} ((\bar{\varphi}(x/(\sigma\sqrt{N})))^N - e^{-x^2/2}) dx,$$

$$I_2 = - \int_{|x| \geq A} e^{-ixz - x^2/2} dx,$$

$$I_3 = \int_{A \leq |x| \leq \varepsilon \sigma \sqrt{N}} e^{-ixz} (\bar{\varphi}(x/(\sigma\sqrt{N})))^N dx$$

$$I_4 = \int_{\varepsilon \sigma \sqrt{N} \leq |x| \leq \pi \sigma \sqrt{N}} e^{-ixz} (\bar{\varphi}(x/(\sigma\sqrt{N})))^N dx;$$

положительные постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Возьмем произвольное $\delta > 0$ и покажем, что разность R_N может быть сделана меньше δ равномерно по n и θ , $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, выбором достаточно большого N .

Интеграл I_2 не зависит от θ ,

$$|I_2| \leq \int_{|x| \geq A} e^{-x^2/2} dx,$$

и этот интеграл может быть сделан сколь угодно малым для всех n и θ , $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, выбором достаточно большого A .

Поскольку третья производная $B'''(z)$ ограничена при $|z| \leq \theta_1 < R$, справедливо представление

$$\bar{\varphi}(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + c(\theta, t) t^3,$$

где $|c(\theta, t)| \leq c$ при всех n и θ , $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. Отсюда следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|t| \leq \varepsilon$

$$|\bar{\varphi}(t)| \leq 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{4} \leq e^{-\sigma^2 t^2/4}. \quad (6)$$

Поэтому

$$|I_3| \leq \int_{A \leq |x| \leq \varepsilon \sigma \sqrt{N}} (\bar{\varphi}(x/(\sigma \sqrt{N})))^N dx \leq \int_{A \leq |x| \leq \varepsilon \sigma \sqrt{N}} e^{-x^2/4} dx,$$

и этот интеграл может быть сделан сколь угодно малым для всех n и θ , $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, выбором достаточно большого A .

Пусть ε выбрано так, что выполнено (6), а A так, что $|I_2| \leq \delta/4$, $|I_3| \leq \delta/4$. При так выбранных и зафиксированных ε и A оценим интегралы I_1 и I_4 .

При условиях доказываемой теоремы справедлива теорема 1, в силу которой распределение случайной величины S_N^* слабо сходится к стандартному нормальному закону, и следовательно, при $N \rightarrow \infty$

$$(\bar{\varphi}(x/(\sigma \sqrt{N})))^N - e^{-x^2/2} \rightarrow 0$$

равномерно по x в любом конечном интервале. Более того, эта сходимость равномерна по θ , $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < R$ (если предположить противное, то приходим к противоречию с теоремой 1). Следовательно, найдется такое N_0 , что при $N \geq N_0$

$$|(\bar{\varphi}(x/(\sigma \sqrt{N})))^N - e^{-x^2/2}| \leq \delta/(8A)$$

для всех x , $-A \leq x \leq A$, и для всех θ , $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. Следовательно, $|I_1| \leq \delta/4$ при достаточно большом N .

Наконец, справедлива оценка

$$|I_4| \leq \int_{\varepsilon \sigma \sqrt{N} \leq |x| \leq \pi \sigma \sqrt{N}} |\bar{\varphi}(x/(\sigma \sqrt{N}))|^N dx = \sigma \sqrt{N} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} |\varphi(t)|^N dt.$$

При любом θ шаг распределения случайной величины ξ равен единице, поэтому

$$\max_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} |\varphi(t)| = q(\theta) < 1.$$

Нетрудно видеть, что $q(\theta)$ непрерывно зависит от параметра θ на отрезке $[\theta_0, \theta_1]$ и, следовательно, достигает своего максимума в некоторой точке $\bar{\theta}$ этого отрезка. Таким образом,

$$\max_{\theta \in [\theta_0, \theta_1]} \max_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} |\varphi(t)| = q(\bar{\theta}) = q < 1.$$

Поэтому

$$|I_4| \leq 2\pi \sigma \sqrt{N} q^N,$$

и выбором достаточно большого N этот интеграл может быть сделан по модулю меньшим $\delta/4$ равномерно по θ , $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. Теорема тем самым доказана.

Теорема 5. Пусть $N \rightarrow \infty$, $\theta = \theta(N) \rightarrow 0$, $\theta N \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sigma \sqrt{N} P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(n - mN)^2}{2\sigma^2 N} \right\} \rightarrow 0$$

равномерно относительно целых неотрицательных n .

Доказательство. Оценим опять интегралы I_1 – I_4 , введенные в доказательстве теоремы 4, в условиях настоящей теоремы. Интеграл I_2 , не зависящий от θ , оценивается как в доказательстве теоремы 4 и может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно большого A . Также выбором достаточно большого A и достаточно малого ε сколь угодно малым может быть сделан интеграл I_3 . При так выбранных и зафиксированных A и ε , в силу теоремы 3 получаем, что интеграл I_1 также может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно большого N . Остается оценить интеграл I_4 . Справедлива оценка

$$|I_4| \leq \sigma \sqrt{N} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} |\varphi(t)|^N dt.$$

Напомним, что

$$\varphi(t) = \frac{B(\theta e^{it})}{B(\theta)}.$$

Оценим $\varphi(t)$ при $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$. При $\theta \rightarrow 0$ справедливо разложение

$$B(\theta e^{it}) = B(\theta + \theta(e^{it} - 1)) = B(\theta) + \theta(e^{it} - 1)B'(\theta) + O(\theta^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ln \varphi(t) &= \ln B(\theta e^{it}) - \ln B(\theta) \\ &= \ln B(\theta) + \ln(1 + \theta(e^{it} - 1)(B'(\theta)/B(\theta)) + O(\theta^2)) - \ln B(\theta) \\ &= \theta(e^{it} - 1)(B'(\theta)/B(\theta)) + O(\theta^2). \end{aligned}$$

Так как $e^{it} - 1 = \cos t + i \sin t - 1$, получаем, что

$$\varphi(t) = \exp\{-\theta(1 - \cos t)(B'(\theta)/B(\theta)) + O(\theta^2)\} \exp\{i\theta \sin t (B'(\theta)/B(\theta))\}.$$

Поскольку $B'(\theta)/B(\theta) = b_1/b_0 + O(\theta)$ при $\theta \rightarrow 0$, при $\varepsilon \leq |t| \leq \pi$, $\varepsilon < \pi/2$, при достаточно малых θ

$$|\varphi(t)| \leq e^{-\theta b_1(1 - \cos \varepsilon)/(2b_0)}.$$

Тогда

$$|I_4| \leq \sigma \sqrt{N} 2\pi e^{-\theta b_1 N(1 - \cos \varepsilon)/(2b_0)}$$

и, учитывая, что при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta N \rightarrow \infty$

$$\sigma^2 = \frac{b_1}{b_0} \theta + O(\theta^2),$$

получаем, что интеграл I_4 может быть сделан сколь угодно малым.

Теорема тем самым доказана.

Список литературы

1. В. Ф. Колчин, Один класс предельных теорем для условных распределений. *Литовский матем. сборник* (1968) **8**, №1, 111–126.
2. В. Ф. Колчин, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
3. В. Ф. Колчин, *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.
4. В. Ф. Колчин, *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
5. В. Ф. Колчин, *Асимптотические методы теории вероятностей*. МИЭМ, Москва, 1984.
6. Yu. L. Pavlov, *Random forests*. VSP, Utrecht, 2000.
7. Н. И. Казимиров, Ю. Л. Павлов, Одно замечание о лесах Гальтона–Ватсона. *Дискретная математика* (2000) **12**, №1, 47–59.
8. Н. И. Казимиров, О некоторых условиях отсутствия гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2002) **14**, №2, 107–118.
9. T. B. Myllari, Limit distributions of the number of leaves of a Galton–Watson forest. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. VSP, Utrecht, 2002, pp. 257–271.
10. А. Б. Мухин, Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1991) **36**, №4, 660–674.
11. A. V. Kolchin, On the number of hyperforests. *J. Math. Sci.* (1995) **76**, 2250–2258.
12. A. V. Kolchin, On the asymptotic behaviour of the number of hyperforests. In: *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics*. VSP, Utrecht, 1996, pp. 285–294.
13. А. Н. Тимашёв, Об асимптотических разложениях в локальных предельных теоремах в равновероятных схемах размещения частиц по различным ячейкам. *Дискретная математика* (2000) **12**, №1, 60–69.
14. А. Н. Тимашёв, О распределении числа циклов заданной длины в классе подстановок с известным числом циклов. *Дискретная математика* (2001) **13**, №4, 60–72.
15. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*. ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1949.

Статья поступила 13.10.2003.